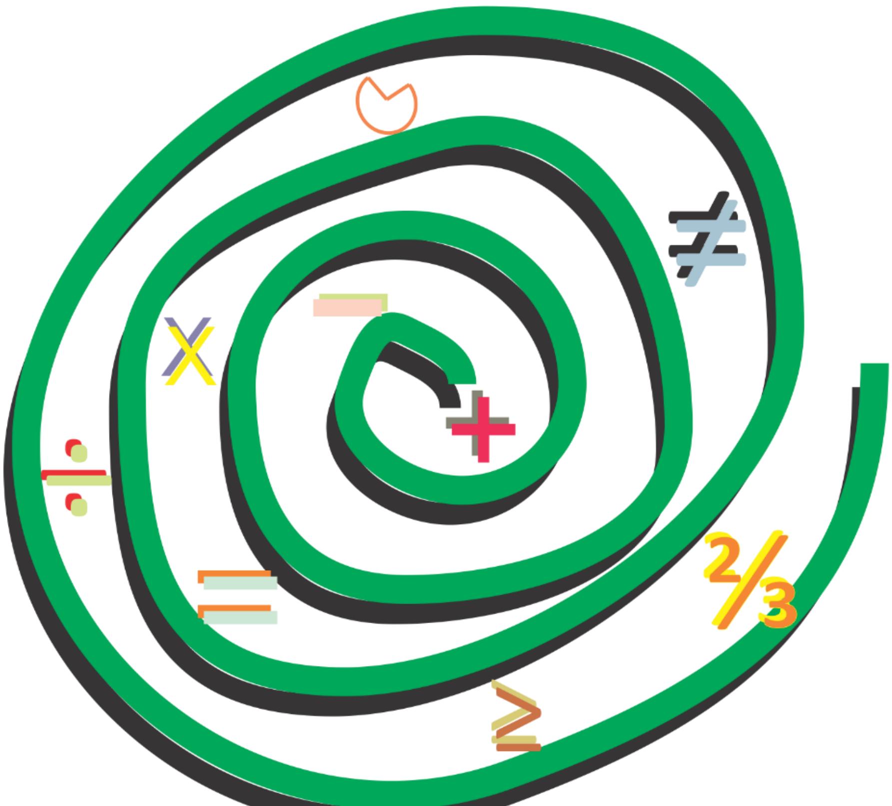
MATEMÁTICA PARA PEDAGOGIA

Oficina de Aritmética



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
PARFOR
PLANO NACIONAL DE FORMAÇÃO DOCENTE

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
PARFOR
PLANO NACIONAL DE FORMAÇÃO DOCENTE

Assessoria de Educação a Distância • UFPA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
PARFOR
PLANO NACIONAL DE FORMAÇÃO DOCENTE

Márcio Lima do Nascimento (org.)

MATEMÁTICA PARA PEDAGOGIA: OFICINA DE ARITMÉTICA

1ª EDIÇÃO

Belém – Pará

editAedi
Assessoria de Educação a Distância • UFPA

2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
PARFOR
PLANO NACIONAL DE FORMAÇÃO DOCENTE

ISBN: 978-85-65054-36-2

Márcio Lima do Nascimento
Organização

Dionísio J. da Costa Sá e Fernando Roberto B. Colares
Diagramação e Capa

Williane Santos
Revisão Ortográfica

Marcos Monteiro Diniz
Revisão Técnica

EditAedi
Editora

Dados internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Matemática Para Pedagogia: Oficina de Aritmética / Márcio Lima do Nascimento (Org.) [et. al.] – Belém: Editora EditAedi, 2016.

123 p.

ISBN E-book: 978-85-65054-36-2

1. Matemática Para Pedagogia: Oficina de Aritmética | Nascimento, Márcio L. et al.

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

SUMÁRIO

CONSIDERAÇÕES INICIAIS SOBRE A OFICINA

O foco principal dessa oficina para os professores pedagogos, ou seja, professores do primeiro ao quinto ano do ensino fundamental menor, é tentar ampliar a visão do ensino de aritmética dos professores formadores, para que eles possam iniciar uma nova geração de estudantes, mais aberta aos vários significados que a matemática pode ter em suas vidas, facilitando inclusive para que, ao passar a estudar com o professor licenciado em matemática a partir do sexto ano, este aluno o faça com mais entusiasmo. Muitas dessas discussões têm aparecido em revistas nacionais e livros de divulgação da matemática. Porém o público que queremos atingir com esse estudo, em muitos casos, não tem acesso a essas informações ou trabalha em condições inadequadas, sem um rumo para as discussões teóricas e práticas com os alunos, presos a materiais didáticos obrigatórios. O Pará é um caso típico.

Ao ter acesso a esta obra, o leitor tem nas mãos uma coleção diferente. Ela nasce de uma mesma pergunta em contextos diferentes: por que os alunos, que estudaram com os licenciados em pedagogia, chegam no sexto ano, com pouco interesse e disposição de aprender matemática? O professor licenciado em matemática que leciona no ensino médio faz a mesma pergunta, de certa forma cobrando dos seus colegas do fundamental menor. O matemático das universidades muitas vezes passa a ter queixa idêntica. Como quebrar este ciclo de cobranças e culpas? Sempre acreditei que temos que estabelecer o diálogo entre o pedagogo, o professor de matemática e o matemático. Quando falamos matemático estamos nos referindo ao "pesquisador em matemática", ou seja, aquele que cria novos teoremas, que existe em boa quantidade nas universidades brasileiras. Sempre houve uma grande distância entre esses três elementos. A aproximação entre eles irá favorecer o ensino e a pesquisa em matemática como um todo. Pertenço à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará há mais de 20 anos, onde tive a oportunidade de coordenar o Plano Nacional de Formação de Professores CAPES-MEC , PARFOR, com o enorme engajamento da UFPA que, em 7 anos, já formou mais de 5000 professores em exercício das redes públicas do estado do Pará, e em 20 diferentes licenciaturas da instituição. São aqueles professores cadastrados no Educacenso e na Plataforma Freire da CAPES, que em muitos casos estão na sala de aula do fundamental menor há mais de 10 anos sem conseguir fazer a primeira licenciatura em um município mais avançado. Em determinado momento houve a necessidade de propor para a Coordenação do Curso de Pedagogia oficinas de aritmética para os alunos do PARFOR. Foi a oportunidade que esperávamos para estabelecer um primeiro material do tipo "como ensinar para quem vai ensinar de forma significativa?". Com esse espírito o texto foi se desenvolvendo. A ideia inicial destas notas surgiu a partir da minha leitura de um livro que foi originalmente publicado nos Estados Unidos, da Profa. Dra. Liping Ma, da Universidade de Stanford, chamado *Saber e Ensinar Matemática Elementar (Teaching elementary mathematics in China and the United States, 1999).* esta obra foi lançada em português pela Editora Gradiva em 2009. Trata-se de um trabalho fundamental para entendermos o ensino de matemática nas séries iniciais nesses países, e particularmente no Brasil, que em grande parte segue o modelo americano. A professora Liping Ma fez uma comparação entre as diversas formas dos professores ensinarem aritmética aos alunos do ensino fundamental menor, do primeiro ao quinto ano.

No nosso texto, temos inicialmente um primeiro capítulo descrevendo duas formas de ensinar que consideramos ultrapassadas e que podem estar na raiz dos dramas futuros com a matemática de muitas crianças brasileiras. A partir do segundo capítulo temos um roteiro mais focado nos tópicos centrais da aritmética discutido com diversos atores. Para a elaboração desses capítulos, fizemos diversas reuniões com a equipe das oficinas. As ideias discutidas sob a minha coordenação e a participação significativa do Professor Marcos Monteiro Diniz, formaram um debate de diversos tópicos que queríamos abordar com o intuito de sermos FACILITADORES DA APRENDIZAGEM desses professores alunos de pedagogia do PARFOR, tentando desmistificar a fama de matéria difícil e para poucos. Ainda neste capítulo, inicia-se o estudo com a adição com números naturais e uma lista de questões com a respectiva resoluções. O Capítulo 3 trabalha a subtração com números naturais e também segue com uma lista de questões. No capítulo 4 será trabalhada a multiplicação, a questão do uso da tabuada e métodos de se efetuar uma multiplicação. A seguir, no Capítulo 5 tratamos da divisão com números naturais. Seguem problemas, métodos de decomposição, distribuição e formas diferentes para as várias maneiras de aprender. Já no Capítulo 6, será trabalhado a adição e a subtração com frações. A multiplicação de frações fica a cargo do Capítulo 7, com seu significado, frações irredutíveis. No capítulo 8 é enfatizado o assunto que temos que ensinar com extrema cautela os alunos, que é a divisão com frações. Encerra-se com o Capítulo 9 e o estudo da relação entre perímetro e área.

Ministrando a Oficina no município de Acará, tive experiências extremamente enriquecedoras como matemático e professor de ensino superior, trocando experiências com professores que ensinam matemática elementar e a velha e sempre atual aritmética, para as nossas crianças. São professores encontrando professores. Apenas quando executamos o cronograma planejado é que percebemos diversas facetas que antes não tínhamos pensado e as novas ideias para a melhoria do texto aparecem. Os depoimentos dos alunos ao final da oficina, ressaltando o quanto foi significativo e quanto mudou a visão que eles tinham da matemática, nos fez pensar que esse projeto tem muito valor. Nosso objetivo agora é melhorar esse material para aprimorar com as diferentes experiências. E essa é uma tarefa apaixonante.

Finalizo estas considerações iniciais com uma entrevista que fiz com o Professor Marcelo Viana, atual presidente da Sociedade Brasileira de Matemática, matemático com vários prêmios internacionais, que tem se pronunciado ultimamente sobre a situação do ensino de matemática para o ensino básico no Brasil:

Marcio: Você teve professores na educação básica que foram significativos ou determinantes para que você gostasse de matemática ? Quando foi isso?
Marcelo Viana: Todos os professores de Matemática que eu tive na escola básica

foram muito bons. Lembro de todos, talvez um pouco mais da professora do Ensino Médio, mas não diria que houve um destaque. Apenas tive a sorte de ter professores muito competentes, com boa formação e vocação para o ensino de Matemática.

Márcio: Você se considera mais professor de matemática ou mais matemático?
Marcelo Viana: É difícil responder porque eu considero ensinar parte integrante do que é ser matemático. Posso entender colegas que não gostam de dar aula, por uma razão ou outra, mas considero que isso significa que não gostam de um aspecto (importante) da profissão de matemático. Dito isso, eu tenho alguma experiência de docência na graduação e praticamente nenhuma nos segmentos pré-universitários.

Márcio: Para você, como é o processo de transformar uma conjectura em teorema? Qual a sensação quando você percebe que resolveu um grande problema?
Marcelo Viana: É difícil descrever um processo tão complexo em poucas palavras. É um pouco como uma caçada, em que você vai rondando a "presa", tentando objetivos intermediários, criando pontes entre ideias distintas. Cada avanço origina um enorme prazer. Por vezes você tem um avanço que você sabe que é decisivo (mesmo sem saber porquê). Aí a sensação é indescritível. Mas o trabalho não termina com esses momentos de inspiração: ele apenas passa para outro estágio.

Márcio: O matemático sempre precisa de outro(s) para avançar?
Marcelo Viana: A pesquisa em Matemática é uma atividade ao mesmo tempo muito solitária (a maior parte do tempo você está sozinho perante o desafio) e cada vez mais colaborativa: o número médio de coautores de artigos não para de crescer, para não falar dos projetos Polymath em que pesquisa é feita por, literalmente, centenas de pessoas.

Para a Globonews, em 09 de junho de 2016, depois de receber importante prêmio em Paris destacamos uma fala interessante do Marcelo:

"O matemático brasileiro Marcelo Viana, de 54 anos, que ganhou a principal premiação científica da França, o Grande Prêmio Científico Louis D, afirmou em entrevista à GloboNews que o ensino da matemática passou por avanços nos últimos anos, mas que ainda possui muitas deficiências e precisa melhorar. Marcelo é diretor geral do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Impa), instituição de pesquisa de ponta reconhecida internacionalmente. "A matemática vai, ao longo do tempo, se tornando um bicho papão para os alunos, algo ruim, pelo processo da própria atuação da escola", disse."

Afirmo que, assim como Marcelo Viana e a SBM, gostaríamos de mudar radicalmente este quadro, não apenas no estado do Pará, mas em todo o Brasil. Acho que temos que ser ouvidos neste processo.

Márcio Lima do Nascimento

Outubro de 2016

CAPÍTULO I – SUBTRAÇÃO E DIVISÃO EFICIENTES: FAZENDO A DIFERENÇA

Márcio Lima do Nascimento

Doutor em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da USP, é professor Associado III da Faculdade de Matemática da UFPA . Tem ministrado diversas disciplinas da Matemática na licenciatura e nas Engenharias. Desenvolve projeto de ensino em Laboratório de Jogos e Objetos Matemáticos. Sua área de pesquisa é Sistemas Dinâmicos, com ênfase em aplicações do intervalo e do círculo, propriedades métricas e ergodicidade, medidas invariantes absolutamente contínuas. Além disso, tem participado de vários projetos de ensino. Atualmente é Coordenador Geral do PARFOR, no âmbito da UFPA, programa de formação de professores do MEC/CAPES. Presidente do FORPARFOR, Fórum Nacional de Coordenadores Institucionais do PARFOR, além de participar de discussões no Brasil e no MERCOSUL (PASEM - Programa de Apoyo ao Sector Educativo del Mercosur) sobre ensino das licenciaturas em geral e em especial a matemática. Em 2007 realizou Pós-doutorado no Departamento de Matemática Aplicada do IME-USP

Neste capítulo destacarei dois conceitos que se, forem introduzidos pelos professores de forma mais livre e principalmente divertida, os resultados para o resto dos assuntos da aritmética serão bem mais satisfatórios para a criança que começa a estudar matemática. É a subtração entre números naturais e os conceitos iniciais de divisão. Quando os outros capítulos posteriores ficaram prontos, juntamente com a equipe passamos a reunir com os autores e o Prof. Marcos Diniz onde ressaltávamos que o material da oficina é uma referência essencial, mas que discussões específicas devem nortear o grupo para que o trabalho seja iniciado. Sugerimos um primeira discussão: tem muita gente que odeia matemática?

O matemático e pesquisador russo Edward Frenkel, radicado nos Estados Unidos, que é um grande divulgador da matemática, autor do best seller **Amor e Matemática**, tem falado em suas entrevistas que muita gente adora dizer que *odeia matemática,* causando inclusive risos e identificação com a plateia presente. Mas ninguém tem coragem de dizer em público que odeia música ou literatura, pois isso “seria uma vergonha e mostraria sua falta de cultura”. Eu concordo plenamente com o professor Frenkel. Além disso, ouvi do Professor Elon Lages que a matemática até o nono ano deve ser divertida e acessível para todos, pois sustenta-se principalmente nas questões de aritmética, sem nada mais abstrato do que *fazer contas*. Logo qualquer aluno “teria que ter” condições de achar a disciplina acessível. Isso não quer dizer agradável. Vai depender da matemática vista desde o jardim da infância e seus professores. No ensino médio, onde começa-se a estudar funções, que tem um caráter bem mais abstrato, podemos aceitar que algum aluno ache meio estranho aqueles gráficos e suas expressões associadas. Antes disso, no ensino fundamental, as contas são extremamente importantes para a nossa trajetória, como profissional ou ser humano curioso.

1.1 As primeiras contas

Vamos começar com algumas contas divertidas: toda criança que começa a estudar aritmética não tem a menor dificuldade em brincar com objetos (bolinhas, estrelas, quadradinhos) associados aos números naturais. E com a noção de quantidade de elementos em um conjunto: o conjunto das bananas tem mais elementos que o conjunto das maçãs? Depende. Se tivermos um número natural associado as bananas maior que o número natural associado ao conjunto das maçãs, podemos afirmar: temos mais bananas do que maçãs. Com essas associações (a brincadeira de ligar objetos e desenhos), rapidamente a criança entende o processo da soma de números naturais. É óbvio que cada criança aprenderá no seu tempo e com a abstração ou concretude própria e peculiar. Mas em geral será muito rápido este processo.

ASSOCIAR OBJETOS COM NUMEROS NATURAIS: DAÍ SURGE A IDÉIA DE SONHAR COM O INFINITO
Imagem em 17/10/2016: https://s-media-cache-ak0.pinimg.com/564x/73/85/20/73852003a31acaa1382d82ec0012ba7c.jpg

Logo em seguida a criança se depara com o problema de compartilhar coisas e ficar com mais ou menos objetos que o outro. A subtração tem que aparecer aqui como outra operação entre números naturais. Mais tarde, as crianças vão perceber que se ampliarmos esse conjunto dos números naturais poderemos ter os chamados números negativos e a operação é basicamente a mesma da soma, só que no conjunto dos números inteiros. Mas antes, surge o primeiro passo na subtração que, se não for introduzido adequadamente, pode causar muita estranheza nas crianças.

Se tenho 5 bombons e distribuo dois para o colega, acabo ficando com apenas 3 bombons. Ou seja:

$5 - 2 = 3$.

E assim o professor monta as várias situações de forma lúdica:

$9 - 7 = 2$,

6 – 0 = 6,

4 – 4 = 0,

10 – 8 = 2.

Neste contexto apareceu o número zero na conta 4 – 4 (fiquei sem nada). E o conjunto dos números naturais com o zero incluído se forma na cabeça da criança: $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...\}$.

Ainda não faz sentido os números do tipo 2 – 5, 7- 9, 10 – 12, etc. Ao mesmo tempo as contas grandes começam a aparecer: 11 – 9 = ? Faltam dedos da mão e alguns recorrem às bolinhas no caderno! Porém, desenhar bolinhas e apagar bolinhas começa a dar muito trabalho e exigir bastante atenção.

Aprendendo um pouco sobre a diferença ou subtração entre dezenas e entre as unidades, a criança logo aprende um algoritmo para contas grandes que torna-se logo uma máquina ótima de subtrair. Faremos abaixo uma subtração na vertical que, ao que parece, tem todo o apoio das crianças, pois é muito mais fácil de se trabalhar e o aprendizado fica mais organizado na vertical, ao contrário das palavras que para a maioria das pessoas ficam melhores escritas na horizontal.

49 –	pois	38 +	pois	40 –	e finalmente	9 -
38		11		30		8
___		___		___		___
11		49		10		1

A conta acima não precisa de maiores explicações para grande parte dos alunos, pois subtraímos as unidades na vertical e também as dezenas na vertical, sem precisar de nenhuma relação direta entre as contas. Observe que fizemos a separação das contas à direita.

Porém ao colocarmos a conta 47 – 19 temos a tarefa de fazer a subtração direta de 7 – 9, que não pode (por enquanto). A maioria esmagadora dos brasileiros dirá que aprendeu apenas a regra do “empréstimo”, pois podemos emprestar uma dezena de 40 e fazermos a conta inicial 17 – 9 que também de início não é fácil fazer mentalmente. Mas uma criança que é estimulada a reagrupar pode rapidamente fazer a conta 17 – 9 = 10 + 7 – 9 = (10 – 9) + 7= 1 + 7 = 8. Com isso temos que lembrar que ainda tem 30 para subtrair de 10, portanto o resultado é 20+8= 28. O esquema vertical fica assim:

	1				
3	47 -	que em contas separadas temos	30 -	e	17 -
	19		10		9
	___		___		___
	28		20		8

Porém, se desde o início do estudo, soma com os naturais for mostrado de várias formas de representar um mesmo número através da soma, essa conta na cabeça de cada criança pode sair de várias formas, tais como as contas verticais abaixo:

47	=	10 + 10 + 10 +10 + 7	=	20 + 10 + 10 + 7	=	30 + 10 + 7
19	=	10 + 9 + 0 + 0 + 0	=	10 + 9 + 0 + 0	=	10 + 9 + 0
28		0 + 1 + 10 + 10 + 7 = 28	=	10 + 1 + 10 + 7	=	20 + 1 + 7

Observe que o reagrupamento oferece uma gama de opções diferentes de fazer a conta, que possibilita à criança no mínimo se adequar a, digamos, várias velocidades de aprendizagem neste processo. Nas oficinas que fizemos, diversos professores diziam: “mas professor, todos aqui só aprendemos dessa forma, sabemos que os livros até têm reagrupamento, mas acabamos deixando de lado”.

O «empréstimo» não explica porque podemos tirar um 10 para a posição das unidades. Mas a decomposição explica. Quando dizemos decompor, isso implica que os algarismos em posições de ordem superior são de fato compostos a partir daqueles que estão em posições de ordem inferior. São permutáveis. O termo «empréstimo» não significa, de todo, o processo de compor-decompor. (Liping Ma, 2009, p. 45), Neste processo, “estamos emprestando e não vamos devolver? Isso não é emprestimo, para alguns soará muito estranha essa estória.”

A pesquisadora e professora (principalmente) Liping Ma, em seus estudos, com dados significativos, mostra que o ensino de matemática na China difere do modelo americano por um fato simples: a ênfase que os professores americanos dão a praticamente um só tipo de aprendizagem de subtração, multiplicação e divisão, frações e relações entre perímetro e área, ao contrário dos professores chineses. Ela ressalta inclusive que a formação dos professores americanos, do ponto de vista teórico é melhor que a do professor chinês, porém a forma de ensinar matemática na qual *a criança escolhe a melhor maneira de entender e fazer suas contas é muito importante*. Por exemplo, no Brasil praticamente 9 entre 10 alunos fazem subtração por empréstimo (ou empréstimo com um outro nome porém com o mesmo algoritmo). Não é dada a oportunidade dos alunos exercitarem outras formas de entender a aritmética e inclusive “criarem” o método que lhes convém. No Brasil, em muitos casos é visto o método de reagrupamento, mas a maioria acaba esquecendo, em virtude da ampla ênfase que é dada ao método de empréstimo. Por outro lado, Liping Ma mostra que pouquíssimos professores americanos ensinam várias formas de reagrupamento, o contrário dos professores chineses. Quanto ao conhecimento dos professores sobre os algoritmos, nos Estados Unidos observa-se professores que tem apenas conhecimento procedimental, enquanto que o entendimento conceitual e procedimental (juntos) é deixado de lado, o que não acontece no oriente. Idem, quando se fala das estratégias de ensino, onde a orientação conceitual é deixada em segundo plano.

Uma outra conta que fazemos questão de mencionar como possível "causadora de traumas" é a forma restrita de se ensinar frações, vista em grande número de livros didáticos.

O que dizer dessa definição de fração mostrada abaixo, que em certos manuais aparece em primeiro lugar:

Fração é a representação da parte de um todo (de um ou mais inteiros), assim, podemos considerá-la como sendo mais uma representação de quantidade, ou seja, uma representação numérica; com ela podemos efetuar todas as operações, tais como: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação.

Antes de tudo, não iniciaria com este conceito para a criança. Esta frase, "**representação da parte de um todo",** sem ter ilustrado bastante e falado de "pedaço de uma barra de chocolate", "pegar o chocolate e ver quantas pequenas partes ele foi formado" e outras formas divertidas de compartilhar coisas. Depois de fazermos vários exercícios com as barras de chocolate, falaria da PIZZA e suas divisões em 8, 12 ou 16 pedaços. Por que isso?

Porque vendo "vários tipos de frações 2/5" nos exemplos concretos, podemos entender que, em geral, a medida de algo ou a fração da medida de algo depende da nossa unidade de medida, ou seja, o nosso "UM". Cada um escolhe e seu "UM" e a criança acaba descobrindo propriedades bem gerais dos números e suas propriedades. Que 2/5 da sua pizza pode ser bem menos pizza do 2/5 das pizzas dos outros (a sua pode ser brotinho).

Uma coisa importante a mencionar aqui é o seguinte: é preferível, na abordagem de frações, introduzir vários conceitos que aparecem ao mesmo tempo, tais como divisão, unidades e diferentes tipos de unidades. Vejamos um pequeno exemplo dessa abordagem abaixo.

Com barras de chocolate formada de 4 pedaços menores, por exemplo, o que seria ¾ de 1 barra de chocolate? Se o chocolate é de outra marca, a embalagem é maior, porém todos saberão dizer quanto é ¾ da nova barra de chocolate. Por que temos dois valores de ¾ que representam quantidades diferentes de chocolate? Exatamente por que estamos considerando diferentes unidades de "1 barra de chocolate". Nesta discussão é importante o reforço de que a definição do "tamanho do 1" é arbitrariamente nossa. Alguns "uns" tem nome específico, como por exemplo, 1 centímetro ou 1 metro, dentre os vários famosos, como a polegada e as jardas. Porém, cada pessoa pode definir o seu "um", utilizando a medida do seu pé. Assim teremos muitos "uns" que dependem do tamanho do pé de cada um. Para não confundirmos tudo, devemos escolher aqueles que mais temos usado. No caso do Brasil temos a medida de 1 centímetro, onde 100 centímetros equivale a 1 metro (existe um museu na Europa onde está estabelecido o tamanho desta régua de um metro).

Por outro lado, ao abordar as frações tipo ¾ , devemos fazer a conta 3 divido por 4, pois isto resulta na conta 30 dividido por 4 e o aluno obtém o 0,75. É fundamental a relação que tem que ser estabelecida entre o ¾ e o 0,75, pois mais a frente ele terá relacionado melhor as frações equivalentes 1 e 4/4, além da relação futura de

0,75 = 75/100 = 75 % (setenta e cinco por cento).

Ou seja, não perca a oportunidade de falar de porcentagem logo que a criança entender as frações e suas infinitas representações. Apenas um gostinho!

Defendemos a discussão conjunta com as crianças, sem esperar que o haja uniformidade na compreensão sobre os diversos assuntos.

Dentre as discussões importantes podemos destacar:

- Mudar a cultura de Subtrair, usando reagrupamento, de várias maneiras;
- Lembrar que não devemos necessariamente replicar os modelos em que fomos ensinados, a criança deve fazer as suas escolhas;
- Os conceitos devem ser discutidos naturalmente, podendo juntar assuntos que no cronograma podem estar distantes. Por exemplo: não perder a oportunidade, ao discutir divisão de números naturais e frações, relacionar a fração 2/5 com a divisão de 2 por 5 resultando no número 0,40, que também pode ser escrito como a fração equivalente 40/100 = 40 %. Fecha-se dando uma ideia de porcentagem, sem detalhes. Essas interligações dos procedimentos são importantíssimas;
- Aprender a lidar com os erros dos alunos, ressaltando que o erro tem motivos e que são apenas caminhos para os procedimentos corretos; em geral todos queremos acertar;
- Estimular a interação entre o estudo da matemática escolar pelos professores e os modos de ensinar; devemos pensar mais sobre as aulas, mesmo que as consideremos elementares;
- Construir a chamada Compreensão Profunda da Matemática Fundamental (Liping Ma, 2009, pag. 205);
- Independentemente de sua forma, as interações em sala de aula devem centrar-se na matemática substantiva; não deixar de dar ideias de conceitos que serão completamente entendidos posteriormente (exemplo: números racionais e irracionais, se surgirem dúvidas); ter a capacidade de não fugir de discussões que aparentemente serão profundas e complexas, mas que provoquem a curiosidade dos alunos para prosseguir e não achar que os assuntos são inacessíveis, apenas para iluminados;
- Entender o papel dos materiais e livros didáticos, ampliando o leque de possibilidades, sem amarras;
- Privilegiar o entendimento conceitual e procedimental e não apenas o “condicionamento” procedimental;

- Logo ao iniciar geometria, poder explorar a relação entre perímetro e área, tais como: aumentar perímetro significa aumentar área; propor novas ideias e relacionar estas discussões com assuntos anteriores da aritmética;

> ***Eu chamo Compreensão Profunda da Matemática Fundamental ao conhecimento da matéria a ser ensinada e a ser aprendida. Por compreensão profunda refiro-me a um entendimento do campo da matemática elementar que é profundo (no sentido de completo), amplo e abrangente. Ainda que o termo profundo seja muitas vezes considerado no sentido de profundidade intelectual, as suas três conotações — profundidade, alcance e abrangência — estão interligadas. (Liping Ma, 2009, p. 220).***

Essa linha que norteia as discussões a serem travadas nas Oficinas de Aritmética com os professores do fundamental menor, que têm experiência, mas que estão arraigados a procedimentos e normas que muitas vezes passam a reproduzir os mesmos equívocos de várias gerações no ensino de matemática ao longo dos séculos. Devemos reinterpretar as estórias que tendem a não motivar o gosto pela matemática, por exemplo, a maneira como contamos a história sobre a chamada Academia de Platão na antiguidade. O filósofo Heidegger, analisando as origens da palavra matemática e do significado de ensinar e aprender, deu outra versão mais lógica sobre o tema:

É segundo esta compreensão de matemático que deve ser entendido o conhecido lema da Academia de Platão, que trazia inscrito em seu pórtico o seguinte: “Afaste-se daqui quem não sabe matemática” (sic). De acordo com essa nova acepção apresentada no comentário acima, a epígrafe platônica poderia ser interpretada como: “Afaste-se daqui quem não sabe aprender”. A afirmativa de Heidegger remonta a isto, mais que a uma restrição aos não hábeis em efetuar cálculos, apresentando a matemática como um pré-requisito para quem deseja, efetivamente, aprender o que quer que seja. (Kahlmeyer-Mertens, 2015).

Esse aspecto do pensamento de Heidegger, segundo Kahlmeyer-Mertens, se assemelha bastante aos escritos de Paulo Freire, ou seja:

Aprender/ensinar é, segundo Heidegger, reconduzir-se a um lugar no qual se pode descobrir um sentido próprio ao indivíduo que aprende, ao que é aprendido de maneira temática (e até mesmo curricular) sem, contudo, perder de vista seu sentido originário; possibilitar um sentido orientador da perspectiva da existência do indivíduo. Em vista disso, ensinar é ensinar uma “postura”, é ensinar o aluno a se reportar ao ethos de todo aprender, é dar através de um relato a indicação que conduzirá o aluno ao seu aprender. Por isso, só faz sentido ensinar quem está pré-disposto a aprender, ou seja, a ouvir o tal relato. Pois tal relatar atinge apenas aquele que um dia experimentou a

possibilidade fundamental de apreender um sentido próprio a si. (Kahlmeyer-Mertens, 2015).

Para finalizar, vejamos o que Celso Antunes acha que o professor deve ter ou saber para ser um bom professor (Mosé, V. 2013):

Em primeiro lugar, a consciência de que a aprendizagem é um processo dinâmico. A consciência de que não se sabe tudo, e que, a cada momento, tem que se estar aberto a novas aprendizagens. Em segundo lugar, sepultar aquela crença muito antiga da escola brasileira de que odomínio do conteúdo éa ferramenta essencial do trabalho do professor. É importante que o professor conheça conteúdos, que o matemático saiba matemática, mas que ele busque entender como o ser humano aprende, como se avalia esse ser humano,de que maneira posso ensiná-lo a argumentar, a pesquisar, a conquistar uma visão sistêmica, tudo isso é essencial no trabalho de um professor. E isso não se conquista senão por meio de um processo permanente de reaprendizagem e de transformação.

Neste capítulo discutimos de certa forma apenas o espírito das oficinas que queremos realizar com os professores, que é a tentativa de abordar os temas e conteúdos com os alunos da pedagogia, de forma a possibilitar que entendam as diversas formas de aprendizado que a criança pode ter no contato com a aritmética elementar. Seria atingir o conhecimento profundo da matemática elementar e para isso a parceria com os profissionais da licenciatura em matemática é essencial. Porém, a grande diferença deverá ser na ideia de que ***a matemática tem que ser divertida para as crianças e mais ainda para o professor***, pois ele detém a batuta para levar esta orquestra da melhor maneira possível e não deixar o conjunto desafinar.

Referências Bibliográficas

1. Liping Ma. **Aprender e ensinar matemática elementar**. Ed. Gradiva. 2011.
2. Mosé, Viviane. **A escola e seus desafios contemporâneos**. Ed. Civilização Brasileira, 2013.
3. Ogawa, Yoko. **A fórmula preferida do professor.** Ed. Estação Liberdade. 2017.

CAPÍTULO II – ADIÇÃO COM NÚMEROS NATURAIS

Lourenço Antônio da Cruz Cordeiro

Graduado em LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA pela Universidade Federal do Pará (1997), Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/UFPA (2014). Desde de 1995 atua como professor nas escolas da Rede Pública e Privada da Educação Básica. Atuou também como professor do PARFOR e como tutor da UAB.

Seção 01 – Soma com números de um algarismo

Para que o aluno tenha domínio sobre a operação da adição, é necessário que ele possua desenvoltura com a soma de valores com um único algarismo. Dessa forma, iremos iniciar o nosso estudo verificando algumas regularidades nessas somas que, de certa maneira, tornam-se importantes para o aprendizado do aluno.

Verifique a soma de dois números menores do que ou iguais a 5.

$1+0=1$	$1+1=2$	$1+2=3$	$1+3=4$	$1+4=5$	$1+5=6$
$2+0=2$	$2+1=3$	$2+2=4$	$2+3=5$	$2+4=6$	$2+5=7$
$3+0=3$	$3+1=4$	$3+2=5$	$3+3=6$	$3+4=7$	$3+5=8$
$4+0=4$	$4+1=5$	$4+2=6$	$4+3=7$	$4+4=8$	$4+5=9$
$5+0=5$	$5+1=6$	$5+2=7$	$5+3=8$	$5+4=9$	$5+5=10$

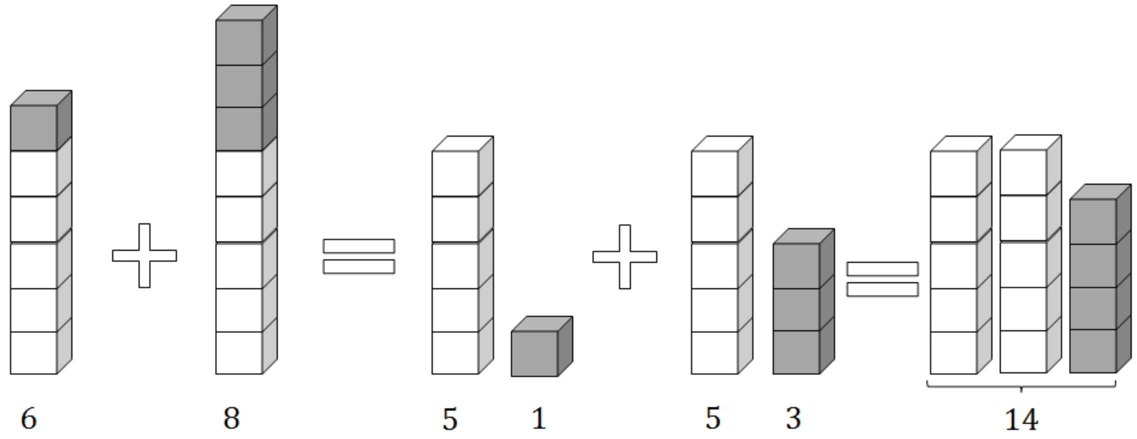
Em todas as adições, exceto na última $(5+5=10)$, a soma sempre deu um número de um algarismo.

Agora, observe a soma de dois números de um algarismo, maiores do que ou iguais a 5.

$5+5=10$	$5+6=11$	$5+7=12$	$5+8=13$	$5+9=14$
$6+5=11$	$6+6=12$	$6+7=13$	$6+8=14$	$6+9=15$
$7+5=12$	$7+6=13$	$7+7=14$	$7+8=15$	$7+9=16$
$8+5=13$	$8+6=14$	$8+7=15$	$8+8=16$	$8+9=17$
$9+5=14$	$9+6=15$	$9+7=16$	$9+8=17$	$9+9=18$

Em todas as adições a soma sempre deu um número de dois algarismos, de forma que podemos fazer analogia com a tabela acima, como exemplo, podemos pensar na soma $6+8$ como a soma $1+3$ com uma dezena a mais no resultado. Veja:

$6+8=$
$(1+5)+(3+5)=$
$(5+5)+(1+3)=$
$10+4=$
14



Percebe-se também que em todas as somas temos:

Se os dois números tiverem a mesma paridade, isso é, eles forem pares ou se os dois forem ímpares, a soma sempre é um número par.

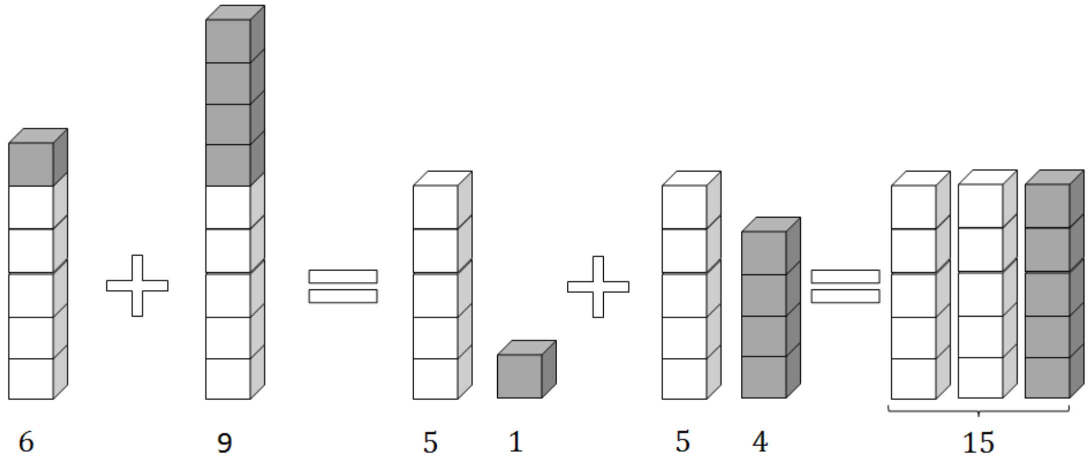
Se os números tiverem paridades diferentes, isso é, um é par e outro ímpar, a soma sempre é um número ímpar.

1ª Situação: Baseado no que foi exposto, efetue as operações:

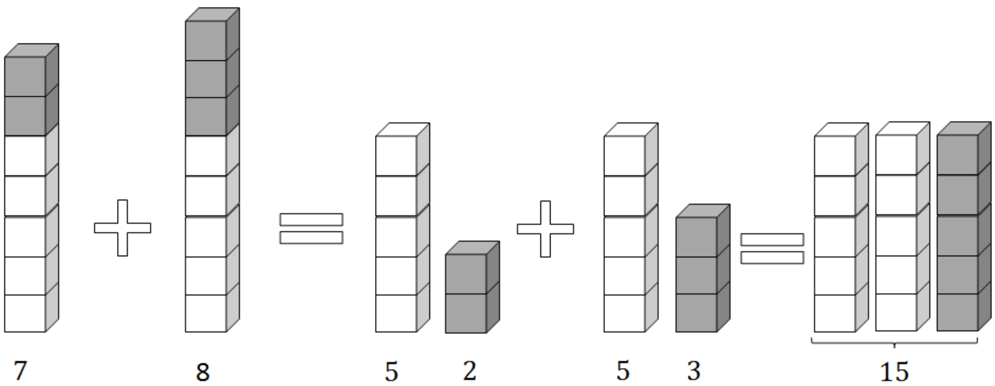
a) $6 + 9 =$
b) $7 + 8 =$
c) $6 + 7 =$

Solução:

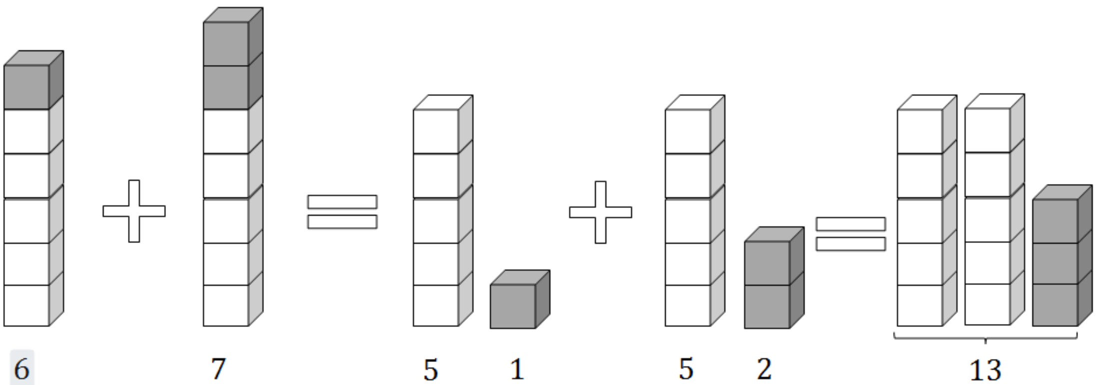
a) $6 + 9 =$
$(5+1)+(5+4)=$
$(5+5)+(1+4)=$
$10+5=$
15



b) $7 + 8 =$
$(5 + 2) + (5 + 3) =$
$(5 + 5) + (2 + 3) =$
$10 + 5 =$
15



c) $6 + 7 =$
$(5 + 1) + (5 + 2) =$
$(5 + 5) + (1 + 2) =$
$10 + 3 =$
13



Seção 02 – Lista de questões

Observe as situações abaixo.

1ª Situação: Em uma caixa havia 17 bolas e outras 8 foram colocadas nela. Quantas bolas há na caixa?

- A ação envolvida no problema é de:
  ACRESCENTAR (   ) **TOTALIZAR (   )**

- Você é capaz de responder mentalmente esse problema?
  SIM (   ) **NÃO (   )**. Se sua resposta foi **SIM** descreva como fez.

____

____

- Como você solucionaria este problema? Além desta forma que você utilizou, você teria outra(s) forma(s) para apresentar esse cálculo? Mostre.

____

____

2ª Situação: No estacionamento de um supermercado há 317 carros e 198 motos. Qual o total de veículos neste estacionamento?

- A ação envolvida no problema é de:
  ACRESCENTAR (   ) **TOTALIZAR (   )**
- Você é capaz de responder mentalmente esse problema?
  SIM (   ) **NÃO (   )**. Se sua resposta foi **SIM** descreva como fez.

____

____

- Como você solucionaria este problema? Além desta forma que você utilizou, você teria outra(s) forma(s) para apresentar esse cálculo? Mostre.

____

____

3ª Situação: Mário é colecionador de selos, ele tinha 3 715 e ganhou de sua prima 1 425 selos. Com quantos selos ele ficou?

- A ação envolvida no problema é de:

  ACRESCENTAR ( ) **TOTALIZAR ( )**
- Você é capaz de responder mentalmente esse problema?

  SIM ( ) **NÃO ( )**. Se sua resposta foi **SIM** descreva como fez.

___

___

___

- Como você solucionaria este problema? Além desta forma que você utilizou, você teria outra(s) forma(s) para apresentar esse cálculo? Mostre.

___

___

___

4ª Situação: Em uma bandeja estão 48 empadas e 35 coxinhas. Ao todo, quantos salgados estão na bandeja?

- A ação envolvida no problema é de:

  ACRESCENTAR ( ) **TOTALIZAR ( )**
- Você é capaz de responder mentalmente esse problema?
- **SIM ( )** **NÃO ( )**. Se sua resposta foi **SIM** descreva como fez.

___

___

___

- Como você solucionaria este problema? Além desta forma que você utilizou, você teria outra(s) forma(s) para apresentar esse cálculo? Mostre.

___

___

___

Seção 03 – Resoluções

Resolveremos a **1ª Situação:**Em uma caixa havia 17 bolas e outras 8 foram colocadas nela. Quantas bolas há na caixa?

A situação envolve uma ação de acrescentar, então podemos fazer:

Reagrupando:

17 + 8 = 15 + 2 + 8
= 15 + 10
= **25**

ou

17 + 8 = (10 + 7) + (5 + 3)
= 10 + 7 + 3 + 5
= 10 + 10 + 5
= **25**

Algoritmo:

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 17\ + \\ \underline{8} \\ 25 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \mathbf{10\ +} \\ \underline{\mathbf{10}} \\ \mathbf{20} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \mathbf{7+} \\ \underline{\mathbf{8}} \\ \mathbf{15} \end{array}$$

Obs.: 15 = 10 + 5

Analisando a **2ª Situação:**No estacionamento de um supermercado há 317 carros e 198 motos. Qual o total de veículos neste estacionamento?

A situação envolve uma ação de <u>totalizar</u>, então podemos fazer:

Reagrupando:

317 + 198 = 315 + 2 + 198
= 315 + 200
= **515**

ou

317 + 198 = 317 + 200 – 2
= 517 – 2
= **515**

Algoritmo:

$$\begin{array}{r} {}^{1\ 1} \\ 3\,1\,7\ + \\ \underline{1\,9\,8} \\ 5\,1\,5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \mathbf{100\ +} \\ \mathbf{300} \\ \underline{\mathbf{100}} \\ \mathbf{500} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \mathbf{10\ +} \\ \mathbf{10} \\ \underline{\mathbf{90}} \\ \mathbf{110} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \mathbf{7\ +} \\ \underline{\mathbf{8}} \\ \mathbf{15} \end{array}$$

Obs.: 15 = 10 + 5 e 110 = 100 + 10

Outras formas:

317 +

<u>198</u>

15 → 7 unidades + 8 unidades

100 → 1 dezena + 9 dezenas

<u>400</u> → 3 centenas + 1 centena

515

317 → 300 + 10 + 7

<u>198 → 100 + 90 + 8</u>

400 + 100 + 15

400 + 100 + 10 + 5

515

Na **3ª Situação:** Mário é colecionador de selos. Ele tinha 3 715 e ganhou de sua prima 1 425 selos. Com quantos selos ele ficou?

A situação envolve uma ação de <u>acrescentar</u>, então podemos fazer:

Reagrupando:

3715 + 1425 = 3700 + 15 + 1400 + 25

= 3700 + 1300 + 100 + 15 + 25

= **5140**

Algoritmo:

1 1				
3 7 1 5 +	**1000 +**	**700 +**	**10 +**	**5 +**
<u>1 4 2 5</u>	**3000**	**<u>400</u>**	**10**	**<u>5</u>**
5 1 4 0	**<u>1000</u>**	**1100**	**<u>20</u>**	**10**
	5000		**40**	

Obs.: 10 = 10 + 0 e 1100 = 1000 + 100

Outras formas:

3715 +

<u>1425</u>

10 → 5 unidades + 5 unidades
30 → 1 dezena + 2 dezenas
1100 → 7 centenas + 4 centenas
<u>4000</u> → 3 unidades de milhar + 1 unidade de milhar
5140

3715 → 3000 + 700 + 10 + 5
<u>1425 → 1000 + 400 + 20 + 5</u>
4000 + 1100 + 30 + 10

4000 + 1000 + 100 + 30 + 10

5000 + 100 + 40

5140

Resolvendo a **4ª Situação:** Em uma bandeja estão 48 empadas e 35 coxinhas. Ao todo, quantos salgados estão na bandeja?

A situação envolve uma ação de totalizar, então podemos fazer:

Reagrupando:

48 + 35 = 48 + 2 + 33
= 50 + 33
= **83**

Algoritmo:

1		
48 +	**10 +**	**8 +**
<u>35</u>	**40**	<u>**5**</u>
83	<u>**30**</u>	**13**
	80	

Obs.: 13 = 10 + 3

Outra forma:

48 +
<u>35</u>
13 → 8 unidades + 5 unidades
<u>70</u> → 4 dezenas + 3 dezenas
83

CAPÍTULO III – SUBTRAÇÃO COM NÚMEROS NATURAIS

Lourenço Antônio da Cruz Cordeiro

Graduado em LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA pela Universidade Federal do Pará (1997), Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/UFPA (2014). Desde de 1995 atua como professor nas escolas da Rede Pública e Privada da Educação Básica. Atuou também como professor do PARFOR e como tutor da UAB.

Seção 01 – Subtração com Algarismos Decimais

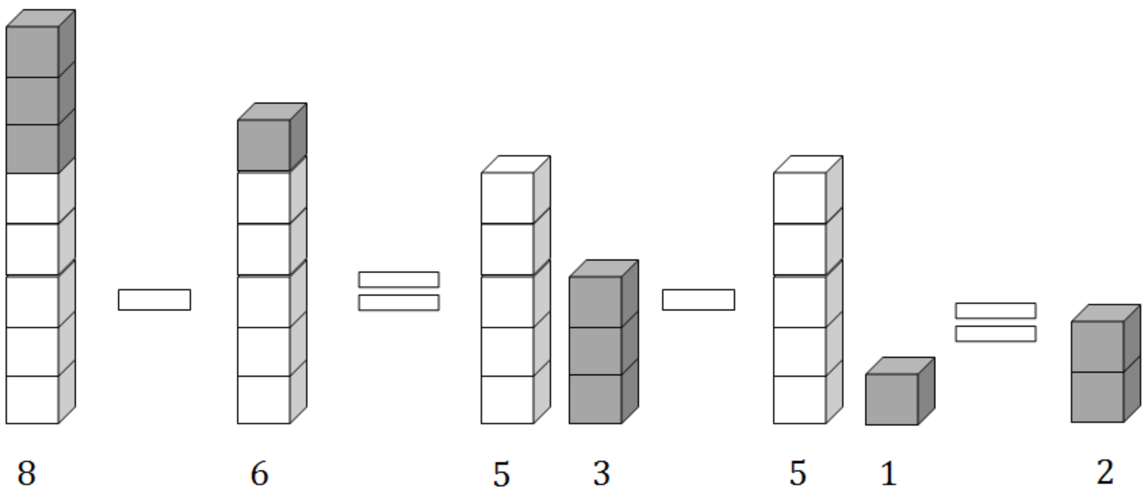
Baseados nos exemplos de introdução do capítulo anterior, em que, sempre que possível, efetuamos as somas de dois números de um algarismo, como uma dezena somada com os excedentes de cinco de cada valor, vamos usar um raciocínio semelhante para a subtração. Veja os exemplos abaixo:

1ª Situação: Efetue as operações:

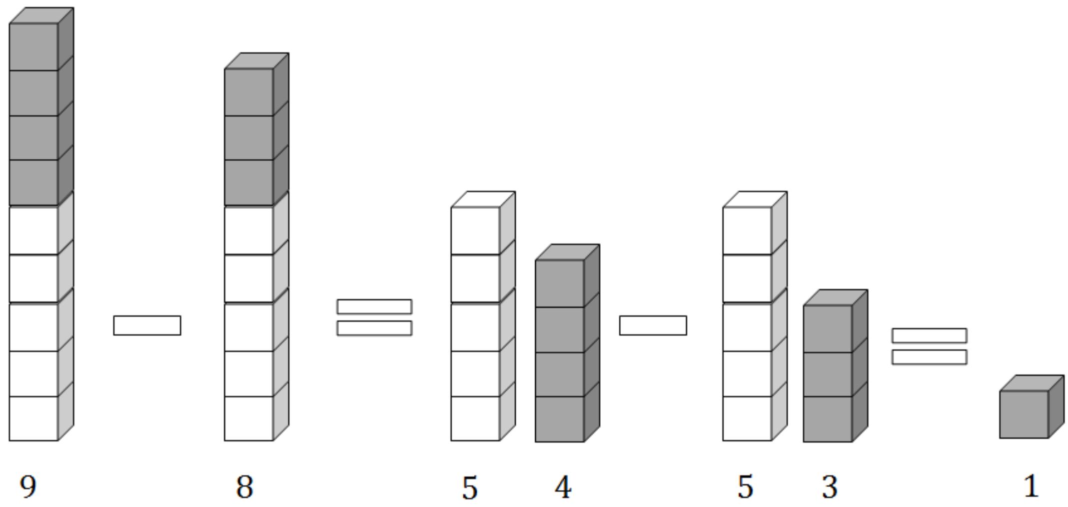
a) 8 – 6 =
b) 9 – 8 =

Solução:

a) $8 - 6 =$
$(5+3)-(5+1)=$
$(5-5)+(3-1)=$
$0+2=$
2



b) $9-8 =$
$(5+4)-(5+3) =$
$(5-5)+(4-3) =$
$0+1 =$
1



Dentro da abordagem sobre subtração, sentimos a necessidade de dar um destaque maior sobre a ***subtração com reagrupamentos,*** pois entendemos que é nesse ponto que encontramos as maiores dificuldades no processo ensino-aprendizagem desse assunto.

Quando iniciamos o ensino da subtração normalmente, mostramos aos alunos que devemos retirar de cada algarismo do minuendo o valor correspondente ao algarismo do subtraendo, como no exemplo abaixo.

$$\begin{array}{r} 68 \\ \underline{45} \\ 23 \end{array} - \begin{cases} subtraimos\ 5\ do\ algarismo\ 8\ e\ encontramos\ 3 \\ \qquad\qquad\qquad depois \\ subtraimos\ 4\ do\ algarismo\ 6\ e\ encontramos\ 2 \end{cases}$$

A estratégia para subtrair do modelo acima não se aplica quando o algarismo do subtraendo for maior que o correspondente no minuendo (por exemplo 45 – 27), aí que surge a necessidade de subtrair com reagrupamentos e junto a essa necessidade percebemos que, para ensinar esse tópico, é necessário que o professor tenha profunda compreensão do sistema de numeração decimal e o nível de conhecimento dele sobre o assunto a ser ensinado será fundamental para o sucesso dessa jornada.

Uma ideia muito difundida nos livros e aulas na educação básica, sobre o ensino dessas subtrações com reagrupamentos é a explicação do ***empréstimo***, ou seja, quando nos deparamos com uma subtração onde o algarismo do subtraendo é maior que o seu correspondente do minuendo, empresta-se uma unidade do algarismo a esquerda daquele que quer se subtrair *transformando* esse algarismo em dez vezes o seu valor. Toda essa abordagem tem sentido quando defrontamos com a ideia do valor relativo de cada algarismo em um número, entretanto, isso quase sempre não fica claro ao aluno, tornando assim, a operação extremamente complexa ao entendimento da criança. Daí temos como sugestão usar o material concreto como o ábaco, o material dourado e matérias recicláveis como tampas de garrafas pet, paus de picolé, etc, e com eles mostrar como se dá a decomposição dos números envolvidos.

Seção 02 – Lista de questões

Observe as situações abaixo:

1ª Situação: Numa sala de aula havia 45 crianças e 23 saíram. Quantas crianças ficaram na sala?

- A ação envolvida no problema é de:

  RETIRAR (   ) COMPARAR (   ) COMPLETAR(   )

- Você é capaz de responder mentalmente esse problema?

  SIM (   ) **NÃO (   )**. Se sua resposta foi **SIM** descreva como fez.

____
____
____

- Como você solucionaria este problema? Além desta forma que você utilizou, você teria uma outra forma para apresentar esse cálculo? Mostre.

____
____
____

2ª Situação: A professora Ana passou 40 exercícios de atividade para casa e já fiz 28. Quantos exercícios ainda faltam resolver para que a atividade fique completa?

- A ação envolvida no problema é de:

  RETIRAR (   ) COMPARAR (   ) COMPLETAR (   )

- Você é capaz de responder mentalmente esse problema?

  SIM (   ) **NÃO (   )**. Se sua resposta foi **SIM** descreva como fez.

___

___

- Como você solucionaria este problema? Além desta forma que você utilizou, você teria uma outra forma para apresentar esse cálculo? Mostre.

___

___

3ª Situação: Durante 6 meses consegui economizar R$ 1500,00 fui ao shopping e gastei R$ 745,00. Quanto sobrou das minhas economias?

___

___

___

- A ação envolvida no problema é de:

RETIRAR (   ) COMPARAR (   ) COMPLETAR (   )

- Você é capaz de responder mentalmente esse problema?

SIM (   ) NÃO (   ). Se sua resposta foi SIM descreva como fez.

___

___

___

- Como você solucionaria este problema? Além desta forma que você utilizou, você teria uma outra forma para apresentar esse cálculo? Mostre.

___

___

___

4ª Situação: Luciano tem 425 bolas de gudes e seu irmão, João, tem 238. Quantas bolas de gudes Luciano têm a mais que João?

- A ação envolvida no problema é de:

  RETIRAR (   ) COMPARAR (   ) COMPLETAR (   )

- Você é capaz de responder mentalmente esse problema?

  SIM (   ) **NÃO (   )**. Se sua resposta foi **SIM** descreva como fez.

- Como você solucionaria este problema? Além desta forma que você utilizou, você teria uma outra forma para apresentar esse cálculo? Mostre.

Seção 03 – Resoluções

Resolveremos a **1ª Situação:** Numa sala de aula havia 45 crianças e 23 saíram. Quantas crianças ficaram no parque?

A situação envolve uma ação de retirar, então podemos fazer:

Reagrupando:

45 – 23 = 45 – 20 – 3

=25 – 3

= **22**

Algoritmo:

45 –	5 –		40 –			
<u>23</u>	<u>3</u>		<u>20</u>			
22	2	+	20	=	22	

Analisando a **2ª Situação:** A professora Ana passou 40 exercícios de atividade para casa e já fiz 28. Quantos exercícios ainda faltam resolver para que a atividade fique completa?

A situação envolve uma ação de completar, então podemos fazer:

Reagrupando:

40 – 28 = 40 – 20 – 8

= 20 – 8

= **12**

ou

40 – 28 = 40 – (30 – 2)
= 10 + 2
= **12**

Algoritmo:

$$\begin{array}{r} {}^{3}4{}^{10}0 - \\ \underline{28} \\ 12 \end{array}$$

- Tira uma unidade de dezena das existentes no minuendo.
- Troca essa unidade de dezena por 10 unidades.

- Realizam-se as subtrações em cada ordem: 10 U – 8 U = 7 U e 3 D – 2 D = 1 D
Obs.: As trocas não alteram o resultado, porque 3 D + 10 U = 40
Outras formas:
40 - 18 Tira uma unidade do minuendo ficando 39.

$$\begin{array}{r} 3\,9 - \\ \underline{2\,8} \\ 1\,1 \end{array}$$

- De 9 unidades tira 8
- De 3 dezenas tira 2
- Para finalizar o resultado, acrescenta a unidade que foi retirada no início:

$$\begin{array}{r} 11 + \\ \underline{1} \\ 1\,2 \end{array}$$

Na **3ª Situação:** Durante 6 meses consegui economizar R$ 1500,00, fui ao shopping e gastei R$ 745,00. Quanto sobrou das minhas economias?

A situação envolve uma ação de retirar, então podemos fazer:

Reagrupando:

1500 – 745 = (1000 + 500) – (750 – 5)

= (1000 – 750) + (500 + 5)

= 250 + 505

= **755**

ou

1500 – 745 = 1500 – 750 + 5 (Usar a ideia de metade)

=750 + 5

= **755**

Algoritmo:

14 0 4 9 10					
1 5 0 0 –	100 –		1400 –		
7 4 5	45		700		
7 5 5	55	+	700	=	755

- Tira uma unidade de centena das existentes no minuendo.

- Troca essa unidade de centena por 10 dezenas.

- Tira uma dezena das dez existentes no minuendo.

- Troca essa dezena por 10 unidades.

- Tira uma unidade da unidade de milhar existente no minuendo.

- Troca essa unidade de milhar por 10 centenas.

- Realizam-se as subtrações em cada ordem:
10 U – 5 U = 5 U; 9 D – 4 D = 5 D e 14 C – 7 C = 7 C.

Obs.: As trocas não alteram o resultado, porque 14 C + 9 D + 10 U = 1500.

Resolvendo a **4ª Situação:** Luciano tem 425 bolas de gudes e seu irmão, João, tem 238. Quantas bolas de gudes Luciano têm a mais que João?

A situação envolve uma ação de comparar, então podemos fazer:

Reagrupando:

425 – 238 = (438 –13) – 238

= 438 – 238 – 13

= 200 – 13

= **187**

ou

425 – 238 = 425 – (225 + 13)
= 425 – 225 – 13
= 200 – 13
= **187**

Algoritmo:

11
3 1 15

425 –	15 –		110 –		300 –	
238	8		30		200	
187	7	+	80	+	100	= 187

- Tira uma unidade de dezena das existentes no minuendo.

- Troca essa dezena por 10 unidades.

- Tira uma centena das dez existentes no minuendo.

- Troca essa centena por 10 dezenas.

- Realizam-se as subtrações em cada ordem: 15 U – 8 U = 7 U; 11 D – 3 D = 8 D e 3 C – 2 C = 1C.

Obs.: As trocas não alteram o resultado, porque 3 C + 11 D + 15 U = 425.

Sessão 04 – Atividades de conclusão*: *Adição e Subtração

1ª Questão: Suzana pretende comprar móveis para dormitório no valor de 3560 reais. Atualmente ela já possui 1325 reais. Quanto falta para ela fazer as compras?

2ª Questão: Paulo recebe mensalmente 5315 reais. Neste mês, ele ganhou uma bonificação de 1218 reais pelo bom desempenho no departamento de vendas onde trabalha. Qual foi o salário dele neste mês?

3ª Questão: Márcia possui 6500 reais em uma caderneta de poupança e 2380 reais em outra. Quantos reais ela possui nas duas cadernetas de poupança?

4ª Questão: Cezar gastou 7000 reais na reforma de sua residência, enquanto Janete gastou 4892 reais em um serviço semelhante. Quantos reais Cezar gastou a mais que a Janete?

5ª Questão: Rita tem 750 selos em sua coleção e deu para sua irmã 345 selos. Com quantos selos Rita ficou?

6ª Questão: Raimundo tem 58 bonequinhos e ganhou 72 de seu tio. Com quantos bonequinhos ele ficou?

7ª Questão: Na UFPA a turma de pedagogia do turno da manhã tem 43 alunos, do turno da tarde 32 e no turno da noite tem 25 alunos. Quantos alunos têm no curso de pedagogia?

8ª Questão: Ao sair de casa, João nota que o marcador de quilometragem de seu carro registra 46422 quilômetros. Quando chega ao trabalho o marcador indica 46 456 quilômetros. Qual a distância entre sua casa e seu local de trabalho?

CAPÍTULO IV – MULTIPLICAÇÃO COM NÚMEROS NATURAIS

Dionísio José da Costa Sá

Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional no Instituto de Ciências Exatas e Naturais – UFPa, é professor Adjunto I da Universidade da Amazônia – UNAMA, tendo ministrado diversas disciplinas de Matemática nos cursos de Engenharias Civil, Elétrica, Mecânica e de Produção assim como no curso de Ciências da Computação, também ministra aulas de matemática na educação básica nas redes privada e pública de Belém do Pará

Seção 01 – Lista de questões

Inicialmente iremos propor uma série de questões sobre o assunto a ser abordado contemplando as diversas variantes a serem discutidas no capítulo.

- Resolva cada questão descrevendo como fariam para ensinar os alunos tais assuntos.

1ª Situação: Efetue as multiplicações

a) 45×3
b) 287×10
c) 34×100
d) 40×1000
e) 423×20
f) 142×300
g) 40×700
h) 340×4000
i) 18×19
j) 23×29
k) 34×17
l) 984×72
m) 454×204

2ª Situação: Para promover a venda de uma televisão, o cartaz anuncia:

- **A prazo: 4 vezes de R$125,00.**

Quanto pagará pela compra da televisão?

3ª Situação: O verão está chegando e a procura pelas praias do Nordeste brasileiro é intensa. Preparando-se para uma excursão para a referida região, Mariana, Vinícius, Leandra e Daniela, depositaram dinheiro em uma caderneta de poupança. Mariana já depositou $R\$\ 325{,}00$. Vinícius depositou o dobro da quantia depositada por Mariana. Leandra depositou o triplo da quantia de Mariana, e Daniela, o quádruplo da quantia de Mariana.
Qual a quantia de que eles já dispõem para tal excursão?

4ª Situação: Dois comerciantes compraram mercadorias de uma fábrica. O 1º comprou 20 aparelhos eletrônicos ao preço de R$ 978,00 cada um. O 2º comprou 26 filmadoras ao preço de R$ 796,00 cada um. Qual deles gastou mais?

5ª Situação: Mariana possui em seu guarda roupa 4 blusas e 3 calças. De quantas formas diferentes Mariana pode se vestir para um encontro, usando uma calça e uma blusa?

Seção 02 – Estudo da tabuada.

Propomos a construção de uma tabuada através de uma tabela de dupla entrada (também chamada de *Tábua de Pitágoras*) como veremos logo abaixo, ela será usada nos primeiros momentos pelos alunos até que, pela utilização constante desse recurso, acabem memorizando. Essa ruptura na forma de pensar como se aprender a tabuada, ainda hoje provoca resistência entre os professores, entretanto, ratificando o que foi dito temos segundo Smole (2013, p.39) que:

> À medida que a criança realizar as atividades sobre multiplicação, ela vai, automaticamente, aprendendo alguns resultados sem precisar olhar na tabela e perceberá que isso lhe proporcionará maior agilidade nos cálculos escritos e mentais.

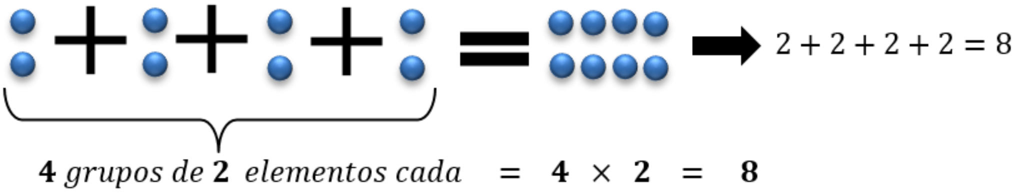
Sugerimos que ao invés de apresentarmos, aos alunos, a tabela pronta é importante que ela seja construída junto com eles,

É necessário que o aluno compreenda que cada célula da tabela referente ao cruzamento de uma linha com uma coluna será igual ao produto encontrado pelo número da linha pelo número da coluna

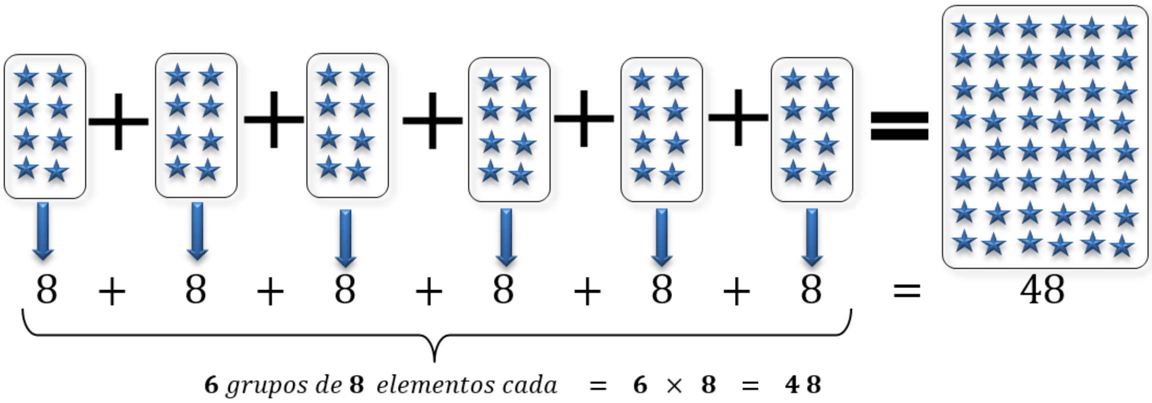
No preenchimento da tabela poderíamos sugerir a seguinte **sequência de aprendizagem**:

- ✓ Devemos mostrar que, a priori, multiplicar é o mesmo que somar parcelas iguais, vejamos os exemplos abaixo.

Exemplo 01:



Exemplo 02:



Assim, como nos exemplos acima, o professor poderá sugerir outras atividades, partindo sempre do concreto, para que o aluno possa compreender a operação da multiplicação, em primeira instância, como a soma de parcelas iguais.

- ✓ Vamos, agora, montar a tabuada. Primeiramente criamos uma tabela com 11 linhas e 11 colunas, e na primeira linha e primeira coluna preenchemos com os símbolos $\times$, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10. Esses símbolos serão os **fatores** da multiplicação, a partir da segunda linha e segunda coluna dessa tabela você irá, juntamente com seus alunos, preencher com os **produtos** dessas multiplicações de acordo com os seguintes exemplos:

    - Na célula referente à 2ª linha e 2ª coluna da tabela, ficará o produto entre 1 e 1, ou seja, $1 \times 1 = 1$.
    - Na célula referente à 5ª linha e 7ª coluna da tabela, ficará o produto entre 4 e 6, isto é $4 \times 6 = 24$, e assim por diante (Veja a imagem abaixo)

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2										
3										
4						24				
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Fatores

Produtos

Fatores

Produtos

- ✓ No momento em que você for preencher essa tabela, é interessante que juntamente com seus alunos seja evidenciado algumas regularidades que nela irão aparecer. Sugerimos algumas dessas características abaixo.

  - Na linha e coluna referente aos produtos onde um dos fatores é o número 1 (2ª linha e 2ª coluna da tabela) observamos que aparecerá a sequência dos números naturais de 1 até 10. É interessante nesse momento comentar e mostrar que todo número natural multiplicado por 1 é igual ao próprio número, pois o **1 é o Elemento Neutro da Multiplicação.** (Veja a imagem)

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2									
3	3									
4	4									
5	5									
6	6									
7	7									
8	8									
9	9									
10	10									

Fatores

Produtos

Fatores

Produtos

- Quando multiplicamos por 2 (3ª linha e 3ª coluna), obtemos a sequência dos números pares.

- Quando multiplicamos por 4 (5ª linha e 5ª coluna), os valores obtidos são o dobro dos obtidos na multiplicação por 2.

- Quando multiplicamos por 8 (9ª linha e 9ª coluna), os valores obtidos são o dobro dos obtidos na multiplicação por 4 e o quádruplo dos valores obtidos na multiplicação por 2. (Veja a imagem)

- Vale também ressaltar que já é possívelverificar, nessas operações feitas, que essa **multiplicação é comutativa**, pois temos alguns resultados obtidos que já podem sugerir aos alunos tal propriedade, como poderemos analisar, com a turma, tomando como referência os exemplos abaixo.
    - $2 \times 4 = 4 \times 2 = 8$
    - $2 \times 8 = 8 \times 2 = 8$
    - $4 \times 8 = 8 \times 4 = 32$

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		2		4				8		
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3		6		12				24		
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5		10		20				40		
6		12		24				48		
7		14		28				56		
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9		18		36				72		
10		20		40				80		

Fatores

Produtos

Fatores

Produtos

- Quando multiplicamos por 3 (4ª linha e 4ª coluna), os valores obtidos são números que se somarmos os algarismos de cada produto encontramos 3, 6 ou 9.

- Quando multiplicamos por 6 (7ª linha e 7ª coluna), os valores obtidos são o dobro dos obtidos na multiplicação por 3. Percebemos que todos os valores obtidos são pares, logo são divisíveis por 2 e a soma dos algarismos de cada produto encontrado é igual a 3, 6, 9 ou 12, logo são também divisíveis por 3.

- Quando multiplicamos por 9 (10ª linha e 10ª coluna), os valores obtidos são o triplo dos obtidos na multiplicação por 3 e a soma dos algarismos de cada produto encontrado é igual a 9, logo são também divisíveis por 3. (Veja a imagem)

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1			3			6			9	
2			6			12			18	
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4			12			24			36	
5			15			30			45	
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7			21			42			63	
8			24			48			72	
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10			30			60			90	

Fatores

Produtos

Fatores

Produtos

- Quando multiplicamos por 5 (6ª linha e 6ª coluna), os valores obtidos são números que terminam em 0 ou 5.

- Quando multiplicamos por 10 (11ª linha e 11ª coluna), os valores obtidos terminam sempre com o algarismo 0.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1					5					10
2					10					20
3					15					30
4					20					40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6					30					60
7					35					70
8					40					80
9					45					90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fatores

Produtos

Fatores

Produtos

- Percebemos que todos as multiplicações envolvendo pelo menos um número par tem como produto um número par.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fatores

Produtos

Fatores

Produtos

✓ Imaginamos que nas séries iniciais, quando o aluno começa a se familiarizar com a operação da multiplicação, devemos utilizar uma tabela com as multiplicações de 1 até 5 e só depois expandir para 10.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fatores
Produtos
Fatores
Produtos

- ✓ Com a tabela de multiplicação de dupla entrada você pode trabalhar com seus alunos algumas propriedades da multiplicação como:

  - ***Propriedade Comutativa***

    - Peça aos seus alunos que verifiquem o valor obtido na multiplicação do número 5 da linha (horizontal) com o número 4 da coluna (vertical)

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

    - Agora, faça o contrário, verifique o valor obtido na multiplicação do número 4 da linha (horizontal) com o número 5 da coluna (vertical).

    - Após as duas etapas realizadas pergunte a classe o que eles observaram.

$$5 \times 4 = 20$$

$$4 \times 5 = 20$$

- Faça outras operações até que eles realmente entendam a propriedade comutativa

Propriedade Associativa

- Escolha dois números na tabela de tal sorte que o produto entre eles não ultrapasse **10 unidades**, por exemplo, o número 3 (4ª linha) e o número 2 (3ª coluna).

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

- Agora localize o valor obtido, ou seja, o número 6 (7ª linha) e multiplique por 4 (5ª coluna)

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

- Logo temos: $(3 \times 2) \times 4 = 24$

- Agora faça 2×4, na tabela será 2 (3ª linha) com 4 (5ª coluna).

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

- Agora multiplique 3 (4ª linha) pelo produto obtido anteriormente $2 \times 4 = 8$ (localizado na 9ª coluna)

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

- Então teremos: $3 \times (2 \times 4) = 24$
- Estimule o aluno a perceber que:

- $\begin{cases} (3 \times 2) \times 4 = 24 \\ 3 \times (2 \times 4) = 24 \end{cases} \Rightarrow (3 \times 2) \times 4 = 3 \times (2 \times 4)$

- Refaça esse procedimento com outros valores tomando sempre o cuidado para que os produtos parciais sejam sempre menores do que, ou iguais, a **10**

Curiosidades com a tabuada

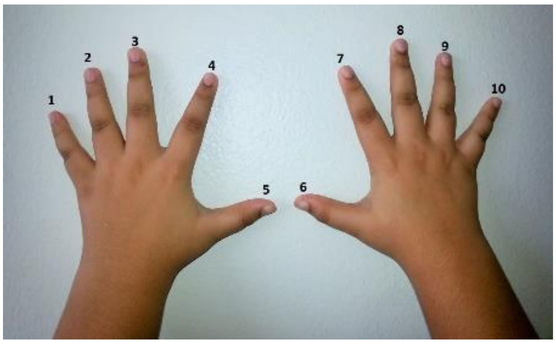
- Tabuada de 9 com as mãos

Após a montagem da tabuada dos 9, faça os alunos perceberem que, como já foi dito antes, a soma dos algarismos dos produtos é sempre igual a 9, além disso é interessante que eles notem que nessa tabuada os algarismos das dezenas aparecem seguindo a sequência dos algarismos de 0 até 9, já os algarismos das unidades se apresentam na ordem inversa, isto é, de 9 até 0.

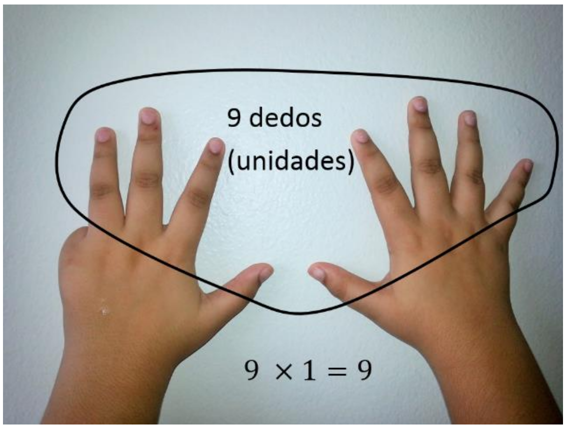
Veja:

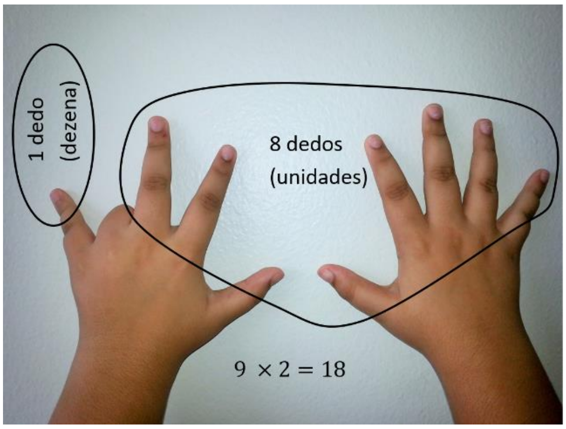
$$9 \times 1 = \mathbf{09}$$
$$9 \times 2 = \mathbf{18}$$
$$9 \times 3 = \mathbf{27}$$
$$9 \times 4 = \mathbf{36}$$
$$9 \times 5 = \mathbf{45}$$
$$9 \times 6 = \mathbf{54}$$
$$9 \times 7 = \mathbf{63}$$
$$9 \times 8 = \mathbf{72}$$
$$9 \times 9 = \mathbf{81}$$
$$9 \times 10 = \mathbf{9}$$

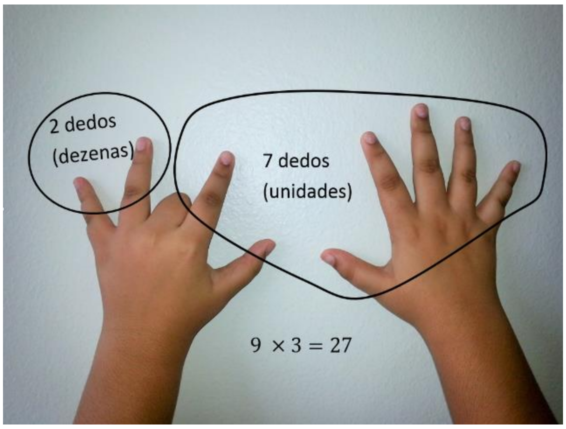
Sugerimos também, mostrar essa tabuada de forma lúdica usando para isso os dedos das mãos. Para começar coloque na sua frente as suas mãos com os dedos esticados. Cada um dos dedos a partir da mão esquerda corresponderá a um número a ser multiplicado por 9 conforme a imagem abaixo.

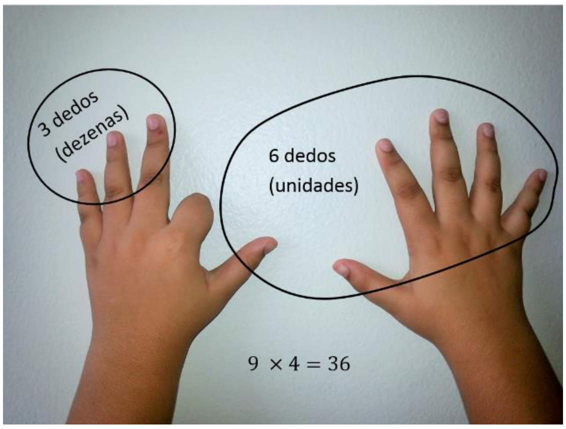


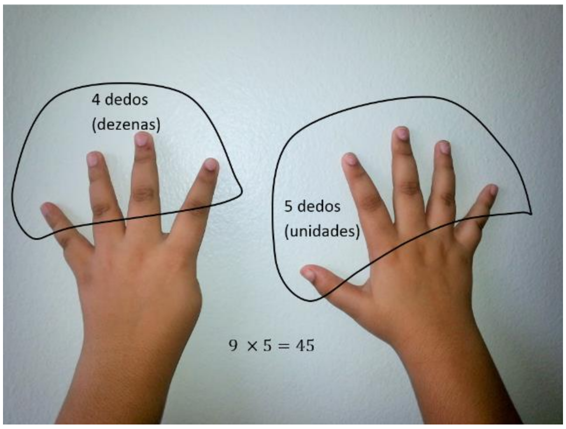
Para efetuarmos a multiplicação, basta baixar o dedo correspondente ao valor que você quer multiplicar por 9, a quantidade de dedos que ficarão à esquerda daquele que você baixou irá representar o algarismo das dezenas e a quantidade de dedos restantes à direita representarão os algarismos das unidades. Veja nas imagens abaixo.

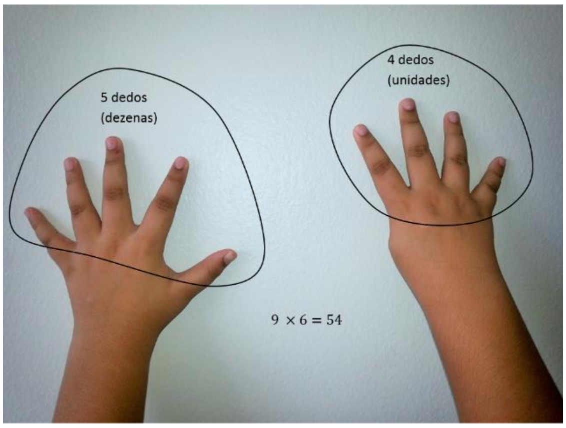


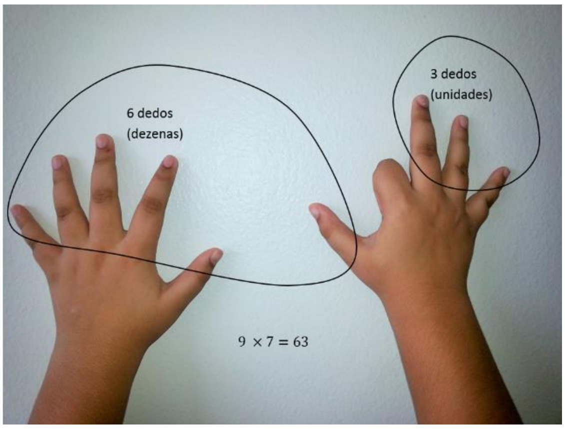


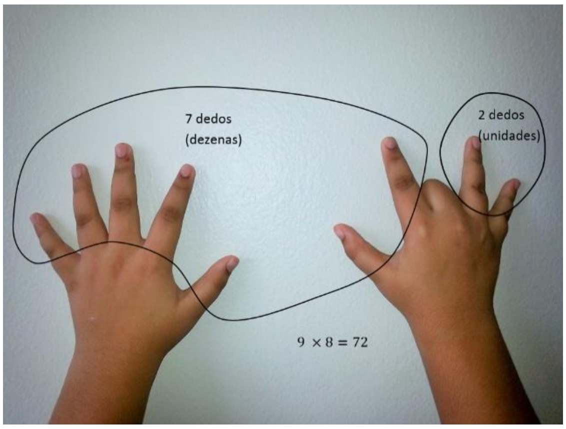


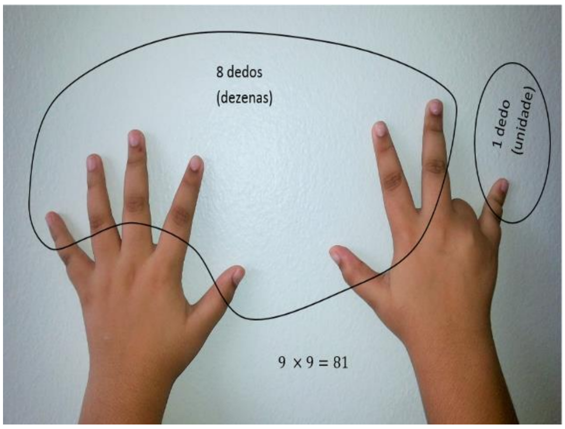


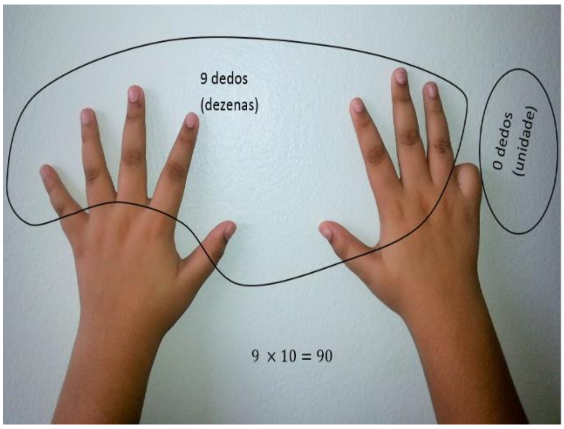










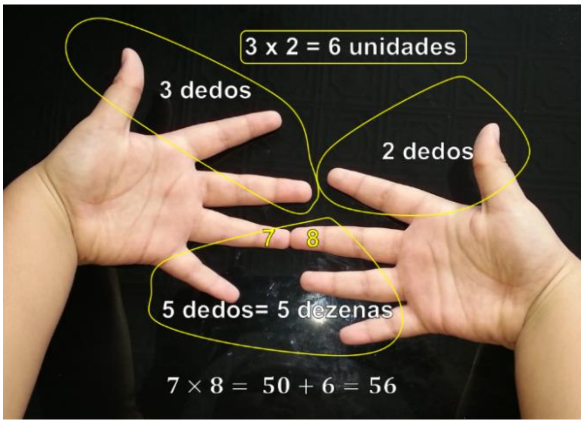


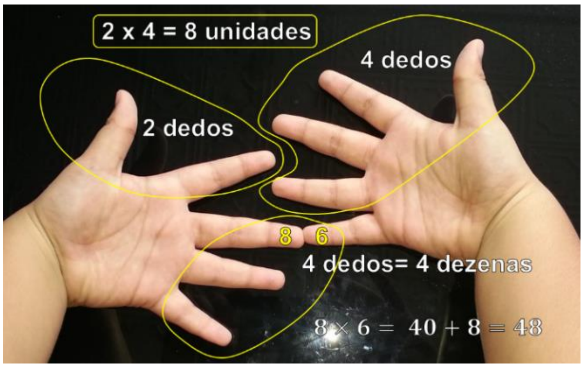
- Tabuadas de 6, 7, 8 e 9 na ponta dos dedos

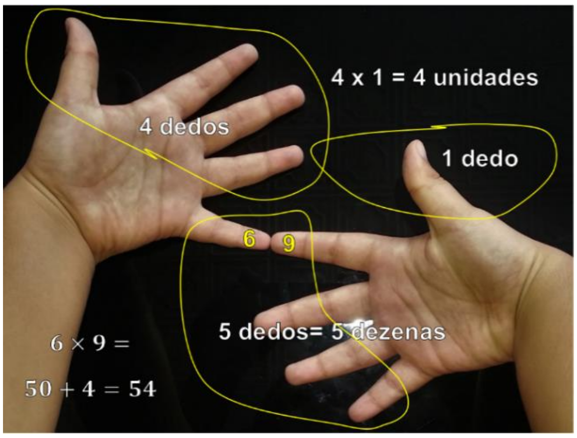
Uma outra maneira lúdica que o professor pode apresentar as tabuadas de 6, 7, 8 e 9 aos alunos, seria usando novamente os dedos das mãos, para isso seria necessário inicialmente numerar os dedos conforme a figura abaixo.

Para resolvermos uma multiplicação envolvendo dois números entre 6, 7, 8, 9 ou 10 devemos proceder da seguinte forma:

1º - Devemos escolher os números que serão multiplicados;
2º - tocamos os dedos que representam os números que queremos multiplicar;
3º - agora, contamos todos os dedos que se tocaram ou que ficaram abaixo desses, o número encontrado será correspondente ao algarismo das dezenas
4º - finalmente, contamos quantos dedos em cada mão ficam acima daqueles que se tocam; os valores obtidos devem ser multiplicados e depois somados com as dezenas já obtidas, o valor resultante será o produto desejado, veja os exemplos abaixo:

Exemplo 01: 

Exemplo 02: 

Exemplo 03: 

Seção 03: Métodos de efetuar uma multiplicação

Nessa etapa vamos utilizar alguns itens da 1ª questão da lista de exercícios para mostrar a diversas maneiras de se multiplicar dois números naturais. Vale ressaltar que de acordo com **Liping Ma, 2009** os professores pesquisados por ela, admitiam que muitos alunos do sexto ano ao multiplicar números com vários algarismos recaiam em um erro comum, posicionavam erradamente os algarismos referentes aos diversos produtos parciais como no exemplo abaixo:

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times\, 645 \\ \hline 615 \\ 492 \\ 738 \\ \hline 1845 \end{array}$$

Pensando que esse erro também pode ser recorrente com nossos alunos propomos que a abordagem seja feita inicialmente centrada nas propriedades.

1ª forma: Uso da propriedade distributiva

- ✓ Tomaremos como exemplos os seguintes cálculos:
  - 45×3
  - 984×72
  - 18×19

Primeiramente faremos 45×3

$$45 \times 3 = \underbrace{(40 + 5) \times 3}_{\text{Propriedade Distributiva}}$$

$$\begin{array}{r} 40 \times \\ 3 \\ \hline\hline 120 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{r} 5 \times \\ 3 \\ \hline\hline 15 \end{array} \quad \text{assim teremos} \quad \begin{array}{r} 120 + \\ 15 \\ \hline\hline 135 \end{array}$$

É interessante após o uso de propriedade distributiva, reescrevê-la em colunas:

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 45 \times \\ 3 \\ \hline 135 \end{array}$$

Agora iremos mostrar 984×72

Propomos o uso da propriedade distributiva em duas situações

1ª situação

$$984 \times 72 = \underbrace{(900 + 80 + 4) \times (70 + 2)}_{\text{Propriedade distributiva}}$$

Assim teremos:

$$\begin{array}{r} 900 \times \\ 70 \\ \hline 63.000 \end{array} \quad \begin{array}{r} 80 \times \\ 70 \\ \hline 5.600 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \times \\ 70 \\ \hline 280 \end{array} \quad \begin{array}{r} 900 \times \\ 2 \\ \hline 1.800 \end{array} \quad \begin{array}{r} 80 \times \\ 2 \\ \hline 160 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \times \\ 2 \\ \hline 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r l}
63.000 & \\
5.600 & + \\
280 & \\
1.800 & \quad \text{ou seja } 984 \times 72 = 70.848 \\
160 & \\
8 & \\
\hline
70.848 &
\end{array}$$

2ª situação

$$984 \times 72 = \underbrace{(984) \times (70 + 2)}_{\text{Propriedade distributiva}}$$

$$\begin{array}{r l}
984 & \times \\
70 & \\
\hline
68.800 &
\end{array}
\qquad\qquad\qquad
\begin{array}{r l}
984 & \times \\
2 & \\
\hline
1.968 &
\end{array}$$

Somando as duas parcelas, temos:

$$\begin{array}{r l}
68.880 & + \\
1.968 & \\
\hline
70.848 &
\end{array}$$

Rescrevendo a operação acima em colunas temos:

$$\begin{array}{c} fazendo \\ 984 \times 2 \end{array}
\left\{
\begin{array}{r l}
1 \quad & \\
984 & \times \\
72 & \\
\hline
1.968 &
\end{array}
\right.
\qquad\qquad
\begin{array}{c} fazendo\ agora \\ 984 \times 70 \end{array}
\left\{
\begin{array}{r l}
1 \quad & \\
984 & \times \\
72 & \\
\hline
1.968 & \\
68.880 &
\end{array}
\right.$$

$$\begin{array}{c} somando\ as \\ parcelas\ obtidas \end{array}
\left\{
\begin{array}{r l}
1 \quad & \\
984 & \times \\
72 & \\
\hline
1.968 & \\
68.880 & \\
\hline
70.848 &
\end{array}
\right.$$

Por fim, vamos fazer 18×19

Poderíamos ter pensado em resolver essa multiplicação usando o cálculo mental, para isso deveríamos, para facilitar nossa tarefa, pensar da seguinte maneira:

$$18 \times 19 = \underbrace{18 \times 20 - 18 \times 1}_{\text{Uso da Prop. distributiva}},$$

$$\begin{array}{r} 18\,\times \\ 20 \\ \hline 360 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 18\,\times \\ 1 \\ \hline 18 \end{array}$$, agora só resta subtrair $$\begin{array}{r} 360\,- \\ 18 \\ \hline 342 \end{array}$$

Reescrevendo a operação acima em colunas temos:

$$\begin{array}{c} fazendo \\ 532 \times 5 \end{array} \left\{ \begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1}\;\; \\ 532 \;\; \times \\ 125 \;\;\;\; \\ \hline 2660 \;\;\;\; \end{array} \right.$$

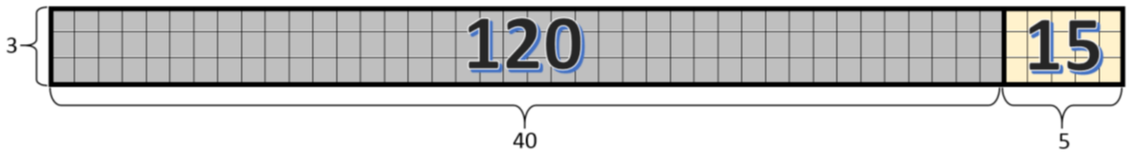
$$\begin{array}{c} fazendo\ agora \\ 532 \times 20 \end{array} \left\{ \begin{array}{r} 532 \;\; \times \\ 125 \;\;\;\; \\ \hline 2660 \;\;\;\; \\ 10640 \;\;\;\;\;\; \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c} Por\ fim, fazendo \\ 532 \times 100 \end{array} \left\{ \begin{array}{r} 532 \;\; \times \\ 125 \;\;\;\; \\ \hline 2660 \;\;\;\; \\ 10640 \;\;\;\;\;\; \\ 53200 \;\;\;\;\;\; \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c} somando\ as \\ parcelas\ obtidas \end{array} \left\{ \begin{array}{r} 532 \;\; \times \\ 125 \;\;\;\; \\ \hline 2660 \;\; + \\ 10640 \;\;\;\;\;\; \\ 53200 \;\;\;\;\;\; \\ \hline 66500 \;\;\;\;\;\; \end{array} \right.$$

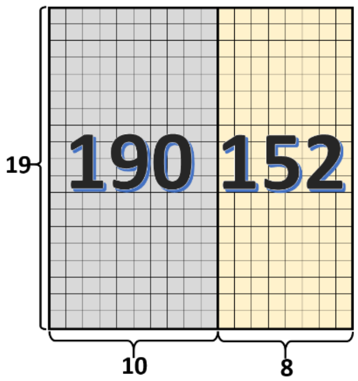
2ª forma: Uso da malha quadriculada

Iremos mais uma vez começar por 45×3



Logo $45 \times 3 = 120 + 15 = 135$

Faremos agora 19×18



$$\begin{array}{r} 19 \;\times \\ 10 \\ \hline 190 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 19 \;\times \\ 8 \\ \hline 152 \end{array}$$ logo, teremos: $$\begin{array}{r} 19 \;\times \\ 18 \\ \hline 152 \\ 190 \\ \hline 342 \end{array}$$

Nas multiplicações entre 984×72 e 532×125, o uso da malha quadriculada (para números tão grandes) é algo que a torna inviável fazer.

3ª forma: Cruzamento de retas

Nesse modelo devemos inicialmente usar diferentes formas de se desenhar retas para representar as unidades, dezenas, centenas, etc. No caso do nosso material que será todo produzido em duas cores, iremos usar retas para representar as unidades, as dezenas e as centenas e iremos diferenciá-las pelas suas espessuras, mas em sala de aula, com os alunos, seria interessante usarmos cores diferentes para efetuarmos essas diferenças.

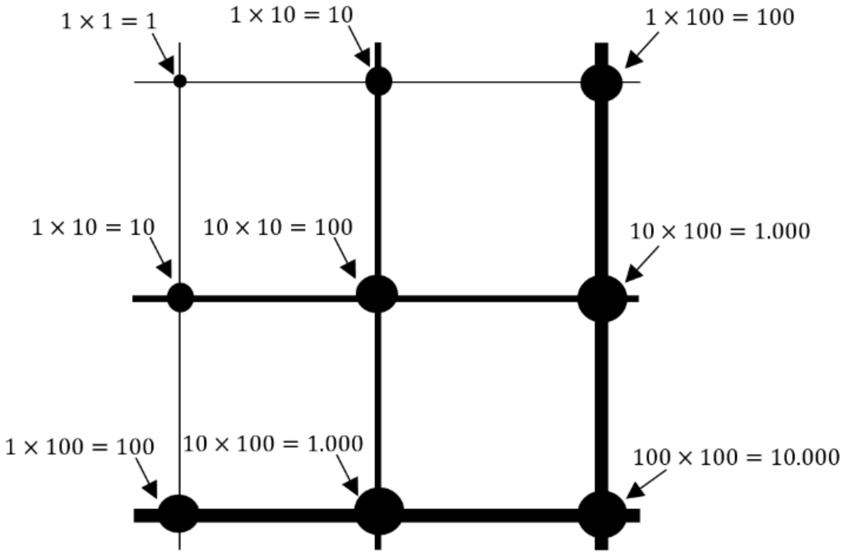
Assim teremos as seguintes legendas:

Representa as unidades

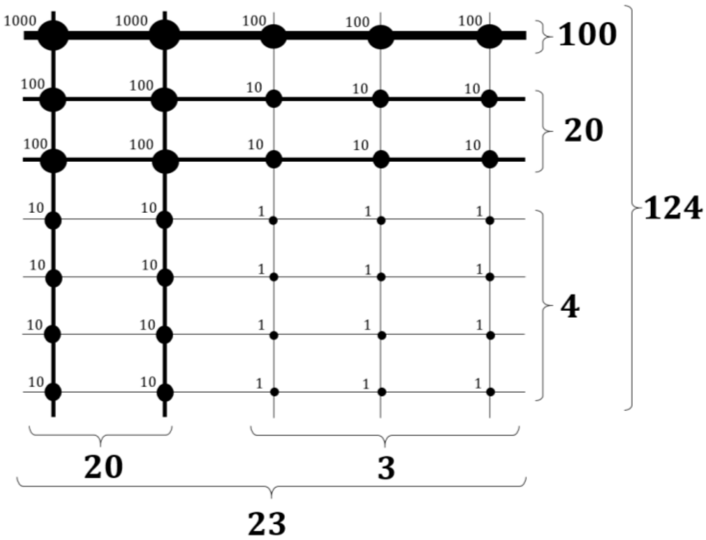
Representa as dezenas

Representa as centenas

Basicamente esse método é baseado no mesmo princípio da malha quadriculada, nele iremos cruzar as retas e cada encontro representará um produto entre os valores que elas representam, como veremos no exemplo a seguir.



Vamos então, resolver o seguinte produto 124×23



$$124 \times 23 = \begin{cases} 2 \times 1.000 = 2.000 \\ 7 \times 100 = \quad 700 \\ 14 \times 10 = \quad 140 \; + \\ 12 \times 1 = \quad \underline{\;\;12} \\ \qquad\qquad 2,852 \end{cases}$$

4ª forma: Gelosia ou método da grade

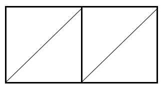
Outro método para efetuarmos multiplicações é o que chamamos de Gelosia ou método da grade. Ele era conhecido pelos árabes e, provavelmente, como fizeram com os algarismos que usamos hoje, eles se apropriaram deste conhecimento através dos hindus.

Esse é um processo que se assemelha muito ao que comumente usamos hoje, entretanto, como cada multiplicação entre dois algarismos é escrito em uma grade com espaço para as unidades e dezenas, não se faz necessário o transporte de um valor para a ordem superior, o famoso *“vai um, vai dois, etc.”*

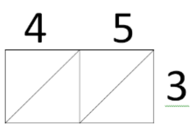
Gelosia é um diagrama em rede ou grade onde as adições se efetuam diagonalmente. Segundo Eves (2008) esse era o método mais utilizado pelos árabes nos séculos XV e XVI, por esse motivo chegou até a Europa Ocidental e, se não fosse pela fato de a cada multiplicação ter a necessidade de se desenhar uma rede de segmentos de reta ou grade, o método poderia, até hoje, ser muito usado.

Como forma de ilustrar o método, vamos inicialmente efetuar a multiplicação entre 45 e 3.

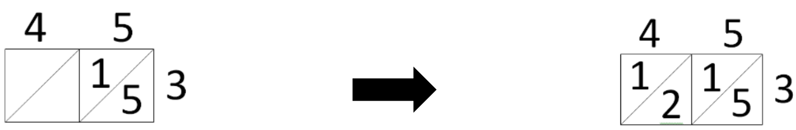
Inicialmente vamos construir uma grade 2 x 1, já que os fatores têm 2 e 1 algarismos, dividimos cada quadrado por uma diagonal crescente.



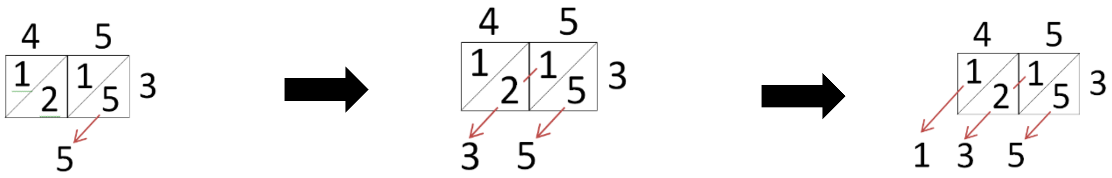
Escrevemos o fator 45 logo acima da grade horizontalmente, dispondo cada algarismo sobre um quadrado. Em seguida, escrevemos o algarismo do segundo fator ao lado direito verticalmente, de modo que o algarismo 3 fique ao lado do quadrado.



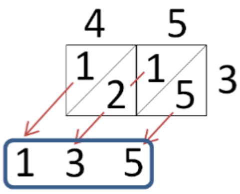
Agora, vamos multiplicando os algarismos dos fatores, dois a dois e vamos registrando os resultados na grade.



Após todas as multiplicações parciais vamos somar os algarismos de cada diagonal começando pela diagonal da direita.

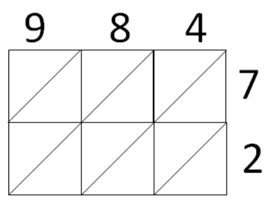


Daí chegamos ao resultado.

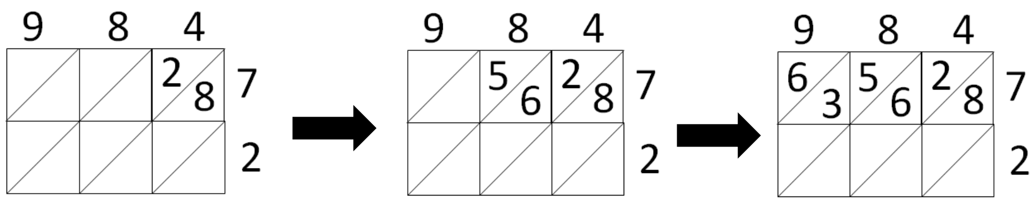


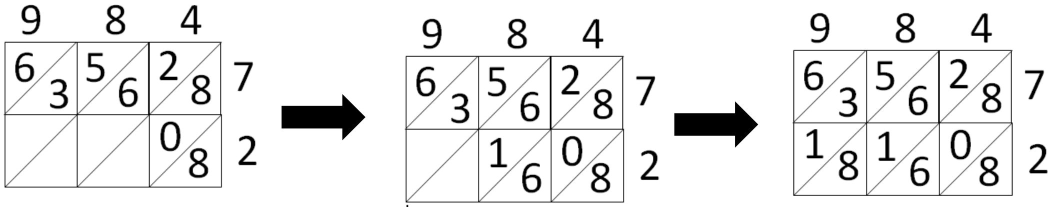
Agora iremos mostrar como multiplicar 984×72 usando o método da grade

Escrevemos os dois fatores na grade

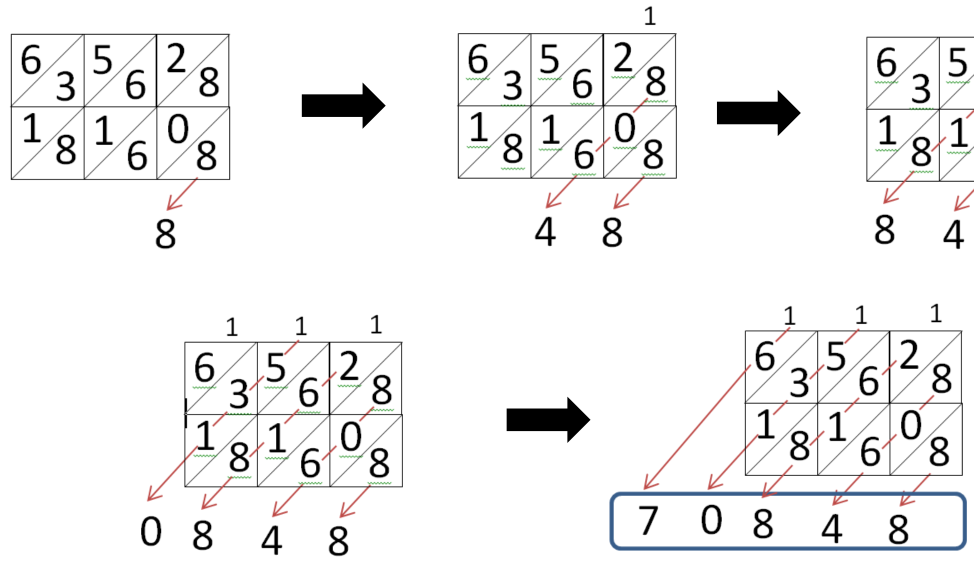


Agora, vamos multiplicando os algarismos dos fatores, dois a dois e vamos registrando os resultados na grade.





Após todas as multiplicações parciais, vamos somar os algarismos de cada diagonal começando pela diagonal da direita.



É também bastante interessante sugerir aos alunos que resolvam multiplicações as quais apresentem dígitos escondidos. Veja:

Na multiplicação abaixo qual deve ser o valor do algarismo representado por ■?

$$\begin{array}{r} 4\,\blacksquare\ \times \\ 4 \\ \hline 192 \end{array}$$

Os produtos entre dois números de um algarismo, onde um é o 4 e produto tem no algarismo das unidades o valor 2 é $4 \times 3 = 12$ ou $4 \times 8 = 32$, logo o valor do algarismo ■ só pode ser 3 ou 8. Logo só falta experimentar as duas possibilidades e verificar qual delas é a correta.

$$\begin{array}{r} ^{1} \\ 4\,3\ \times \\ 4 \\ \hline 172 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} ^{3} \\ 4\,8\ \times \\ 4 \\ \hline 192 \end{array}$$

Daí, conclui-se que o algarismo procurado vale 8.

Seção 04: Resolução de problemas

Na resolução de problemas é importante que o professor possa habilitar o aluno a compreender os dois tipos de problemas multiplicativos, os que envolvem repetições sucessivas e os que envolvem raciocínio combinatório.

Vamos analisar dois problemas propostos na seção 1.

2ª Situação: Para promover a venda de uma televisão, o cartaz anuncia:

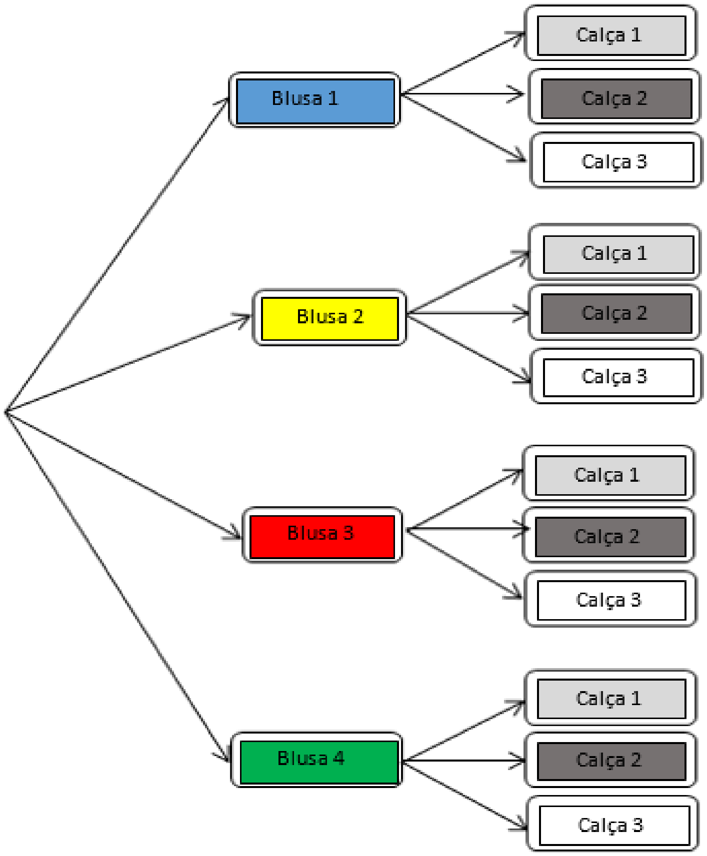
- **A prazo: 4 vezes de R$125,00.**

Quanto pagará pela compra da televisão?

$$4\ vezes\ de\ 125\ reais = 4 \times 125 = 125 + 125 + 125 + 125 = 500\ reais$$

Nesse exemplo temos um problema que envolve as repetições sucessivas.

5ª Situação: Mariana possui em seu guarda roupa 4 blusas e 3 calças. De quantas formas diferentes Mariana pode se vestir para um encontro, usando uma calça e uma blusa?



Nesse exemplo, temos um problema que envolve raciocínio combinatório.

CAPÍTULO V – DIVISÃO COM NATURAIS

Fernando Roberto Braga Colares

Mestre pelo programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT/UFPA, Especialista em Matemática da Educação Básica e Ensino de Física pela Universidade Federal do Pará (UFPA), Licenciado pleno em Matemática pela Universidade do Estado do Pará (UEPA) e Licenciado em Física pela Universidade Federal do Pará (UFPA); atualmente atua como professor da educação básica nas redes públicas e privadas e em nível superior, como colaborador eventual, no programa de formação de professores do MEC/CAPES PARFOR-UFPA e na Faculdade Ipiranga.

Seção 01 – Lista de questões

Observe os problemas abaixo. Como você resolveria estes problemas? Como você ensinaria seu aluno a resolver?

1ª Situação: Um professor de educação Física vai promover um campeonato de futebol na sua escola, e 75 alunos vão participar deste campeonato. Em cada time é preciso ter 8 jogadores, então quantos times haverá ao todo neste campeonato?

2ª Situação: Em certo mês a produção de uma pequena granja foi de 3648 ovos. Quantas dúzias podem ser formadas com a produção deste mês?

3ª Situação: Dona Lúcia possui 40 bombons que pretende distribuir, igualmente, para seus seis netos. Quantos bombons cada neto receberá?

4ª Situação: João dividiu as 136 petecas que adquiriu durante a juventude, entre seus quatro filhos. Quantas petecas cada filho recebeu?

Note que as questões tratam de divisões com elementos que não devem ser fracionados daí a caracterização da utilização do conjunto dos números naturais. Perceba que as situações já sugerem a divisão igualitária reforçando a definição.

Segundo Moreira (2002) os principais argumentos que levaram Vergnaud ao conceito de campos conceituais foram:

- Um conceito não se forma dentro de um só tipo de situação;
- Uma situação não se analisa com um só conceito;
- A construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação é um processo de muito fôlego, que se estende ao longo dos anos, às vezes uma dezena de anos, com analogias e mal-entendidos entre situações, entre concepções, entre procedimentos, entre significantes.

Neste capítulo, temos como objetivo analisar as diferentes formas de resolver as situações acima, visando aprimorar o campo conceitual. Ainda segundo Moreira

(2002), Campo conceitual é também definido por Vergnaud como um conjunto de problemas e situações cujo tratamento requer conceitos, procedimentos e representações de tipos diferentes, mas intimamente relacionados.

Seção 02: Resolvendo problemas

Sabemos que há muitos anos o homem começou a realizar cálculos. Inicialmente só uma pequena parte da população tinha conhecimento de como se realizava uma divisão, pois os procedimentos eram difíceis, mas com o passar dos anos, eles foram se aprimorando. Mostraremos alguns que consideramos mais apropriados.

Resolveremos o problema 1. Um professor de educação Física vai promover um campeonato de futebol na sua escola, e 75 alunos vão participar deste campeonato. Em cada time é preciso ter 8 jogadores, então quantos times haverá ao todo neste campeonato?

- ✓ **Método da Subtração Sucessiva**

75 → (dividendo)
-8 → (divisor)
67
-8
59
-8
51
-8 → 9 (quociente) vezes, logo 72 ÷ 8 = 9 e resto 3
43
-8
35
-8
27
-8
19
-8
11
-8
3 → (resto)

Perceba que este método se torna pouco eficiente para números muito grandes, pois se torna muito trabalhoso.

Qual o significado do quociente na divisão? E do resto?

Neste momento, queremos reforçar que discutiremos noções intuitivas, tendo como público alvo crianças das séries finais do fundamental menor (Fundamental I) e iniciais do fundamental maior (Fundamental II). É muito importante que esta criança tenha clareza do que os elementos representam na divisão, e saber que o problema pode envolver uma ação de **DISTRIBUIR** ou **AGRUPAR**. A ação de distribuir envolve problemas como as situações três e quatro expostas inicialmente, nas quais dispomos de certa quantia para dividir igualmente entre um determinado número de elementos; por outro lado a ação de agrupar, exemplificada nas situações um e dois, nos remete a identificar a quantidade de grupos, com um número fixo de elementos, que podemos formar com o montante inicial.

- O **Dividendo** representa o total de elementos que dispomos para distribuir, ou agrupar.
- **Divisor** é a quantidade de pessoas para qual queremos distribuir, ou o total de elementos por grupo.
- **Quociente** é a parte que cabe a cada indivíduo na distribuição, ou o número de grupos que podemos formar.
- O **Resto** representa o que sobrou na distribuição, ou o que não foi agrupado.

✓ **Método da Decomposição**

Decompondo o dividendo em parcelas podemos fazer 75 = 40 + 35 de onde vem:

$$\begin{array}{r|l} 40 & 8 \\ \hline 0 & 5 \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{r|l} 35 & 8 \\ \hline 3 & 4 \end{array}$$

Logo 75 ÷ 8 é igual a 5+4=9 e resto 3.

✓ **Método da Distribuição**

Neste método distribuiremos os setenta e cinco alunos em oito conjuntos, esta distribuição pode ser feita por unidade ou ainda de dois em dois de forma que podemos distribuir de um modo, inicialmente, e depois de outro. Exemplo

5	5	5	5	5	5	5	5	→	40
2	2	2	2	2	2	2	2	→	56
2	2	2	2	2	2	2	2	→	72
↓	3 → (resto)								75
9									

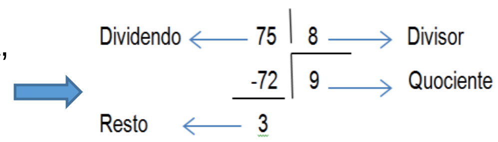
Assim como no método de subtrações sucessivas ele se torna pouco eficiente para números grandes.

✓ **Método Usual (Algoritmo de Euclides)**

1º Passo: Verifica-se qual o algarismo que multiplicado por 8 (divisor) mais se aproxima do número dado (dividendo).

2º Passo: Subtrai-se o resultado da multiplicação 8x9 (divisor multiplicado pelo quociente) do número dado (dividendo).

A divisão (para números naturais) termina, pois o número 3 (resto) é menor que 8 (divisor).



Utilizando o teorema da divisão:

Dividendo = Divisor x Quociente + Resto, onde o resto é menor que o divisor

75 = 8 x 9 + 3

Reforçamos que é importante mostrar aos alunos métodos diferentes de resolver uma situação problema, para que ele possa julgar qual o melhor caminho, no seu ponto de vista, para solucionar cada situação. O presente material expõe os métodos desde os mais simples até os mais rebuscados.

Vamos analisar o problema 2. Em certo mês a produção de uma pequena granja foi de 3648 ovos. Quantas dúzias podem ser formadas com a produção deste mês?

- ✓ **Método da Decomposição**

A decomposição pode ser aplicada no dividendo e no divisor como veremos a seguir.

Decompondo o dividendo em parcelas podemos fazer 3648 = 3600 + 48 de onde vem que:

$$\begin{array}{r|l} 3600 & 12 \\ \cline{2-2} 0 & 300 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{r|l} 48 & 12 \\ \cline{2-2} 0 & 4 \end{array}$$

Logo 300+4=304

Fazendo agora a decomposição do divisor em fatores, por exemplo, 12 = 2 x 2 x 3, daí vem que:

$$\begin{array}{r|l} 3648 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & \begin{array}{r|l} 1216 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & \begin{array}{r|l} 608 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 304 \end{array} \end{array} \end{array}$$

- ✓ **Método Usual (Algoritmo de Euclides)**

1º Passo: Selecionamos, da esquerda para direita, os algarismos de forma a obter o menor número maior ou igual ao divisor.

Nesse exemplo iremos começar dividindo 36 por 12. Lembre-se que na realidade estaremos dividindo 3600 por 12 .

$$\begin{array}{r|l} 36'48 & 12 \\ \cline{2-2} \underline{-36} & 3 \\ 0 & \end{array} \longrightarrow \text{centenas}$$

2º Passo: Ao resto do primeiro passo juntamos o algarismo seguinte.

No caso o algarismo quatro.

Não se esqueça de reforçar que na realidade são quatro dezenas, logo não são necessárias dezenas de 12, por essa razão o zero.

$$\begin{array}{r|l} 36'4'8 & 12 \\ \cline{2-2} \underline{-36} & 30 \\ 04 & \\ \underline{-0} & \\ 4 & \end{array} \longrightarrow \text{dezenas}$$

3º Passo: Ao resto do segundo passo juntamos o algarismo seguinte.

```
 36'4'8' | 12
-36      |----
         | 30 4  → unidades
  04
  -0
   48
  -48
    0
```

Uma variação deste método é utilizada realizando a subtração mentalmente, como fizemos em alguns exemplos, mas consideramos ser uma evolução gradativa e natural. Como dito anteriormente, os métodos de subtração sucessiva e distribuição não são convenientes para divisões com números de alto valor absoluto, por conseguinte não serão adotados para este problema.

No terceiro problema. Dona Lúcia possui 40 bombons que pretende distribuir, igualmente, para seus seis netos. Quantos bombons cada neto receberá?

- ✓ **Método da Subtração Sucessiva**

Este método é eficiente para divisões não exatas também, porém como mencionado antes não é muito indicado para números muito grandes.

```
 40
- 6
----
 34
- 6
----
 28
- 6      6 (quociente)
----
 22
- 6
----
 16
- 6
----
 10
- 6
----
 4    (resto)
```

- ✓ **Método Usual (Algoritmo de Euclides)**

$$\begin{array}{r|l} 40 & \underline{\;6\;} \\ \underline{-36} & 6 \\ 4 & \end{array}$$

- ✓ **Método da Decomposição**

Decompondo o dividendo em parcelas podemos fazer 40 = 30 + 10 de onde vem:

$$\begin{array}{r|l} 30 & \underline{\;6\;} \\ 0 & 5 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{r|l} 10 & \underline{\;6\;} \\ 4 & 1 \end{array}.$$

Logo 5+1=6 e resto 4

Neste processo devemos ter atenção, pois caso as duas parcelas deixem resto devemos somá-los, e em caso da soma superar o divisor, realizar uma nova divisão. Como exemplo se o dividendo fosse 44 e o aluno optar por duas parcelas de 22.

$$\begin{array}{r|l} 22 & \underline{\;6\;} \\ 4 & 3 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{r|l} 22 & \underline{\;6\;} \\ 4 & 3 \end{array}.$$

$$+$$

$$\begin{array}{r|l} 8 & \underline{\;6\;} \\ 2 & 1 \end{array}$$

Então 3+3+1=7 pois 44 ÷ 6=7 e resto 2. Fazendo agora a decomposição do divisor em fatores, 6 = 2 x 3, daí vem que:

$$\begin{array}{r|l} 40 & \underline{\;2\;} \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & \underline{\;3\;} \\ 2 & 6 \end{array}.$$

Neste momento devemos observar que como foi dividido por 2 anteriormente na realidade o resto será 2 x 2, logo resto 4, e como esperado resulta quociente 6. Para divisões não exatas em que visamos determinar apenas o quociente, o procedimento é muito eficiente, mas não é muito prático para determinar o resto.

✓ **Método da Distribuição**

Lembrando que a distribuição não precisa ser de um em um. poderemos resolver da seguinte forma

3 3 3 3 3 3 $\rightarrow$ 18

3 3 3 3 3 3 $\rightarrow$ 36, faltando 4 que não podemos mais distribuir.

4 (resto)

6

No quarto problema, João dividiu as 136 petecas, que adquiriu durante a juventude, entre seus quatro filhos. Quantas petecas cada filho recebeu?

✓ **Método da Distribuição**

10	10	10	10	40
20	20	20	20	120
2	2	2	2	128
2	2	2	2	136

34 (quociente)

✓ **Método da Decomposição**

Reforçamos que na decomposição do dividendo o modo de dividir e o número de parcelas ficam a cargo do aluno; a forma aqui sugerida não é única.

$$\begin{array}{r|l} 120 & 4 \\ \hline 0 & 30 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{r|l} 16 & 4. \\ \hline 0 & 4 \end{array}$$

Logo vem que o quociente é 30+4=34. Fazendo a decomposição do divisor temos 4 =2 x 2 então

$$\begin{array}{r|l} 136 & 2 \\ \hline 0 & 68 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 68 & 2 \\ \hline 0 & 34\ . \end{array}$$

- ✓ **Método Usual (Algoritmo de Euclides)**

1ºPasso

$$\begin{array}{r|l} 13'6 & 4 \\ \cline{2-2} \underline{-12} & 3 \longrightarrow \text{(dezenas)} \\ 1 & \\ 16 & \end{array}$$

2º Passo

$$\begin{array}{r|l} 13'6' & 4 \\ \cline{2-2} \underline{-12} & 3\,4 \longrightarrow \text{(unidades)} \\ 1 & \\ 16 & \\ \underline{-16} & \\ 0 & \end{array}$$

Como vimos, é de fundamental importância para aprimoramento do campo conceitual que o aluno tenha opções para solucionar uma situação-problema e consiga escolher o melhor caminho no seu ponto de vista. Informe o aluno que a divisão não é comutativa como a multiplicação.

Utilizando o teorema da divisão (Dividendo = Divisor x Quociente + Resto) faça o aluno perceber que não temos divisão com divisor igual a zero. Na próxima seção traremos uma lista de situações-problema.

Seção 03 – Praticando

Aqui veremos alguns problemas interessantes, mas ressaltamos que é de fundamental importância que você crie situações – problemas baseados no cotidiano do aluno.

Resolva os problemas abaixo utilizando dois métodos diferentes:

1. Em um teatro há 126 poltronas distribuídas igualmente em 9 fileiras. Quantas poltronas foram colocadas em cada fileira?

2. Uma pessoa ganha R$ 23,00 por hora de trabalho. Quanto tempo deverá trabalhar para receber R$ 391,00?

3. Numa pista de atletismo uma volta tem 400 metros. Numa corrida de 10.000 metros, quantas voltas o atleta tem de dar nessa pista?

4. Um automóvel tem um consumo médio de 1 litro de combustível para cada 9 quilômetros, quando está rodando na cidade. Se for mantida essa média, quantos litros de combustível seriam necessários para esse automóvel rodar 918 quilômetros na cidade?

5. Durante a construção do telhado de uma casa Lucas utilizou 721 telhas que instalou em uma semana (7 dias). Quantas telhas ele instalou em cada dia, supondo que ele utilizou a mesma quantidade em cada dia?

6. Um operário deseja carregar 100 tijolos para o segundo andar de uma obra, ele sobe 8 tijolos de cada vez. Quantas vezes ele subirá as escadas?

7. Sofia ganhou dez bombons, mas devido às ordens de seu pai deve comer três por dia. Quantos dias ela levou para comer os bombons se ela obedeceu a seu pai?

8. A professora Juliana comprou 100 brindes para distribuir entre seus 11 alunos. Se a professora dividiu igualmente para os alunos e ficou com o resto, com quantos brindes Juliana ficou?

9. Vinícius possui 50 petecas que deseja guardar em sacos que armazenam, no máximo, seis petecas. Quantos sacos Vinícius deve utilizar?

10. Karla guardou quatro bonecas em cada caixa, utilizando 3 caixas cheias e ainda sobraram duas bonecas fora das caixas. Quantas bonecas Karla possui?

Construa problemas considerando a realidade de seus alunos.

Seção 04: Dicas

Durante a resolução dos problemas, segundo Joseph, é importante:

- Inicie com problemas com enunciado e deixe o cálculo surgir naturalmente.
- Não mostre como resolver, ao invés disso encoraje-os a bolar seus métodos e estratégias.
- Abstenha-se de corrigir respostas erradas e reforçar as certas; ao invés disso, mostre os diferentes pontos de vista. (A resposta correta aparecerá)
- Incentive as crianças a utilizar métodos variados para resolver os problemas.
- Encoraje as crianças a pensar mais do que escrever e escreva no quadro de modo a facilitar a permuta de pontos de vista.

No ensino de Matemática Sá (2009), afirma que ensinar através de atividades da oportunidade ao aluno de participar da construção da aprendizagem, adquirir conhecimento e redescobrir propriedades. Na próxima etapa, iniciaremos operações com frações.

CAPÍTULO VI – ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO COM FRAÇÕES

Gilberto Alves Teixeira Júnior

Graduado em Matemática (Licenciatura) pela Universidade Estadual do Piauí - UESPI, Bacharel em Matemática pela Universidade Federal do Piauí - UFPI, Especialista em Docência do Ensino Superior pelo ISEPRO - PI, Mestre em matemática pela Universidade Federal do Pará - UFPA / SBM. Atualmente é Professor de Matemática na rede tecnológica do estado do Pará, Professor de Matemática na

rede particular, Professor no PARFOR pela UFPA e elaborador de questões de concursos na Inaz do Pará.

Seção 01 – Introdução

Nesta seção abordaremos as diversas formas de ensinar adições e subtrações com frações, mas com o propósito maior de abrir a discussão sobre possibilidades não convencionais para seu ensino, contribuindo para uma aprendizagem significativa e um enriquecimento das ideias matemáticas que coabitam o campo conceitual das estruturas multiplicativas em que a proporcionalidade é a ideia forte (VERGNAUD, 1991).

A aprendizagem de frações não se dá com definições prontas, nomenclatura obsoleta e pseudoproblemas sobre pizzas e barras de chocolates. Os professores deveriam ter atenção para as complexidades que envolvem conceito tão delicado. Os obstáculos à aprendizagem são muitos e de várias naturezas. A começar pelo fato de que a palavra fração estar relacionada a muitas ideias e construções (ver BEHR, 1983 e VERGNAUD, 1983).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, PCNs (1998), ao tratar da abordagem do conteúdo dos números racionais, tanto na forma fracionária como na decimal, tem-se como objetivo:

> (...) levar os alunos a perceber que os números naturais são insuficientes para resolver determinadas situações-problema como as que envolvem a medida de uma grandeza e o resultado de uma divisão. (...) Os racionais assumem diferentes significados nos diversos contextos: relação parte/todo, divisão e razão. A relação parte/todo se apresenta quando um todo (unidade) se divide em partes equivalentes. A fração, por exemplo, indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes, é o caso das tradicionais divisões de uma figura geométrica em partes iguais (BRASIL, 1998, p. 101).

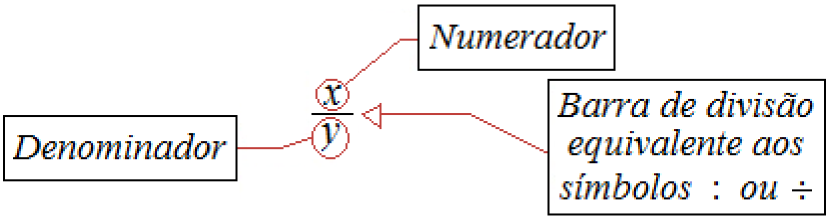
Ainda destacam que se deve ter uma proposta de trabalho relacionado à fração como um todo, dando significados às atividades em diversos contextos, para que o educando possa analisar, comparar e consolidar sua aprendizagem. Também não se pode esquecer de observar, ao trabalhar os números racionais no contexto diário, que eles aparecem muito mais na forma decimal do que na forma fracionária.

As operações de adição e subtração com fração dependem unicamente do denominador, ou seja, dependem da quantidade de partes que um inteiro foi dividido, podendo ser iguais ou diferentes, assim diferenciando a resolução.

Dessa forma, abordaremos inicialmente os conceitos básicos em frações, para que seja possível realizarmos uma abordagem de suas operações.

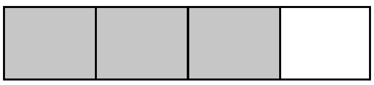
Seção 02 – As frações

Para representar os elementos que não são tomados como partes inteiras de alguma coisa, utilizamos o objeto matemático denominado **fração**. Os numerais que representam números racionais são chamados frações e os números inteiros utilizados na fração são chamados **numerador** e **denominador**, separados por uma linha horizontal ou traço de fração.

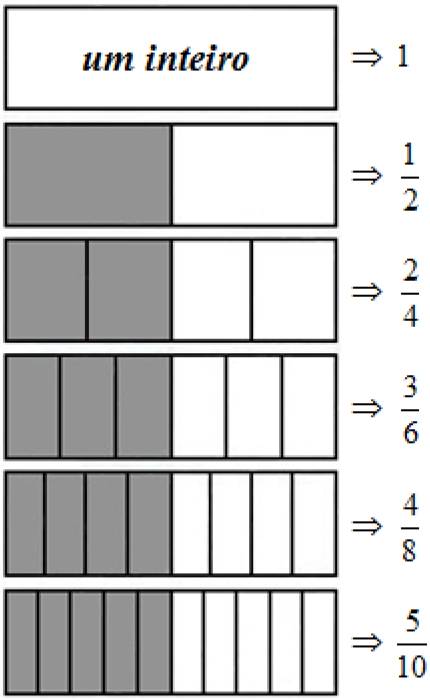


O numerador indica quantas partes são tomadas do inteiro, isto é, o número inteiro que é escrito sobre o traço de fração e o denominador indica em quantas partes dividimos o inteiro, sendo que este número inteiro deve necessariamente ser diferente de zero.

A fração $\frac{3}{4}$, de numerador igual a 3 e denominador igual a 4, significa que o inteiro foi dividido em 4 partes iguais e tomamos (consideramos) 3 dessas partes. Representando geometricamente essa fração, teríamos:



De fato, as frações são representações das partes de um todo. Tanto na matemática, quanto na vida, quando falamos de equivalência, estamos falando de igualdade entre dois objetos, dois elementos.



Na figura ao lado, observe que o retângulo foi repartido de várias formas diferentes, porém a parte considerada (sombreada) representa sempre a mesma quantidade.

Essas frações são ditas **equivalentes**, pois algebricamente temos:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}$$

Portanto, as **frações equivalentes** são frações escritas de maneiras diferentes, entretanto representando a mesma parte de um todo.

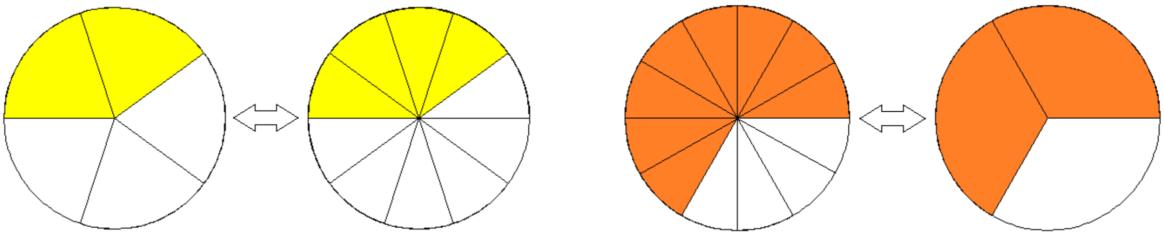
Por outro lado, fazer representações iguais a essa (da figura ao lado) sempre que fosse preciso encontrar frações equivalentes se tornaria algo cansativo e desnecessário, pois existe um modo menos trabalhoso de encontrar essas frações, utilizando apenas a operação da multiplicação ou divisão.

Assim, para encontrarmos frações equivalentes, basta multiplicarmos (ou dividirmos) o numerador e o denominador pelo mesmo número, com exceção do zero.

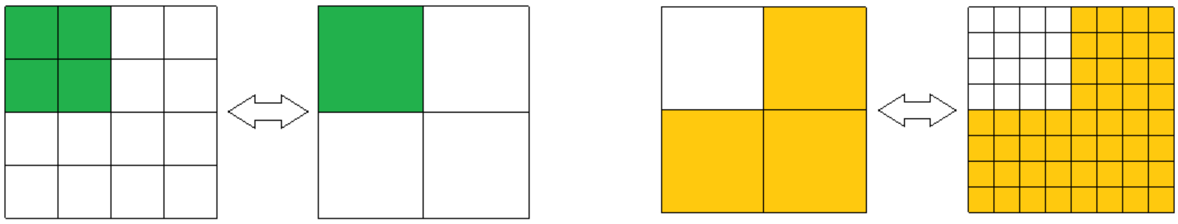
Para as frações equivalentes da figura acima, teríamos:

$$\frac{1}{2}=\frac{1\times 2}{2\times 2}=\frac{2}{4} \text{ ou } \frac{1}{2}=\frac{1\times 3}{2\times 3}=\frac{3}{6} \text{ ou } \frac{1}{2}=\frac{1\times 4}{2\times 4}=\frac{4}{8} \text{ ou } \frac{1}{2}=\frac{1\times 5}{2\times 5}=\frac{5}{10}$$

Vejamos alguns exemplos:



$\frac{2}{5}$ $\frac{4}{10}$ $\frac{8}{12}$ $\frac{2}{3}$



$\frac{4}{16}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{48}{64}$

Note que o método para encontrar a fração equivalente não determina que número seja este, fica à sua escolha qual número usar. A única restrição é: o número pelo qual o numerador for multiplicado (ou dividido), deverá também ser multiplicado (ou dividido) pelo denominador.

Uma fração equivalente a $\frac{9}{12}$, com termos menores, é $\frac{3}{4}$. A fração $\frac{3}{4}$ foi obtida dividindo-se ambos os termos da fração $\frac{9}{12}$ pelo número 3, que é divisor comum. Dizemos que a fração $\frac{3}{4}$ é uma fração simplificada de $\frac{9}{12}$.

A fração $\frac{3}{4}$ não pode ser simplificada, por isso é chamada de **fração irredutível**. A fração $\frac{3}{4}$ não pode ser simplificada porque 3 e 4 não possuem divisor comum diferente de 1.

Como as operações de adição e subtração com fração dependem principalmente do denominador, ou seja, dependem da quantidade de partes que um inteiro foi dividido, então as resoluções envolvem diretamente o conhecimento das frações equivalentes, uma vez que, os denominadores das frações envolvidas na operação podem ser iguais ou diferentes, assim diferenciando a resolução.

O ensino de frações, na maioria das vezes, é trabalhado em sala de aula de forma mecânica e tradicional, e não permite que o aluno faça uma conexão entre teoria e prática.

Em virtude disso, propomos abaixo algumas questões que envolvem adições e subtrações com frações.

Seção 03 – Questões e resoluções

01) Vitória tem uma tira retangular de cartolina branca. Ela dividiu essa tira em 9 partes iguais, pintou 5 dessas partes de laranja e 2 dessas partes de roxo. A parte colorida da tira representa que fração da tira?

02) Vitória tem outra tira retangular que está dividida em 9 partes iguais. Nessa tira, 5 partes iguais já foram coloridas de amarelo e dessa parte colorida ela eliminou 2 partes. Nessas condições, a parte colorida que restou representa que fração da tira inicial?

03) Efetue as adições e subtrações, simplificando o resultado quando possível.

a) $\frac{1}{10}+\frac{7}{10}$

b) $\frac{5}{6}-\frac{1}{6}$

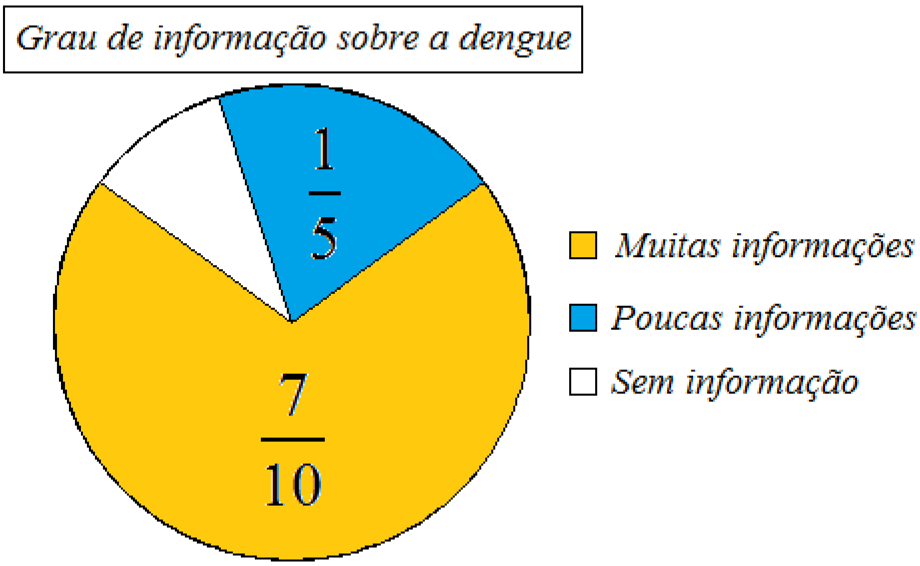
04) Vitória foi à feira com certa quantia. Gastou $\frac{1}{2}$ dessa quantia na banca de frutas e $\frac{1}{3}$ dessa quantia na banca de verduras e legumes. Que fração da quantia inicial Vitória gastou nessas duas bancas?

05) Das pessoas que estavam na barraca de pastel, $\frac{4}{5}$ eram homens. Entre os homens, $\frac{1}{2}$ usavam óculos. Que fração das pessoas que estavam na barraca de pastel representa os homens que não usavam óculos?

06) Efetue as adições e subtrações, simplificando o resultado quando possível.

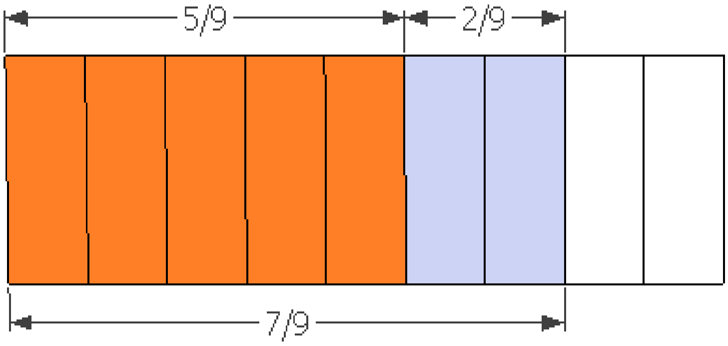
a) $\frac{3}{8}+\frac{1}{5}$ **b)** $\frac{9}{10}-\frac{1}{4}$

07) Vitória fez uma pesquisa, em sua escola, sobre o grau de informação dos alunos a respeito da dengue. O resultado foi dado pelo gráfico ao lado. Vitória esqueceu-se de escrever a fração correspondente aos alunos com nenhuma informação. Qual é essa fração?



Como seria seu método de resolução desses problemas? Qual metodologia de ensino adotaria em cada problema proposto?
As resoluções das questões propostas acima são apresentadas a seguir:
QUESTÃO 01

Uma solução: Representando geometricamente, temos:



Em linguagem matemática, temos:

$$\frac{5}{9}+\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

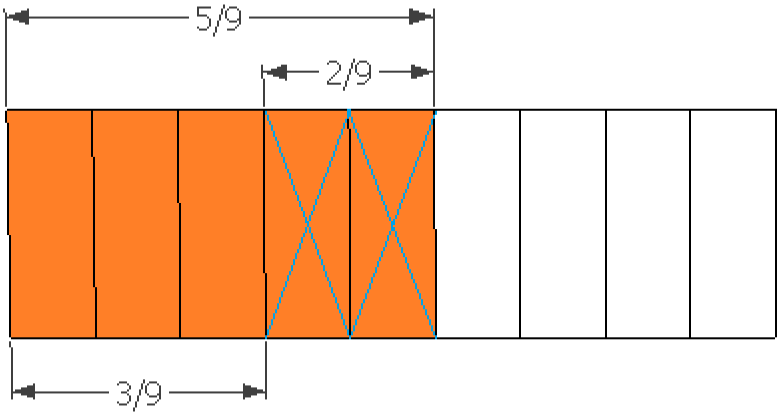
Assim, para resolvermos este problema devemos calcular $\frac{5}{9}+\frac{2}{9}$, que se dará simplesmente pela conservação dos denominadores (que são iguais) e soma dos numeradores, ou seja:

$$\frac{5}{9}+\frac{2}{9}=\frac{5+2}{9}=\frac{7}{9}$$

Portanto, a parte colorida representa $\frac{7}{9}$ da tira de cartolina branca.

QUESTÃO 02

<u>Uma solução</u>: Representando geometricamente, temos:



Em linguagem matemática, temos:

$$\frac{5}{9}-\frac{2}{9}=\frac{3}{9}$$

A parte colorida representa $\frac{3}{9}$ (equivalente a 1/3) da tira inicial.

Assim, para resolvermos este problema devemos calcular $\frac{5}{9}-\frac{2}{9}$, que se dará simplesmente pela conservação dos denominadores (que são iguais) e pela subtração dos numeradores, ou seja:

$$\frac{5}{9}-\frac{2}{9}=\frac{5-2}{9}=\frac{3\div 3}{9\div 3}=\frac{1}{3}$$

Portanto, a parte colorida representa $\frac{1}{3}$ da tira de cartolina inicial.

QUESTÃO 03

Note que, com base nas questões anteriores, é possível concluirmos que:

*Para adicionar ou subtrair números representados por frações que têm **denominadores iguais**, adicionamos ou subtraímos os numeradores e conservamos o denominador.*

<u>Resolvendo a letra</u> ***<u>(a)</u>***

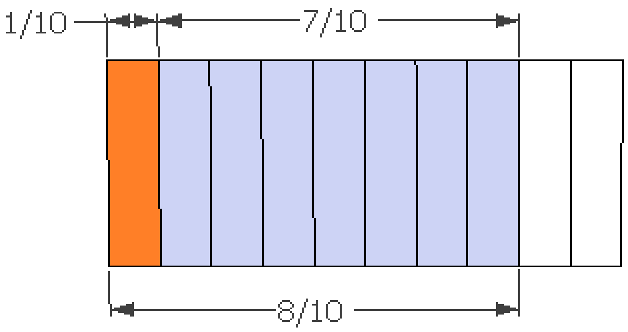
<u>Uma solução algébrica:</u>

a) $\frac{1}{10}+\frac{7}{10}=\frac{1+7}{10}=\frac{8\div 2}{10\div 2}=\frac{4}{5}$

Note que para efetuarmos a adição das frações acima, conservamos o denominador e efetuamos a adição com os numeradores, simplificando a fração resultante por 2 (já que é possível), obtendo assim a fração irredutível equivalente.

<u>Uma solução geométrica:</u>

Representando geometricamente, temos:



Em linguagem matemática, temos:

$$\frac{1}{10}+\frac{7}{10}=\frac{8}{10}$$

A parte colorida representa $\frac{8}{10}$ (o que equivale a 4/5) da figura.

<u>Resolvendo a letra</u> ***<u>(b)</u>***

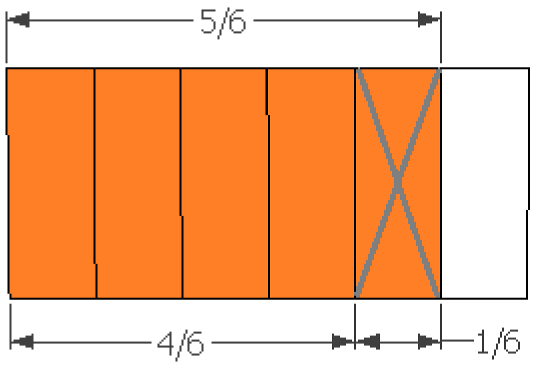
<u>Uma solução algébrica:</u>

b) $\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=\frac{5-1}{6}=\frac{4\div 2}{6\div 2}=\frac{2}{3}$

Para efetuarmos a subtração das frações acima, conservamos o denominador e efetuamos a subtração com os numeradores, simplificando a fração resultante por 2 (já que é possível), obtendo assim a fração irredutível equivalente.

<u>Uma solução geométrica:</u>

Representando geometricamente, temos:



Em linguagem matemática, temos:

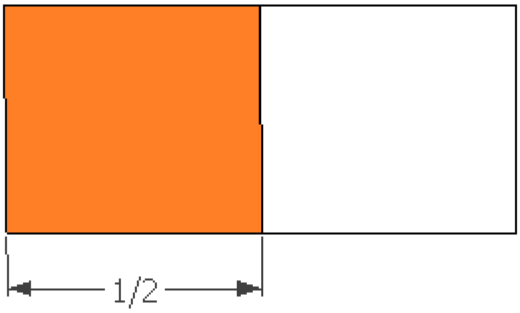
$$\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}$$

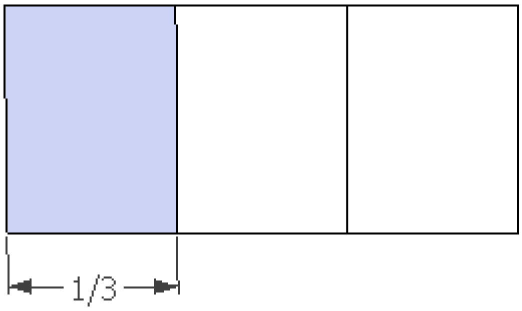
A parte colorida representa $\frac{4}{6}$ (o que equivale a 2/3) da figura.

QUESTÃO 04

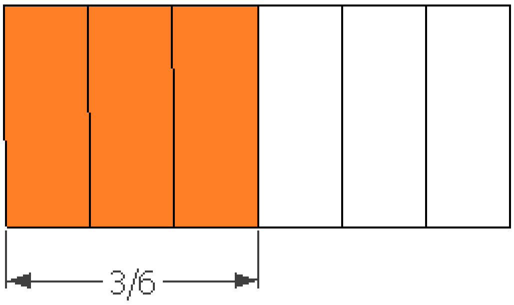
Para resolver esse problema, devemos calcular $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.

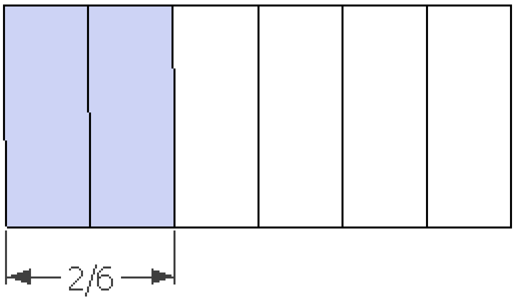
<u>Uma solução</u>: Representando geometricamente, temos:





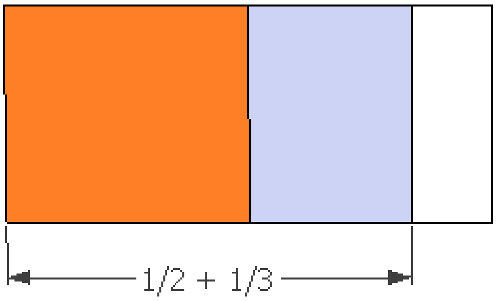
+ =



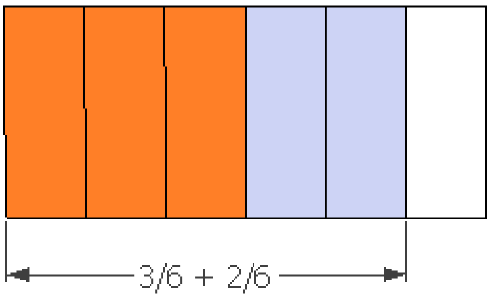


+ =

Donde teremos:



As figuras nos mostram que calcular $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ é o mesmo que calcular $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}$.



Então: $$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}_{\text{frações com denominadores diferentes}} = \underbrace{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}}_{\text{frações equivalentes com o mesmo denominador}} = \frac{5}{6}.$$

Portanto, Vitória gastou $\frac{5}{6}$ da quantia inicial.

<u>Uma solução algébrica:</u>

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}_{\text{frações com denominadores diferentes}} = \frac{1\times 3}{2\times 3}+\frac{1\times 2}{3\times 2} = \underbrace{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}}_{\text{frações equivalentes com o mesmo denominador}} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

Para efetuarmos a adição das frações acima, utilizamos um processo prático dado pela multiplicação da primeira fração (1/2), pelo denominador da segunda (3) e a multiplicação da segunda fração (1/3) pelo denominador da primeira (2) obtendo assim as frações equivalentes 3/6 e 2/6, respectivamente, que por sua vez, possuem o mesmo denominador. Daí segue análogo às questões acima propostas, pois temos frações com o mesmo denominador.

Para efetuarmos a adição das frações de outra forma, utilizamos o processo do mínimo múltiplo comum (m.m.c.) dos denominadores das frações, que nos permite obter frações equivalentes de mesmo denominador, isto é, uma redução das frações ao mesmo denominador.

Por decomposição em fatores primos, temos:

$$\begin{array}{c|l} 2,\ 3 & 2 \\ 1,\ 3 & 3\ \text{x} \\ \hline 1,\ 1 & 6 \end{array}$$

Isto é, m.m.c. (2, 3) = 6.

Após o cálculo do m.m.c. (2, 3) seguimos os seguintes passos para determinarmos os valores de ***a*** e ***b*** acima:

i) Efetuamos a divisão do m.m.c. (2, 3), isto é, 6, pelo denominador da primeira fração (2) e multiplicamos o resultado pelo numerador da mesma (1), obtendo assim, o valor de ***a***, ou seja, 3.

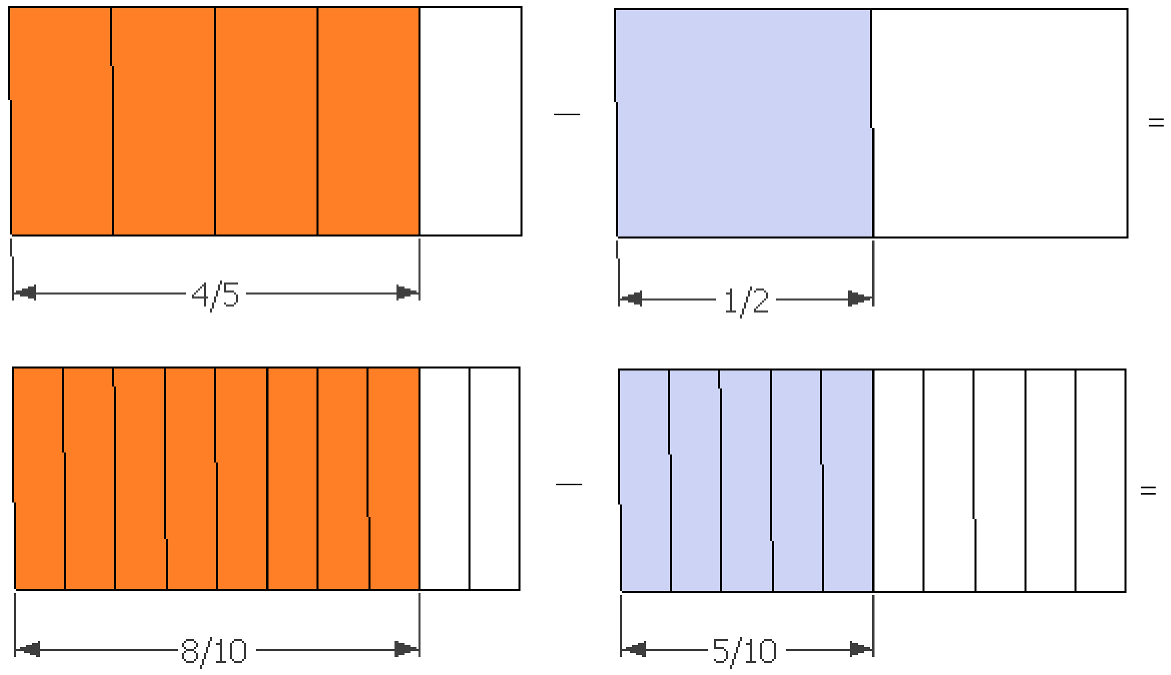
ii) Efetuamos a divisão do m.m.c. (2, 3) , isto é, 6, pelo denominador da segunda fração (3) e multiplicamos o resultado pelo numerador da mesma (1), obtendo assim, o valor de ***b***, ou seja, 2.

Assim teremos, $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$.

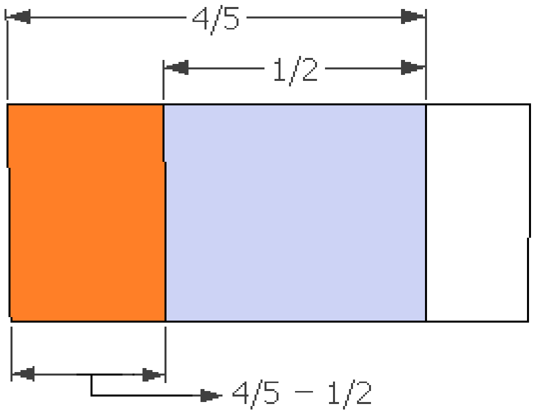
QUESTÃO 05

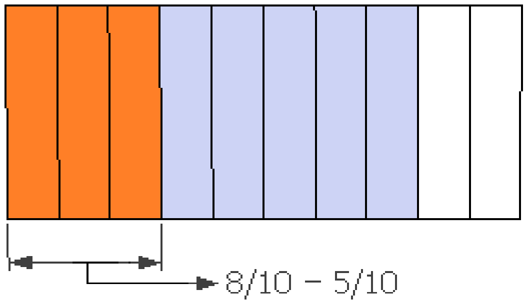
Para resolver esse problema, devemos calcular $\frac{4}{5}-\frac{1}{2}$.

Uma solução geométrica: Representando geometricamente, temos:



donde teremos:





As figuras nos mostram que calcular $\frac{4}{5}-\frac{1}{2}$ é o mesmo que calcular $\frac{8}{10}-\frac{5}{10}$.

Então:

$$\frac{4}{5}-\frac{1}{2}=\frac{8}{10}-\frac{5}{10}=\frac{3}{10}$$

Portanto, $\frac{3}{10}$ é a fração que representa os homens que não usavam óculos.

QUESTÃO 06

Assim, com base nas questões anteriores, é possível concluirmos que:

Para adicionar ou subtrair números representados por frações que têm ***denominadores diferentes****, primeiro encontramos* ***frações equivalentes*** *às frações dadas e que tenham um* ***denominador comum****. Em seguida, efetuamos a adição ou a subtração com essas frações.*

<u>*Resolvendo a letra* ***(a)***</u>

<u>***Uma solução algébrica:***</u>

$$\frac{3}{8}+\frac{1}{5}=\frac{3\times 5}{8\times 5}+\frac{1\times 8}{5\times 8}=\frac{15}{40}+\frac{8}{40}=\frac{23}{40}$$

Para efetuarmos a adição das frações acima, utilizamos um processo prático dado pela multiplicação da primeira fração (3/8), pelo denominador da segunda (5) e a multiplicação da segunda fração (1/5), pelo denominador da primeira (8) obtendo assim as frações equivalentes 15/40 e 8/40, respectivamente, que por sua vez, possuem o mesmo denominador. Daí segue análogo às questões acima propostas, pois temos frações com o mesmo denominador.

<u>Outra solução algébrica:</u>

Para efetuarmos a adição das frações acima, utilizamos o processo do mínimo múltiplo comum (m.m.c.) dos denominadores das frações, que nos permite obter frações equivalentes de mesmo denominador, isto é, uma redução das frações ao mesmo denominador.

Por decomposição em fatores primos, temos:

$$\begin{array}{c|l} 8,\ 5 & 5 \\ 8,\ 1 & 8\ \times \\ \hline 1,\ 1 & 40 \end{array}$$

Isto é, m.m.c. (8, 5) = 40.

Após o cálculo do m.m.c. (8,5), seguimos os seguintes passos para determinarmos os valores de ***a*** e ***b*** acima:

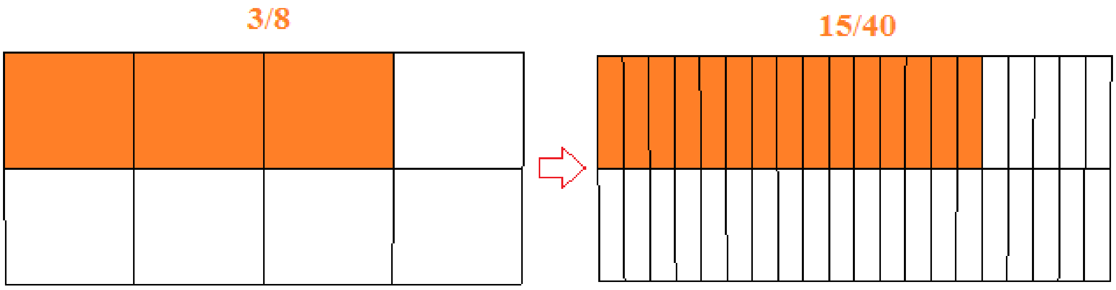
i) Efetuamos a divisão do m.m.c. (8,5), isto é, 40, pelo denominador da primeira fração (8) e multiplicamos o resultado pelo numerador da mesma (3), obtendo assim, o valor de ***a***, ou seja, 15.

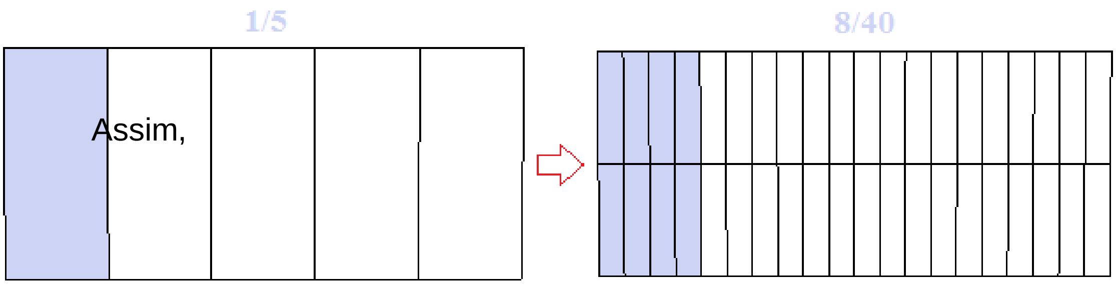
ii) Efetuamos a divisão do m.m.c. (8, 5), isto é, 40, pelo denominador da segunda fração (5) e multiplicamos o resultado pelo numerador da mesma (1), obtendo assim, o valor de ***b***, ou seja, 8.

Assim teremos, $\frac{15}{40}+\frac{8}{40}=\frac{15+8}{40}=\frac{23}{40}$.

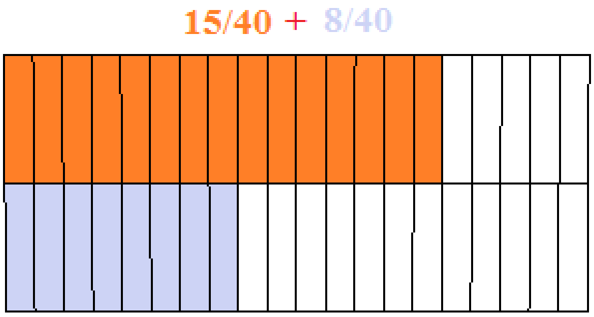
<u>Uma solução geométrica:</u>

Representando geometricamente, temos:





Assim,



Em linguagem matemática, temos:

$$\frac{15}{40}+\frac{8}{40}=\frac{23}{40}$$

A parte colorida representa $\frac{23}{40}$ da figura.

Resolvendo a letra ***(b)***

Uma solução algébrica:

Para efetuarmos a subtração das frações acima, utilizamos um processo prático dado pela multiplicação da primeira fração (9/10) pelo denominador da segunda (4) e a multiplicação da segunda fração (1/4) pelo denominador da primeira (10) obtendo assim as frações equivalentes 36/40 e 10/40, respectivamente, que por sua vez, possuem o mesmo denominador. Daí segue análogo às questões acima propostas, pois temos frações com o mesmo denominador.

Outra solução algébrica:

Para efetuarmos a subtração das frações acima, utilizamos o processo do mínimo múltiplo comum (m.m.c.) dos denominadores das frações, que nos permite obter frações equivalentes de mesmo denominador, isto é, uma redução das frações ao mesmo denominador.

Por decomposição em fatores primos, temos:

$$\begin{array}{l|l} 10,\ 4 & 2 \\ 5,\ 2 & 2 \\ 5,\ 1 & 5\ \text{x} \\ \hline 1,\ 1 & 20 \end{array}$$

Isto é, m.m.c. (10, 4) = 20.

Após o cálculo do m.m.c. (10, 4) seguimos os seguintes passos para determinarmos os valores de ***a*** e ***b*** acima:

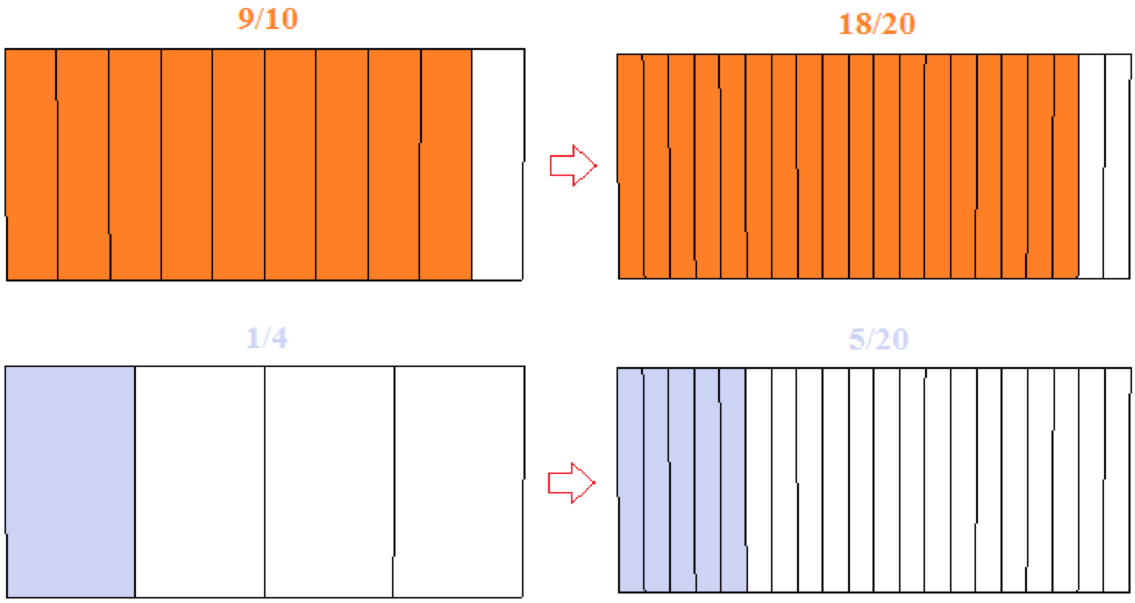
i) Efetuamos a divisão do m.m.c. (10, 4), isto é, 20, pelo denominador da primeira fração (10) e multiplicamos o resultado pelo numerador da mesma (9), obtendo assim, o valor de ***a***, ou seja, 18.

ii) Efetuamos a divisão do m.m.c. (10, 4) , isto é, 20, pelo denominador da segunda fração (4) e multiplicamos o resultado pelo numerador da mesma (1), obtendo assim, o valor de ***b***, ou seja, 5.

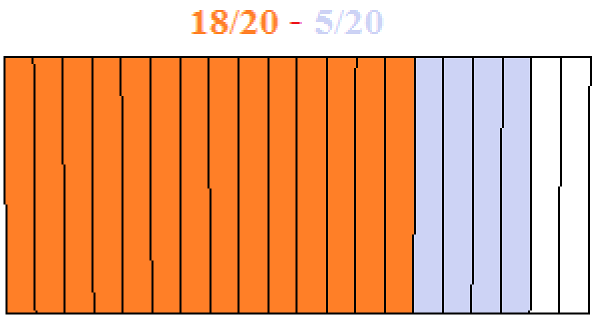
Assim teremos, $\frac{18}{20} - \frac{5}{20} = \frac{18-5}{20} = \frac{13}{20}$.

<u>Uma solução geométrica:</u>

Representando geometricamente, temos:



Assim,



Em linguagem matemática, temos:

$$\frac{18}{20} - \frac{5}{20} = \frac{13}{20}$$

A parte laranja representa $\frac{13}{20}$ da figura.

QUESTÃO 07

Para resolver esse problema, calculamos $\frac{7}{10}+\frac{1}{5}$.

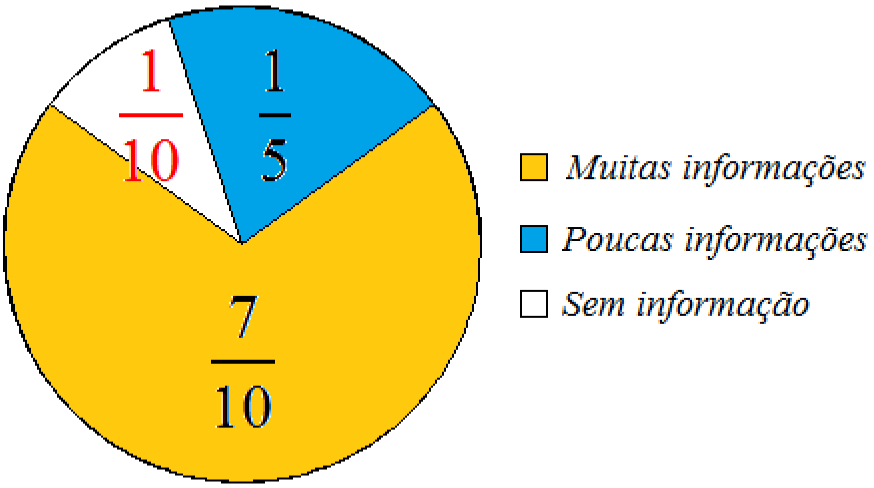
Ou por multiplicação cruzada (explicado anteriormente).

Depois, calculamos a fração dos alunos sem informação, que é dada por $1-\frac{9}{10}$:

$$1-\frac{9}{10}=\frac{10}{10}-\frac{9}{10}=\frac{1}{10}.$$

Portanto, $\frac{1}{10}$ é a fração que corresponde aos alunos sem informação.

Acrescentando essa informação ao gráfico, temos:



Seção 04 – Exercícios

---

01) Calcule e, se possível, simplifique o resultado.

a) $\frac{3}{10}+\frac{5}{10}$

b) $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}$

c) $\frac{7}{12}+\frac{1}{12}-\frac{5}{12}$

d) $\frac{19}{30}-\frac{7}{30}-\frac{2}{30}$

02) Se de $\frac{13}{20}$ você subtrair $\frac{2}{5}$, que fração você vai obter?

03) Entre os participantes de um congresso, verificou-se que $\frac{3}{8}$ deles chegaram ao evento utilizando o metrô, $\frac{1}{6}$ foi de carro, e o restante usou ônibus. Qual a fração dos participantes que foram de ônibus para o congresso?

04) Para fazer um trabalho escolar, João usou $\frac{3}{5}$ de uma folha de cartolina, enquanto sua irmã usou $\frac{1}{4}$ da mesma folha para fazer o seu trabalho. Que fração dessa folha os dois usaram juntos? Que fração representa o restante da cartolina?

05) Da renda de uma partida de futebol, $\frac{1}{10}$ é destinada às despesas gerais, $\frac{1}{2}$ cabe ao vencedor, e o restante cabe ao clube perdedor. Que fração da renda cabe ao clube perdedor?

06) André destinou $\frac{3}{5}$ de um terreno para fazer sua casa, $\frac{2}{15}$ para fazer o jardim e $\frac{1}{10}$ para a garagem. Qual a fração do terreno que a casa, o jardim e a garagem ocupam juntos?

Seção 05 – Considerações finais

Neste capítulo propomos a exploração, em atividades e situações, da adição e subtração com frações de denominadores iguais e diferentes. Para isso, utilizamos ideias geométricas, frações equivalentes, simplificação de frações e redução de frações ao mesmo denominador.

Quando precisamos encontrar o resultado de uma multiplicação entre dois números naturais tudo fica mais tranquilo, não é verdade? Por exemplo, obter o produto 12 x 345 ou mesmo um simples 3 x 20... Mas e quando precisamos multiplicar números que estão escritos na forma de fração? Como fazer para calcularmos?

A multiplicação é uma operação básica que surge para simplificar a soma de parcelas iguais. Essa operação é aplicada a qualquer conjunto numérico, dos naturais aos reais. No caso dos racionais, principalmente os números fracionários, a multiplicação deve ser utilizada respeitando algumas regras básicas, como multiplicar numerador por numerador e denominador por denominador. A abordagem completa sobre a multiplicação de frações é proposta no próximo capitulo.

CAPÍTULO VII – FRAÇÕES EQUIVALENTES

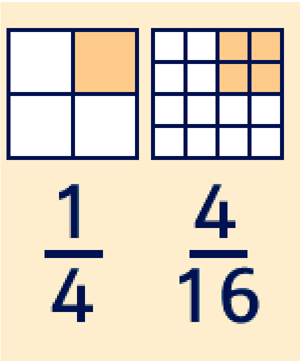
Pedro Augusto Lopes Rosa

Cursou graduação em Licenciatura em Matemática na Universidade da Amazônia (UNAMA), de 2002 a 2005, e Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT; na Universidade Federal do Pará (UFPA) de 2012 a 2014. Atualmente é professor efetivo da Secretaria Municipal de ensino de Belém (SEMEC) e da Secretaria Estadual de ensino do Estado do Pará (SEDUC), colaborador eventual no programa de formação de professores do MEC/CAPES PARFOR-UFPA.

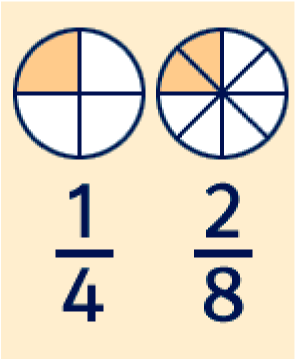
- São frações que representam a mesma parte do todo.

Exemplos:

1) Na primeira figura temos um quadrado em destaque, em relação a quatro quadrados iguais; e da mesma forma temos, na segunda figura, quatro quadrados destacados em relação a dezesseis quadrados iguais. Temos então uma equivalência entre as figuras e as respectivas frações.

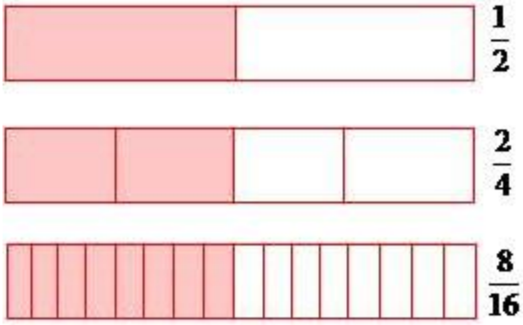


2) Note a seguir, a equivalência entre as figuras:

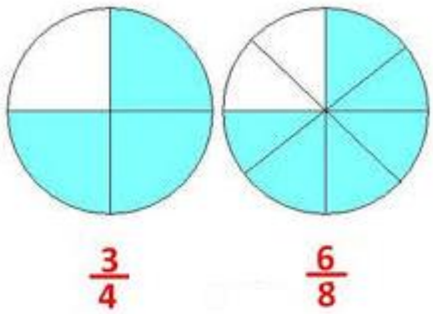


Há diversas situações em que podemos ter equivalência de frações, desde que, em cada uma delas a figura em destaque seja sempre a mesma, em relação ao todo.

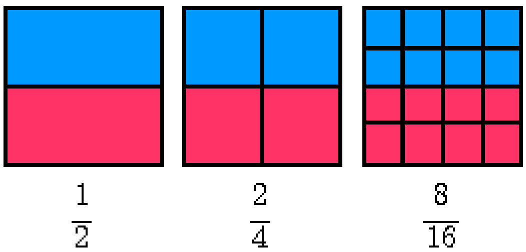
3)



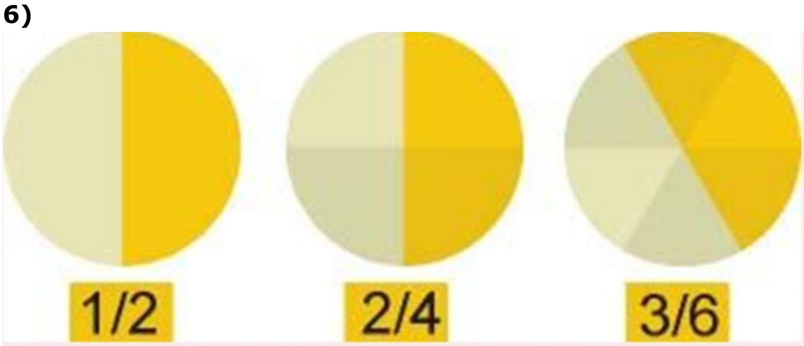
4)



5)



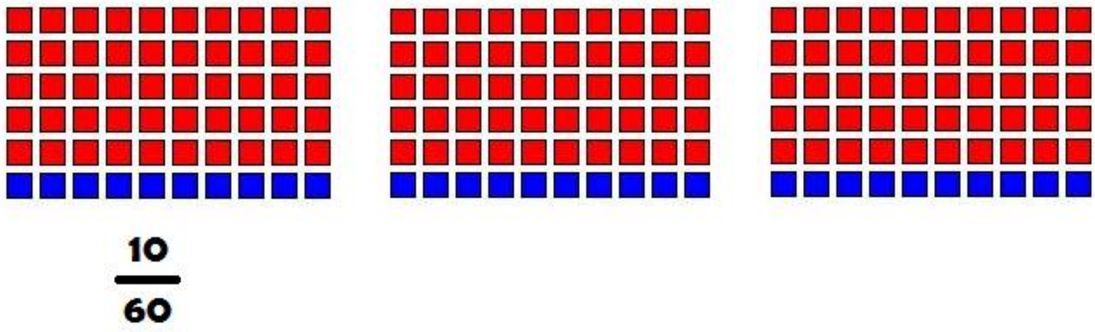
6)



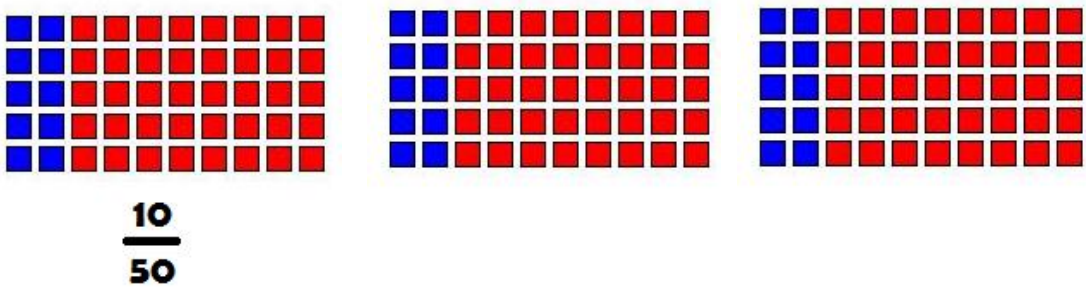
Exercícios:

1) Indique as frações correspondentes a cada figura. As frações são equivalentes?

2) Destaque duas frações equivalentes a:



3) Destaque duas frações equivalentes a:



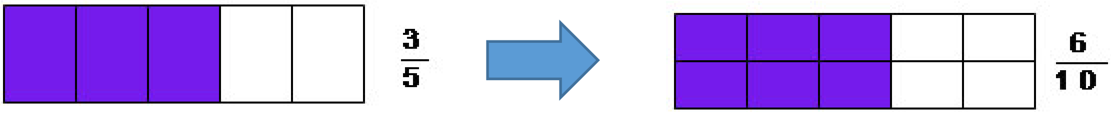
- **Significado aritmético das frações equivalentes**

Duas frações são equivalentes quando elas representam a mesma parte do inteiro. Podemos afirmar que $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{2}$ são equivalentes, porque ambas representam a metade de um inteiro. Se realizarmos a divisão que estas duas frações representam, iremos obter o mesmo quociente **0,5** que equivale a **meio**.

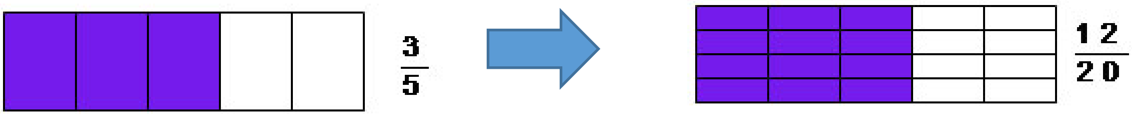
- **Obtendo frações equivalentes usando cálculos aritméticos**

Ao multiplicarmos ou dividirmos tanto o numerador, quanto o denominador por um número natural diferente de zero, estaremos produzindo uma outra fração equivalente.

Exemplo 1:

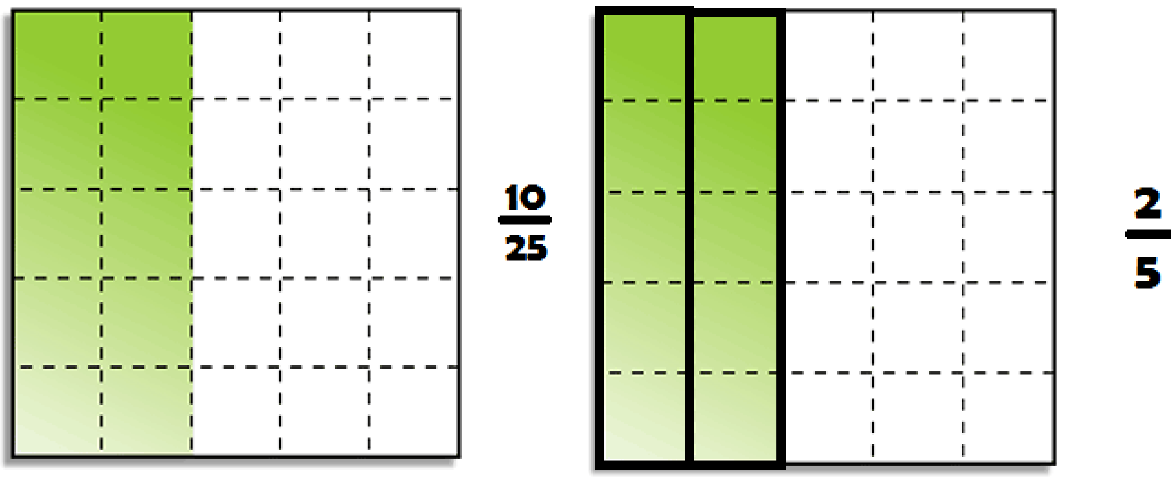


$$\frac{3\ x\ 2}{5\ x\ 2}=\frac{6}{10}$$



$$\frac{3\ x\ 4}{5\ x\ 4}=\frac{12}{20}$$

Exemplo 2:



$$\frac{10:5}{25:5}=\frac{2}{5}$$

Exercícios

1) Escreva uma fração equivalente a um meio cujo denominador seja dez.

2) Escreva uma fração equivalente a cinco sétimos cujo numerador seja quinze.

3) Escreva uma fração equivalente a dois terços cujo denominador seja 18.

4) Escreva uma fração equivalente a vinte oitavos, cujo numerador seja 5.

5) Escreva uma fração equivalente a três quartos, sendo trinta e cinco a soma do numerador com o denominador.

- **Fração irredutível**

Podemos encontrara forma irredutível de uma fração, dividindo seus termos por divisores comuns até que o divisor comum seja a unidade.

Exemplo:

$$\frac{72:2}{48:2}=\frac{36:2}{24:2}=\frac{18:2}{12:2}=\frac{9:3}{6:3}=\frac{3}{2}$$

Outra forma:

Ao dividirmos ambos os termos de uma fração pelo seu **máximo divisor comum**, iremos obter uma fração irredutível.

Exemplo: Da fração $\frac{72}{48}$ constante na ilustração acima, temos que o **MDC** dos termos é:

MDC(72, 48) = 24.

De onde concluímos que: $\frac{72:24}{48:24}=\frac{3}{2}$

Exercício:

Monte as frações dadas e simplifique-as até a forma irredutível:

a) Seis oitavos.

b) Doze quinze avos.

c) Dez dezesseis avos.

d) Sete trinta e cinco avos.

e) Quarenta e oito cento e vinte avos.

f) Cento e noventa e dois, duzentos e quarenta avos.

g) Duzentos e trinta e quatro, trezentos e noventa.

h) Cento e setenta e cinco, vinte e cinco avos.

Seção 01 – Questão de discussão 1

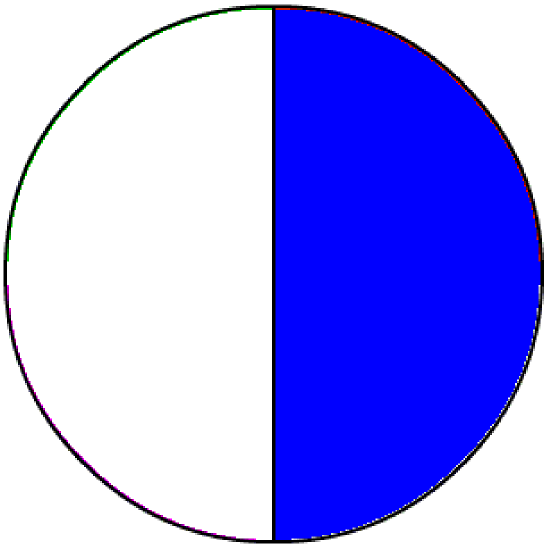
Um álbum tem 6 páginas com espaço para 7 figurinhas em cada página. Quantas figurinhas, no máximo, esse álbum pode ter?

Questão de discussão 2

Três irmãos possuem uma barra de chocolate para repartir igualmente entre eles. Que fração da barra cada um comerá? Represente por meio de um desenho.

Questão de discussão 3

Três irmãos têm a metade de uma torta circular para repartir igualmente entre eles. Que fração da torta inteira caberá a cada um? Represente por meio de uma figura.



Observações:

QD1) Com o primeiro, deseja-se verificar que há uma soma de números iguais, o que configura a multiplicação de números naturais.

QD2) No segundo, de maneira elementar, começamos a usar as frações através de um problema cuja resolução consiste em dividir a unidade em três partes iguais, obtendo como resultado uma fração da unidade. Inicia-se também o apelo à representação gráfica dos resultados.

QD3) Já no terceiro exemplo, você se depara com uma situação que consiste em dividir uma fração em partes iguais, dividir metade de uma torta para três pessoas.

É importante direcionar a atenção do aluno para a unidade (nesse caso, a torta inteira) e não apenas para fração dada, muitos alunos poderão responder um terço de meia torta (Figura 1) em vez de um sexto da torta inteira (figura 2).

Figura 1

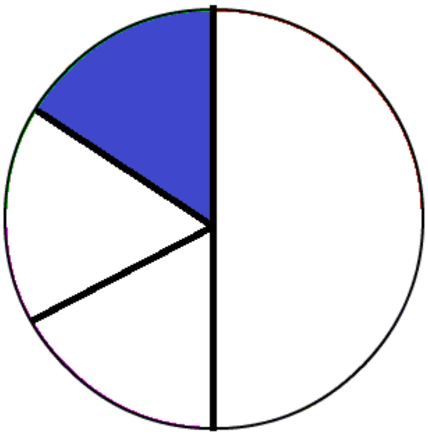
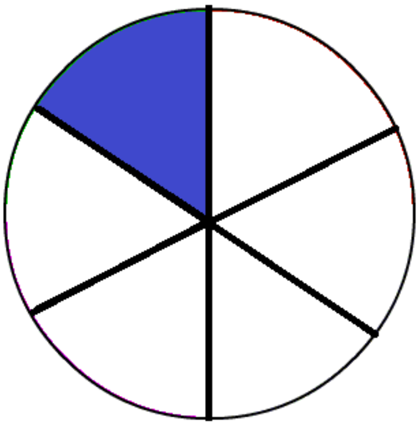


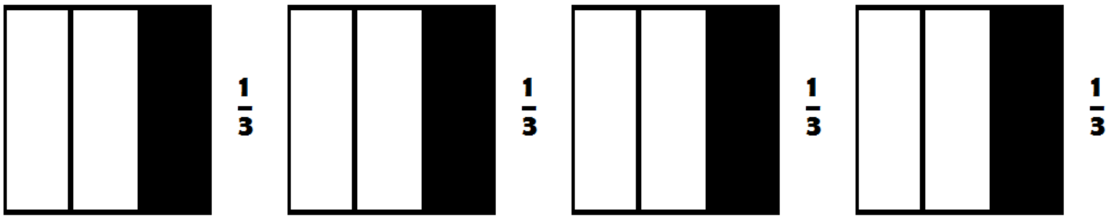
Figura 2



Seção 02 – Multiplicando frações

Calcule o produto $4\ x\ \frac{1}{3}$.

Solução 1:



$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1+1+1+1}{3}=\frac{4}{3}$$

Nesse caso, podemos perceber de maneira simples que os numeradores foram somados e o denominador apenas conservado.

Solução 2:

Para multiplicar um número natural por uma fração, basta multiplicar o número pelo numerador da fração dada e conservarmos o denominador.

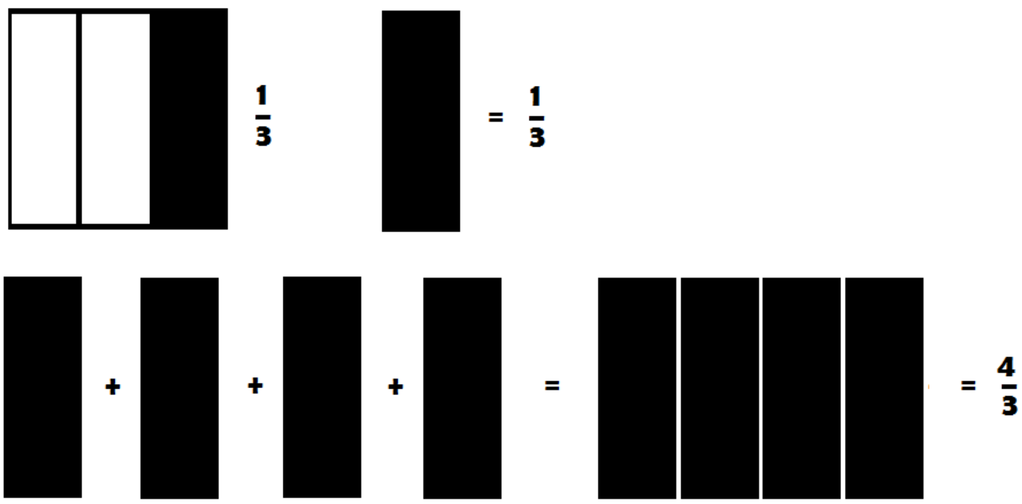
Em termos gerais, temos: $k.\frac{a}{b} = \frac{ka}{b}$, com k ∈ N, a ∈ N e b ∈ N*.

$4.\frac{1}{3}$ → multiplica-se 4 pelo numerador da fração e conserva-se o denominador.

$\frac{4.1}{3} = \frac{4}{3}$

Solução 3:

Uma solução gráfica:

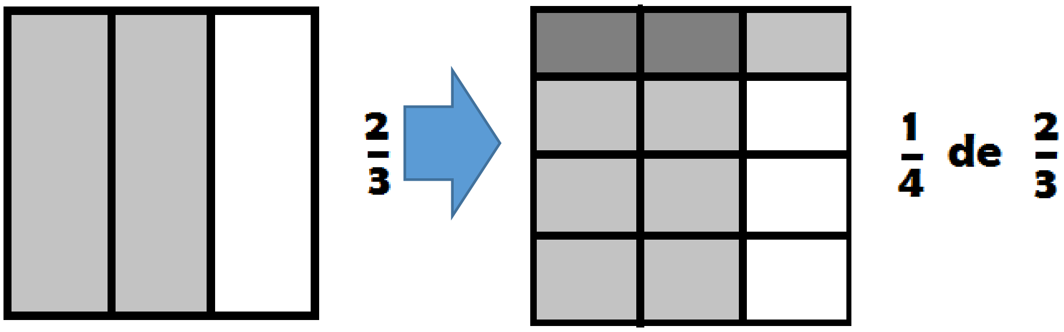


- **Multiplicando uma fração por outra fração**

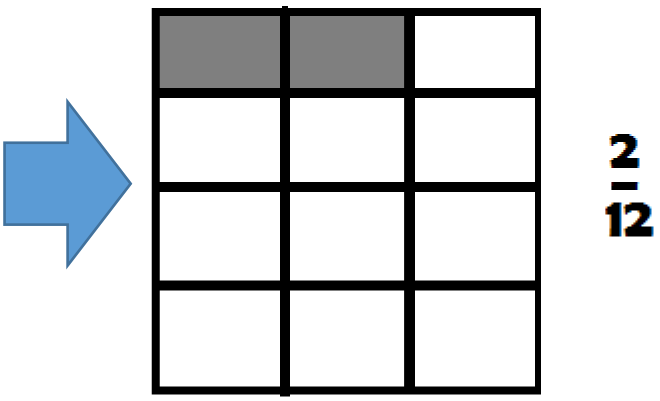
Dos alunos de uma turma, $\frac{2}{3}$ praticaram algum esporte durante o intervalo. Desses alunos, $\frac{1}{4}$ jogaram basquete. Que fração dos alunos da turma jogou basquete?

Solução 1:

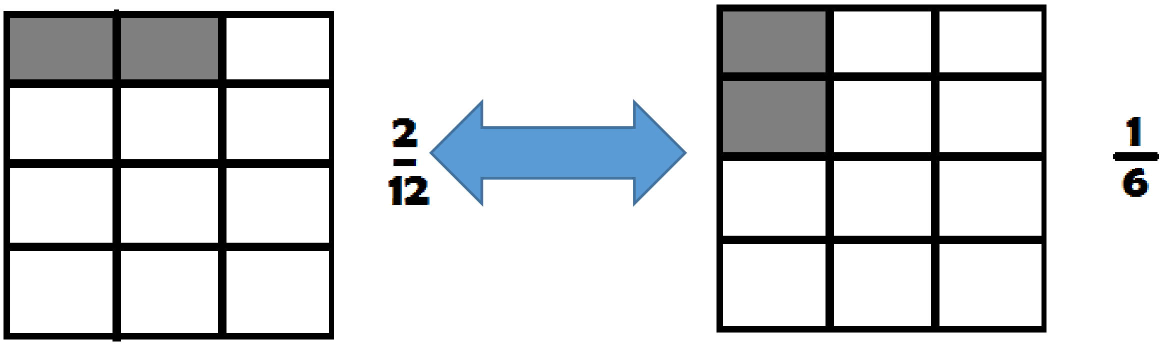
Podemos entender o cálculo da fração de alunos que jogaram basquete como $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3}$, ou seja, uma fração da outra fração.



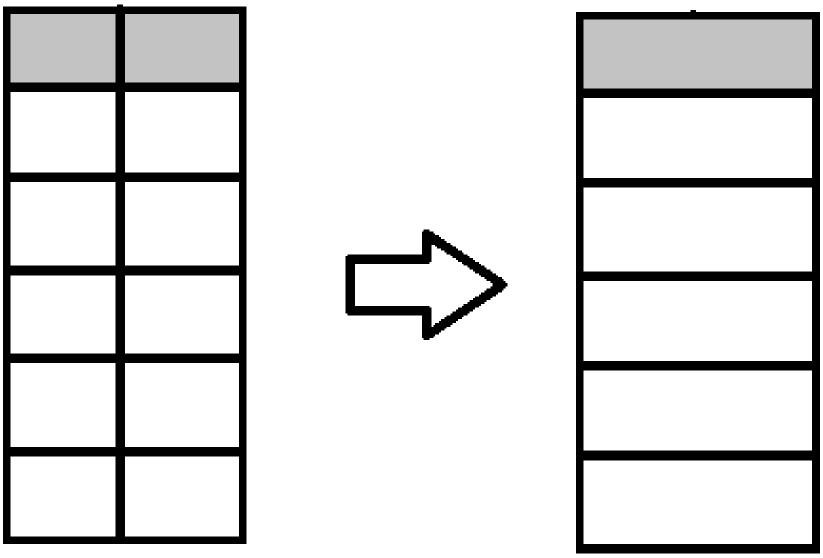
Calculando a fração sobre a fração, temos:



Que tem a sua forma irredutível dada por:



Que podemos também, visualizar desta forma:



Solução 2:

Para multiplicarmos uma fração por outra fração, basta multiplicarmos os numeradores entre si e os denominadores também entre si.

Em termos gerais, temos: $\frac{a}{b} x \frac{c}{d} = \frac{a\ x\ c}{b\ x\ d}$, com a e c ∈ N, b e d ∈ N*.

Encontraremos esse resultado multiplicando a primeira fração pela segunda.

$\frac{2}{4} x \frac{1}{4} = \frac{2\ x\ 1}{3\ x\ 4} = \frac{2}{12}$ → multiplica-se numerador com numerador e denominador com denominador.

Portanto, $\frac{2}{12}$ dos alunos da turma jogaram basquete.

Esta fração também pode ser simplificada, dividindo-se o numerador e o denominador por 2.

$$\frac{2:2}{12:2} = \frac{1}{6}$$

Seção 03 – Exercícios

Efetue as seguintes multiplicações, simplificando o resultado quando possível:

Grupo 1

a) $2.\frac{3}{5}$

b) $3.\frac{4}{7}$

c) $5.\frac{2}{9}$

d) $6.\frac{3}{11}$

Grupo 2

e) $2.\frac{7}{10}$

f) $4.\frac{6}{8}$

g) $5.\frac{4}{10}$

Grupo 3

h) $\frac{1}{2}.\frac{5}{7}$

i) $\frac{4}{3}.\frac{7}{9}$

j) $\frac{7}{3}.\frac{4}{5}$

k) $\frac{6}{5}.\frac{4}{3}$

l) $\frac{2}{3}.\frac{3}{5}$

Grupo 4: Multiplicação aplicando cancelamento

m) $\frac{2}{5}.\frac{3}{4}.\frac{1}{3}$

n) $\frac{15}{14}.\frac{7}{4}.\frac{8}{5}$

o) $\frac{10}{5}.\frac{13}{4}.\frac{16}{20}.\frac{4}{13}$

p) $\frac{18}{21}.5.\frac{7}{9}.\frac{8}{16}$

q) $2.\frac{12}{5}.\frac{10}{3}$

r) $\frac{5}{4}.0.\frac{12}{7}$

s) $2.\frac{3}{5}.\frac{1}{2}.\frac{2}{8}$

t) $\frac{7}{3}.\frac{8}{21}.\frac{13}{4}$

Grupo 5

a) $\frac{3}{4}.\frac{1}{2}=$

e) $\frac{2}{3}.\frac{1}{4}.\frac{8}{5}=$

i) $\frac{6}{5}.\frac{25}{3}.\frac{9}{2}=$

b) $\frac{9}{7}.\frac{3}{4}=$

f) $\frac{14}{5}.\frac{2}{7}.\frac{49}{6}=$

j) $\frac{16}{15}.\frac{7}{14}.\frac{5}{8}=$

c) $\frac{8}{5}.\frac{7}{8}=$

g) $\frac{8}{15}.\frac{1}{3}.\frac{45}{16}=$

k) $\frac{18}{12}.\frac{2}{28}.\frac{22}{9}=$

d) $\frac{17}{7}.\frac{4}{17}=$

h) $\frac{3}{7}.\frac{4}{9}.\frac{14}{3}=$

l) $\frac{147}{18}.\frac{9}{49}.\frac{4}{21}=$

Questões contextualizadas

1. Um grande depósito foi esvaziado a um terço da sua capacidade e, mais tarde, do que sobrou foram retirados três quartos. Qual a fração que restou da capacidade total do reservatório?

2. Meus dois sobrinhos me visitaram neste final de semana e lhes dei $\frac{4}{5}$ dos doces que eu possuía em casa. Do que eu dei a eles, o primeiro ficou comi $\frac{1}{4}$ e o segundo ficou com o restante. Qual a fração do total de doces que eu tinha ficou com cada um deles?

3. Das figurinhas que eu possuía, $\frac{3}{4}$ eu perdi, $\frac{2}{5}$ das que sobraram foram dadas ao meu irmão, ficando 72 delas comigo. Quantas figurinhas foram dadas ao meu irmão?

4. Dona Victória recebeu uma herança de seu falecido avô. Aplicou $\frac{3}{5}$ dessa herança na bolsa de valores e com metade do restante comprou um sofá novo para sua casa. Os R$6.000,00 restantes gastou em uma viagem à Disney.

a) Quanto a dona Victória recebeu de herança?

b) Quanto custou o sofá novo?

c) Quanto Dona Victória aplicou na bolsa?

Seção 04 – Considerações finais

O foco do presente estudo é o ensino de frações, tema fundamental dada a sua importância na concepção dos números racionais. É um assunto de extrema relevância na formação do cidadão, devido ao seu caráter elementar, constando nos currículos escolares desde as séries iniciais do Ensino Fundamental, permeando toda a matemática da educação básica, em conteúdos como razão, proporção, probabilidade entre outros.

De fato, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN, um dos objetivos do ensino da matemática para o segundo ciclo do Ensino Fundamental (atuais 4° e 5° anos) é: *construir o significado do número racional e de suas representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social* (MEC [1], 2001, p. 80).

Sendo assim, a aprendizagem do tema se torna imprescindível, não só para a matemática da escola básica, mas para o desenvolvimento intelectual do estudante, pois segundo BEHR et al. ([2], 1983, p. 91):

> Os conceitos associados aos números racionais estão entre as ideias mais complexas e importantes que as crianças encontram ao longo dos primeiros anos de escolarização. A importância desses conceitos pode ser vista a partir de diferentes perspectivas: (a) do ponto de vista prático, a habilidade de lidar com esses conceitos aumenta enormemente a capacidade da criança de compreender e manejar uma série de situações dentro e fora da escola; (b) de uma perspectiva psicológica, os números racionais constituem um cenário rico para um contínuo desenvolvimento intelectual; (c) do ponto de vista da matemática, o entendimento dos números racionais provê os fundamentos sobre os quais as operações algébricas elementares podem ser desenvolvidas.

Com esse estudo de multiplicação daremos suporte para a divisão de frações.

CAPÍTULO VIII – DIVISÃO COM FRAÇÕES

Orlando Dantona Albuquerque

Licenciado Pleno em Matemática pela Universidade do Estado do Pará (UEPA). Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Pará (UFPA), desde 2014. Atuou como professor do Ensino Básico e Superior na Rede Pública e Privada. Atualmente é professor com Dedicação Exclusiva do Instituto Federal do Pará, atuando nos diversos níveis de ensino, desde o Médio até o Superior. Participa ainda de um grupo de pesquisa pelo Plano Nacional de Formação de Professores (PARFOR/UFPA), onde vêm buscando aprimorar o Ensino de Matemática Básica nas séries iniciais.

Seção 01 - Lista de questões

Considere os problemas abaixo e resolva-os de acordo com sua prática de sala de aula?

1ª Situação: Resolva a seguinte divisão $\frac{1}{2} \div \frac{2}{3}$.

2ª Situação: Um homem deixou de herança para seus três filhos, um terreno que deveria ser dividido em partes iguais. Um dos herdeiros, Márcio, resolveu dividir a sua parte entre seus 4 filhos. Qual a fração do terreno ficará com cada filho de Márcio?

Os problemas acima apresentados são exemplos de divisão de frações. Como dividir duas frações? A regra construída para esse tipo de cálculo é a de multiplicarmos a fração que está na posição do dividendo pelo inverso da fração que ocupa a posição do divisor: A princípio, parece ser uma regra simples. No entanto, gera algumas curiosidades. Por que invertemos a operação e uma das frações? Como essa regra foi elaborada?

O objetivo desse capítulo é aprofundar e entender a construção e o significado da divisão de fração e sua relação com outros conceitos matemáticos.

Seção 02 - Resoluções

<u>Resolveremos a 1ª situação problema</u>

Método Usual (Algoritmo de Euclides)

$$\frac{1}{2} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{2} x \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

Método de Agrupamento – Usando frações equivalentes

Consideremos inicialmente uma divisão D de duas frações, denotada por:

$$D = \frac{1}{2} \div \frac{2}{3}$$

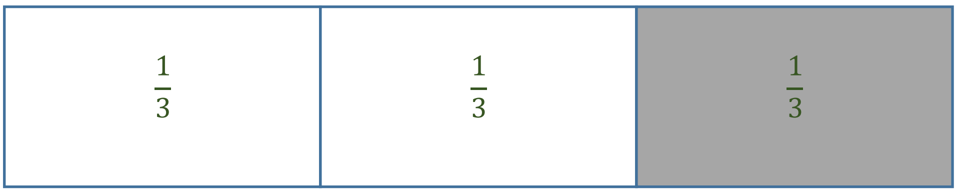
Um modo fácil para explicar esta divisão é tomar as duas frações com o mesmo denominador, usando frações equivalentes e realizar a divisão do *primeiro numerador* pelo *segundo numerador* e do *primeiro denominador* pelo *segundo denominador*, como vemos abaixo:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} \div \frac{2}{3} \\ &= \frac{3}{6} \div \frac{4}{6} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

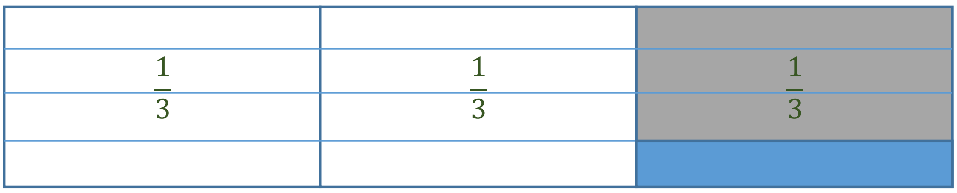
<u>Resolveremos a 2ª situação problema</u>.

Geometricamente

Vamos considerar a seguinte figura, que ilustra a situação:



Vamos destacar a última parte que será dividida em quatro partes.



Observando a figura vemos que cada filho ficará com $\frac{1}{12}$ da área total do terreno que foi dado como herança.

Método Usual (Algoritmo de Euclides)

$$\frac{1}{3} \div 4 = \frac{1}{3} \div \frac{4}{1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Método de Agrupamento – Usando frações equivalentes

Consideremos inicialmente uma divisão D de duas frações, denotada por:

$$D = \frac{1}{3} \div 4$$

$$= \frac{1}{3} \div \frac{4}{1}$$

Transformando as duas frações em *frações equivalentes* de mesmo denominador, e dividindo os respectivos numeradores e denominadores, temos:

$$D = \frac{1}{3} \div \frac{12}{3}$$

$$= \frac{1}{12}$$

Seção 03 - Por que sempre dá certo o Método Usual?

Deve ficar a dúvida: Por que ao usar o Método Usual (Algoritmo de Euclides), utilizamos a regra de conservar a primeira fração e multiplicar com o inverso da segunda fração?

Para responder, de fato, essa questão e acabar com qualquer tentativa de resposta mal sucedida, vamos generalizar o Método do Agrupamento, demonstrando:

Tomemos duas frações quaisquer $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ e façamos a divisão entre elas, nessa ordem, ou seja:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$$

Para criarmos *frações equivalentes* de mesmo denominador, basta multiplicarmos os termos da primeira fração pelo denominador da segunda fração e multiplicarmos os termos da segunda fração pelo denominador da primeira fração, assim:

$$\frac{a.d}{b.d} \div \frac{c.b}{d.b} = \frac{a.d}{b.d} \div \frac{b.c}{b.d}$$
$$= \frac{a.d}{b.d} \div \frac{b.c}{b.d}$$

Agora, dividindo os respectivos numeradores e denominadores, obtemos:

$$\frac{a.d}{b.c} = \frac{a}{b}.\frac{d}{c}$$

Daí temos o Método Usual:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.\frac{d}{c}$$

Demonstrando, facilmente, que para resolvermos a divisão de frações, é equivalente conservarmos a primeira fração e multiplicarmos pelo inverso da segunda fração.

Seção 04 - Lista de questões suplementares

Aqui veremos alguns problemas interessantes, mas ressaltamos que é de fundamental importância que você crie situações – problemas baseados no cotidiano do aluno.

Resolva os problemas a seguir:

01) Para fazer uma camiseta infantil é preciso $\frac{4}{5}$ de metro de tecido. Quantas camisetas podem ser feitas com 48 metros de tecido?

02) João tem $\frac{1}{4}$ de um bolo e quer dividi-lo em 6 partes iguais. Que fração do bolo representará cada parte que João obtiver?

03) Lúcia recebeu de seu pai os $\frac{4}{5}$ dos chocolates contidos em uma caixa. Do total de chocolates recebidos, Lúcia deu a terça parte para o seu namorado. Que fração dos chocolates contidos na caixa recebeu o namorado de Lúcia?

04) Maria precisou de 18 horas de aulas de reforço de matemática. Cada aula durava $\frac{3}{2}$ de horas. Quantas aulas de reforço Maria teve?

05) Os trabalhadores demoraram 84 horas para consertar uma estrada. Trabalharam $\frac{21}{4}$ de horas por dia. Quantos dias durou o conserto?

Seção 05 - Observações importantes

<u>Na resolução de problemas, segundo Polya</u>:

Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter.

CAPÍTULO IX – EXISTE RELAÇÃO ENTRE PERÍMETRO E ÁREA?

Edson Ramon Lobo Lopes

Mestre pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Pará (PROFMAT-UFPA); atualmente trabalhando como Professor do ensino médio e fundamental em escolas públicas e particulares de Belém e na Inteceleri Soluções.

- Como trabalhar o entendimento de perímetro e área.
- Maneiras para calcular o perímetro e área.
- Entendendo e se fazendo entender no trabalho com os perímetros e as áreas das figuras planas.
- Maneiras de calcular o perímetro e a área de uma figura geométrica.
- Investigando relação entre Perímetro e Área.

Material: Fita métrica, que pode ser comprada pela escola ou cedida por alguém, caderno e lápis, para fazer as anotações e registra as conclusões.

Seção 01 – Perímetro

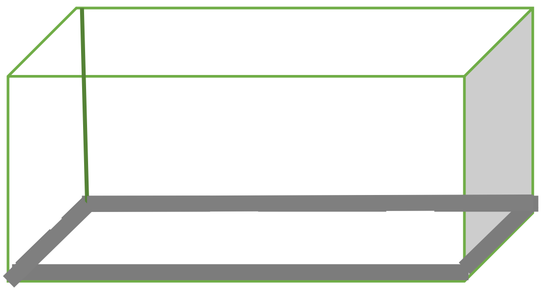
- Em primeiro lugar precisamos fixar bem o que é o perímetro de uma figura plana.

1ª situação:

Dentro da sala de aula vamos medir o comprimento do contorno de cada parede lateral, com uma fita métrica, e preencher a tabela abaixo.

Parede	Comprimento
Parede 1	
Parede 2	
Parede 3	
Parede 4	

Estratégia: Com a fita métrica meça o comprimento do contorno de cada parede e peça para os alunos registrarem esses valores na tabela, em seguida, faça a seguinte pergunta, para aguçar a curiosidade deles: Se fossemos pintar uma listra de cor verde na base de cada parede, qual o comprimento total dessa listra?



Verifique a resposta, faça as considerações necessárias e lembre que tipo de figura está sendo formada, geralmente uma sala tem o formato de um paralelepípedo, logo a listra é o contorno de um retângulo, então já podemos falar que o comprimento deste contorno é chamado de perímetro.

Assim temos outras perguntas:

1ª) O que é o perímetro?

R: O perímetro é o comprimento do "contorno" de uma figura geométrica.

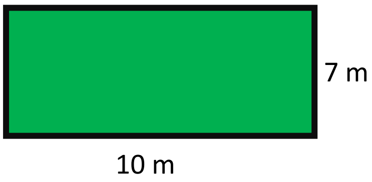
2ª) Como se calcula o perímetro de uma região?

R: O perímetro varia de figura para figura, mas para sabermos o perímetro de uma região poligonal, devemos somar todos os lados do polígono, ou seja, calcular o "tamanho" do contorno da figura.

Exemplos:

1. Um terreno tem o formato retangular com as seguintes medidas, 7 metros de frente e 10 metros de fundo, deseja-secercá-lo para evitar invasões. Quantos metros de cerca precisaríamos para esta tarefa?

R:



Vamos enfatizar que para cercar este terreno devemos saber o tamanho de seu contorno, logo o valor do perímetro desta propriedade.

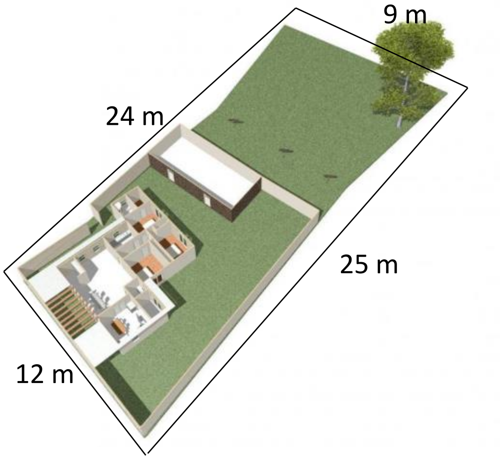
Como o retângulo tem lados opostos de mesma medida, então dois lados medem 7 m e os outros dois medem 10 m, assim para calcular o comprimento de cerca que precisamos para cercar esta propriedade é:

7 + 7 + 10 + 10, logo o perímetro mede 34 m.

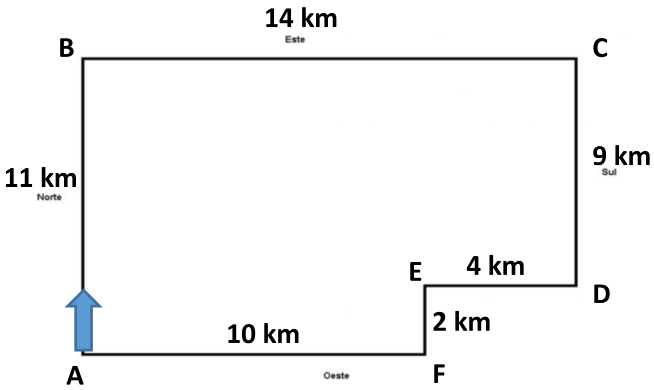
Resposta: Para realizarmos a tarefa precisamos de 34 metros de cerca.

Agora é com você!

01. O terreno a baixo tem o formato aproximado de um retângulo e suas medidas estão indicadas na figura, deseja-se cercá-lo e para isso precisamos saber o comprimento total de seu contorno, fazendo os cálculos necessários encontramos o valor do comprimento deste contorno igual a?

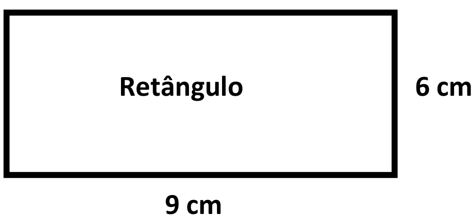


02. Uma corrida de rua tem o percurso mostrado abaixo. Os corredores têm que completar o contorno **ABCDEFA**, ou seja, sair do ponto **A** e chegar novamente no ponto **A.** Se o comprimento de cada trecho está indicado na figura. Podemos afirmar que o tamanho total desse percurso é?

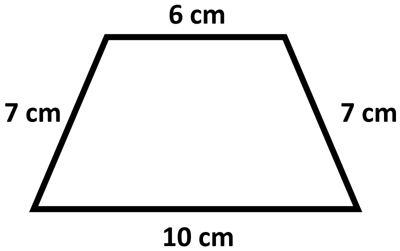


03. Determine o perímetro das figuras abaixo:

a)



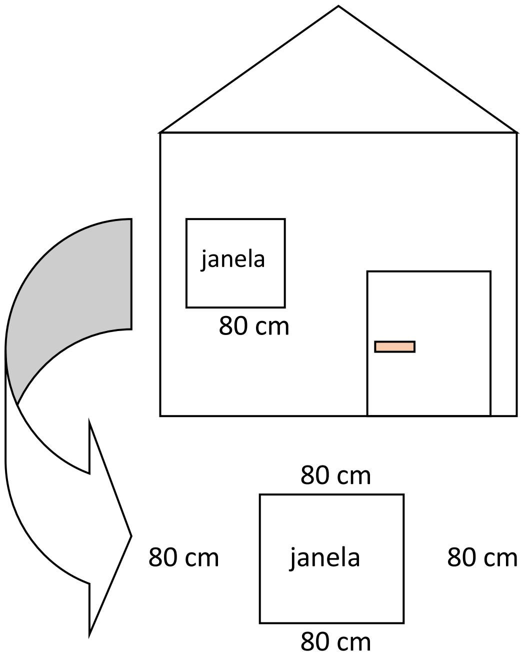
b)



2ª Situação: A janela da frente da casa de Pedrinho tem o formato de um quadrado, para fixar essa janela na parede precisa-se de uma base de madeira, com o mesmo formato da janela. Qual o comprimento desta base, se a janela tem 80 centímetros de lado?

Obs.: Aqui nas considerações sugeridas reforce que o quadrado é um retângulo.

R:



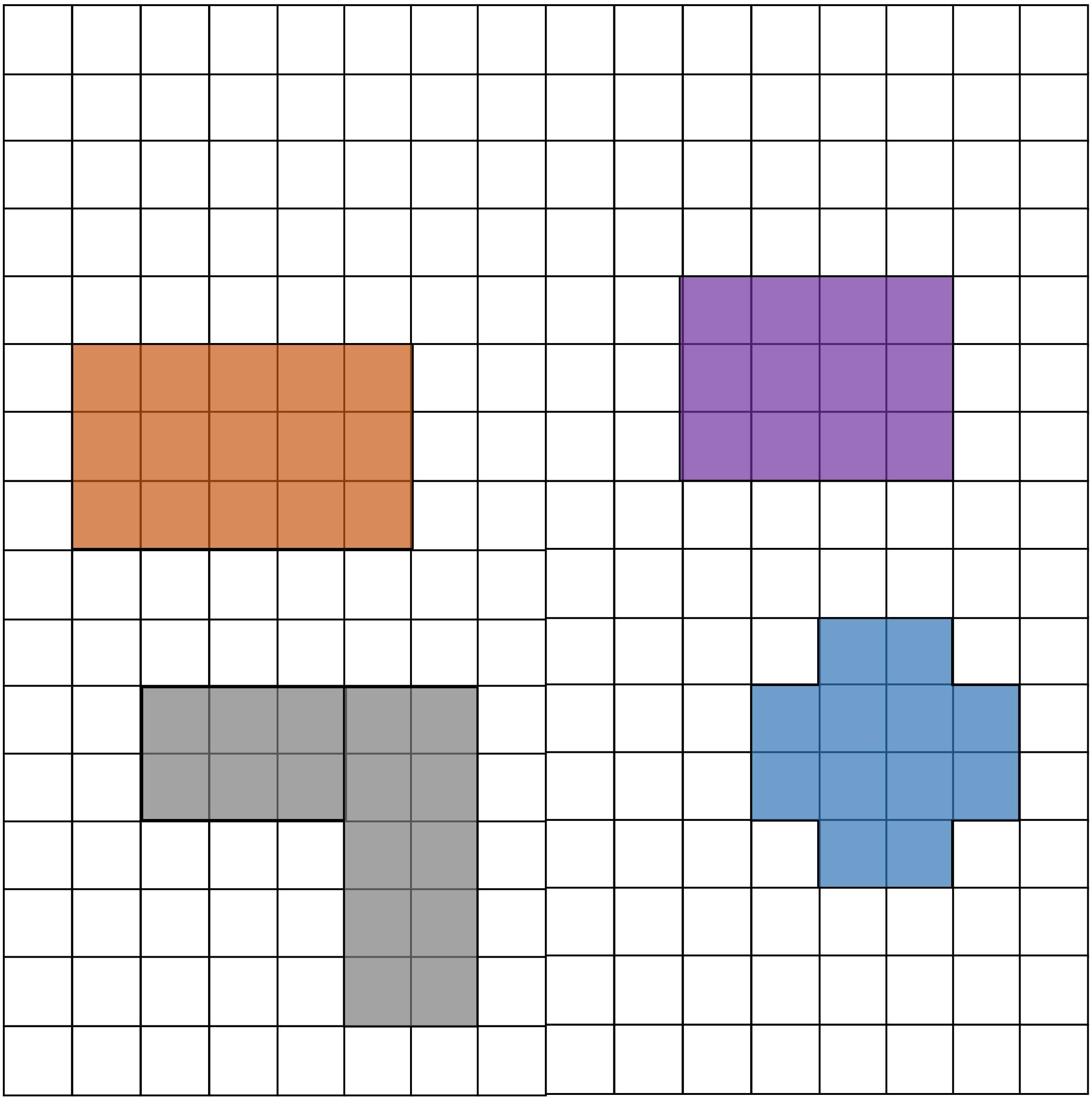
Como o quadrado tem todos os lados iguais podemos calcular o perímetro dessa figura da seguinte maneira:

80 + 80 + 80 + 80 = 320, logo comprimento da base é de 320 cm, ou simplesmente multiplicando.

4 x 80 = 320 cm.

Resposta: O comprimento da base da janela é de 320 centímetros.

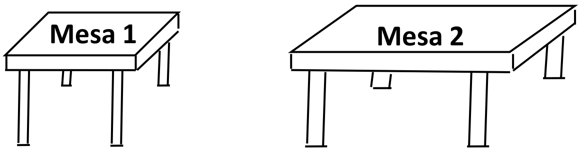
3ª Situação:



Supondo que cada quadradinho da malha quadriculada tenha lado igual a 1 cm, qual o perímetro de cada figura?

Se o lado desses quadradinhos tivesse tamanhos iguais a 3 cm, qual seria o perímetro dessas figuras?

4ª Situação: Fernanda trabalha com eventos e está decorando mesas de formatos retangulares diferentes, uma com 4 lugares e outra com 6 lugares, veja as figuras abaixo. Ela precisa cobrir as pernas das mesas com panos cuidadosamente escolhidos para ficarem bem bonitas. Para fixar os panos nas mesas Fernanda usa uma fita adesiva na borda das mesas, se a **mesa 1** tem a forma de quadrado de lado **60 cm** e a **mesa 2** tem o formato de um retângulo de lados **110 cm** e **58 cm**, responda:



a) O tamanho de fita adesiva que ela precisará para fixar os panos nas mesas **1 e 2** é?

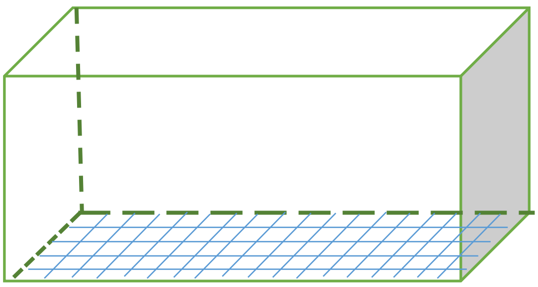
b) Se um rolo de fita adesiva tem 160 cm de fita, quantos rolos ela precisa comprar?

c) Se cada rolo custa R$ 3,00, quanto Fernanda gastará com a fita adesiva?

Seção 02 – Área

Analise a seguinte situação:

Ainda dentro da sala de aula podemos fazer a seguinte indagação: Se nós fossemos revestir o piso da sala com lajotas. Quanto a área que precisaríamos cobrir?



Estratégia. Faça a seguinte pergunta: " O que precisamos saber para calcular a quantidade de lajotas que serão usadas? "

Verificando as respostas você pode começar a filtrá-las para um direcionamento desejado, por exemplo:

As seguintes respostas lhe ajudaram muito: "precisamos saber a área do piso." "o tamanho de cada lajota.", "a quantidade de lajota que vem em cada caixa..."

A primeira resposta nos leva a outra pergunta:

1ª) O que é a área de uma figura plana?

R: A área de uma figura plana é a "medida" da região "ocupada" pela figura.

Temos ainda a seguinte pergunta a ser feita:

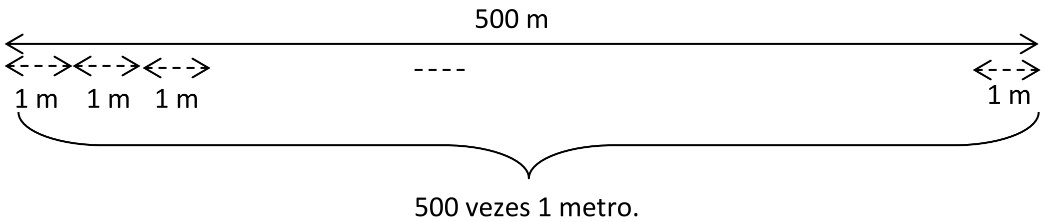
2ª) Como se calcula a área das figuras planas?

Primeiramente vamos pensar em uma unidade padrão.

Assim como foi criado o metro como unidade padrão para se medir comprimento, veja o exemplo:

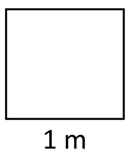
O que significa andarmos 500 metros?

R: Significa que andamos 500 vezes o comprimento de 1 metro, certo? Ou seja, é o número de vezes que o comprimento de 1 metro cabe no comprimento dado.



Também foi criada uma **unidade padrão** para se medir a área de uma figura plana, chamada de metro quadrado e representada **(m²)**.

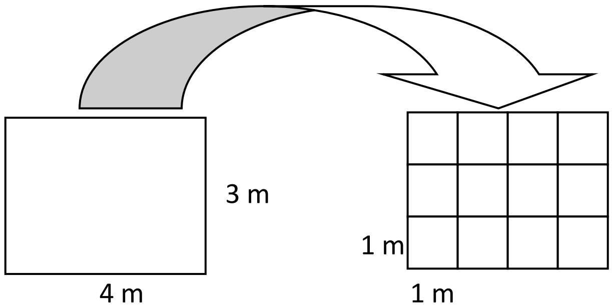
Geometricamente esta unidade é representada por um quadrado tem seus lados medindo 1 metro.



Vamos usar esse conhecimento para calcular a área de algumas figuras planas.

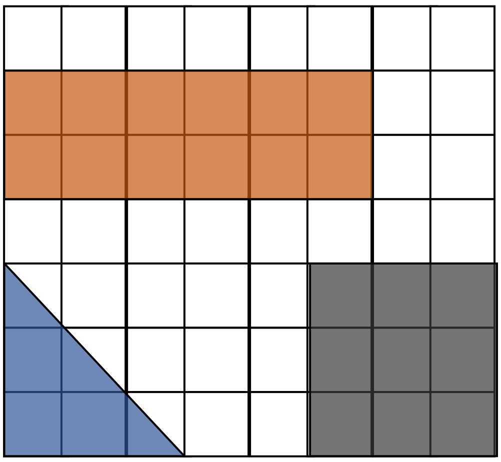
O que significa dizer que o retângulo tem área igual a 12 m^2?

R: Significa que dentro desse retângulo cabem 12 quadrados de $1m^2$ de área, como assim? Veja a figura:



Usando a malha quadriculada podemos calcular a área de várias figuras planas de forma exata, veja:

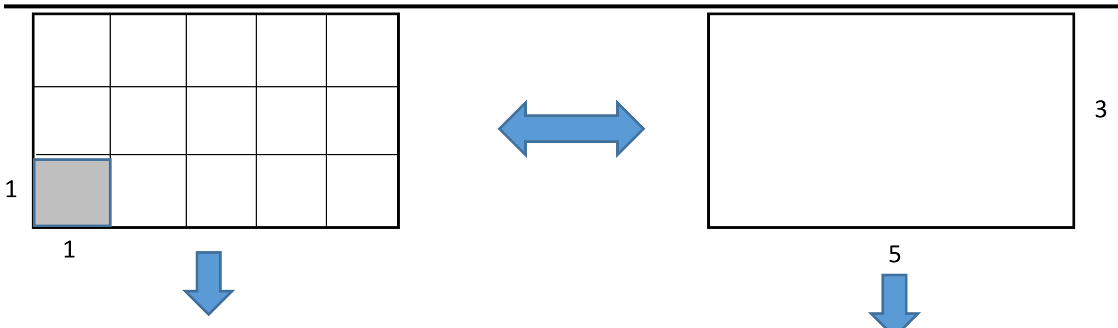
Calcule as áreas do quadrado, do retângulo e do triângulo representados na figura abaixo.



Os comprimentos dos lados dos quadradinhos medem 1 cm.

Se o comprimento de cada lado dos quadradinhos for igual a 8 cm, quanto medirá a área de cada figura acima?

Note que quando se trata de um retângulo basta sabermos o comprimento de seus lados, com essas informações multiplicamos esses valores e descobrimos sua área, veja:



A área é 15 vezes a área do quadrado pintado

De uma forma mais rápida podemos calcular a área de um retângulo multiplicando suas dimensões.

5 x 3 = 15

Voltando a indagação inicial.

Ainda dentro da sala de aula, podemos fazer a seguinte indagação, se nós fossemos revestir o piso da sala com lajotas. Quanto de área precisaríamos cobrir?

Então para calcularmos a área a ser coberta de lajotas precisamos saber as dimensões do piso da sala, como geralmente os pisos das salas são de formatos retangulares, basta saber a largura e o comprimento da sala, e verificarmos quantos quadrados de um metro quadrado (1 m^2) cabem nesta sala de aula.

Daí, surgem outras situações que podemos explorar, como por exemplo:

Se a lajota tem a forma de um quadrado, de lado medindo 30 cm. Quantas lajotas serão necessárias?

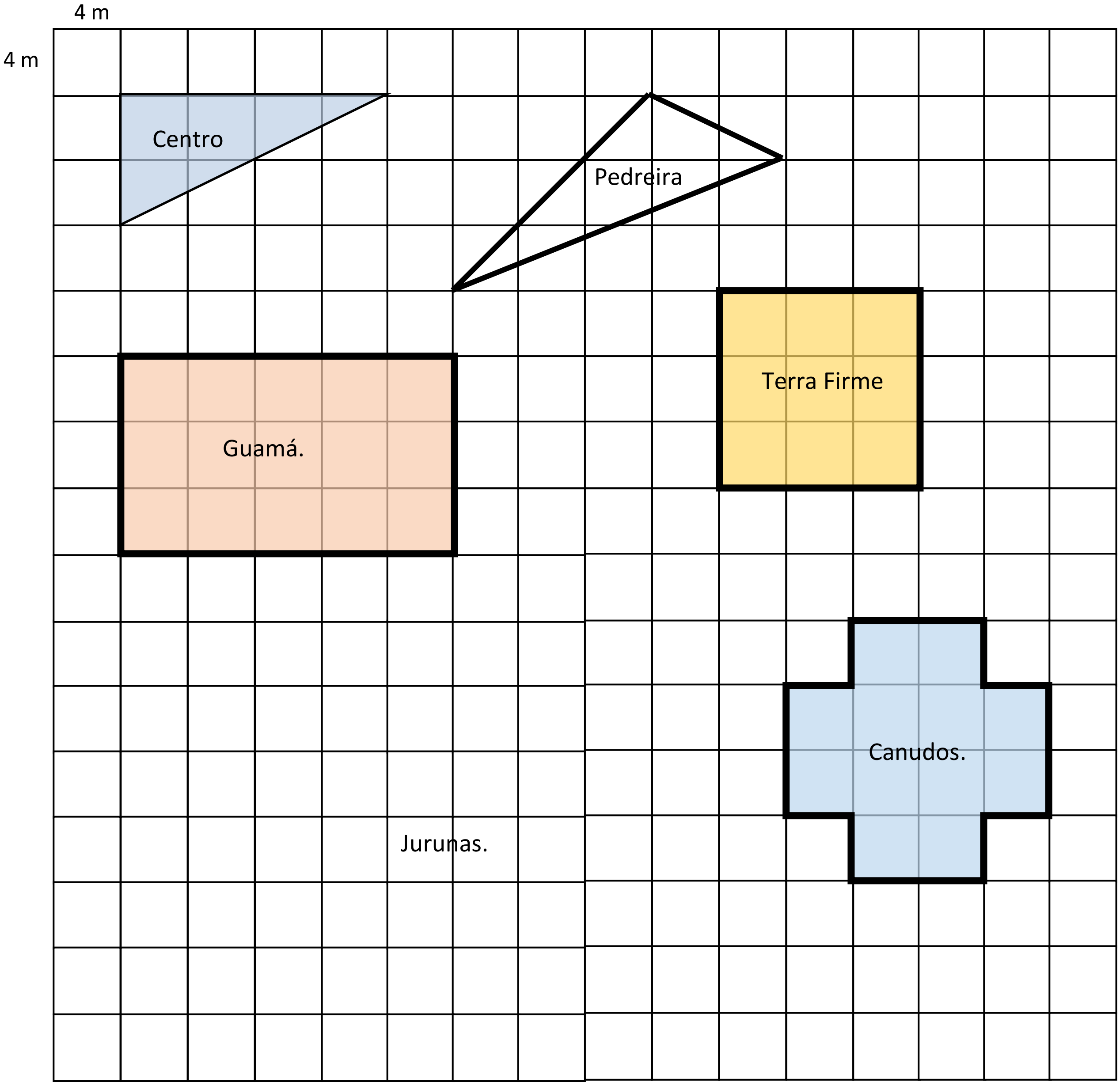
Se na compra da lajota está especificado que cada caixa cobre uma área de 2 m^2. Quantas caixas serão necessárias?

Se o valor da caixa de lajota é R$25,00. Quanto será gasto para fazer esse revestimento?

Assim, respondemos a primeira pergunta.

Temos algumas situações que podem ser exploradas nesse contexto, veja algumas delas.

4ª Situação: Pedro leu vários anúncios no jornal e percebeu que seis terrenos, em bairros diferentes tinham o mesmo preço, R$ 7500,00, mas tinham os tamanhos de suas áreas diferentes, os terrenos estão representados na malha abaixo, considerando apenas a área de cada terreno, qual a melhor opção de compra para Pedro?



Resolução:

- Na malha quadriculada acima calcule a área de cada figura a região que tiver a maior área é a melhor opção.

- Das áreas representadas a que pode causar alguma confusão é a área do trapézio, mas devemos perceber que os cantinhos que estão faltando ou sobrando na figura se encaixam perfeitamente.

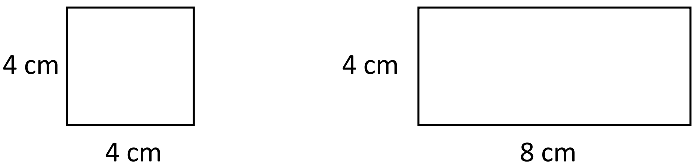
- Se no Guamá o metro quadrado do terreno custa R$ 400,00, quanto Pedro pagará pelo terreno no Guamá?

- Como os preços dos terrenos são iguais, qual o valor do metro quadrado no bairro da Terra Firme?

Existe Relação entre Perímetro e Área ?

5ª Situação: Adaptando uma situação criada por *Lipin Ma*, estudiosa chinesa, no livro *Saber e Ensinar Matemática Elementar*, que diz:

Imagine que uma das suas alunas chega à aula muito entusiasmada. Ela diz-lhe que descobriu uma teoria que você nunca havia ensinado há turma. Explica ter descoberto que a medida que o perímetro de uma figura fechada, no formato de um retângulo, aumenta, a sua área também aumenta. Mostra-lhe a figura seguinte para provar o que está dizendo:



Perímetro = 16 cm

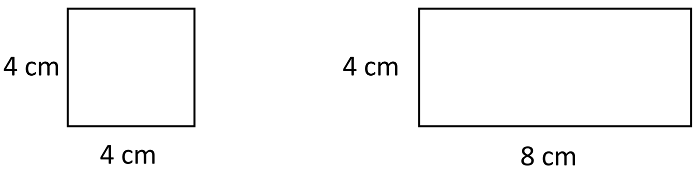
Perímetro = 24 cm

Como você responderia a esta aluna?

- Isso nos leva a várias situações. É necessário que tenhamos muito cuidado com certas afirmações elas podem parecer corretas, mas na verdade podem não estar, existem particularidades a serem consideradas, vejamos algumas.

Como a figura é um retângulo, nós temos situações a serem consideradas:

✓ Se o **perímetro aumenta**, aumentando uma dimensão e deixando a outra com a mesma medida, é o exemplo dado pela aluna, veja:



Perímetro = 16 cm

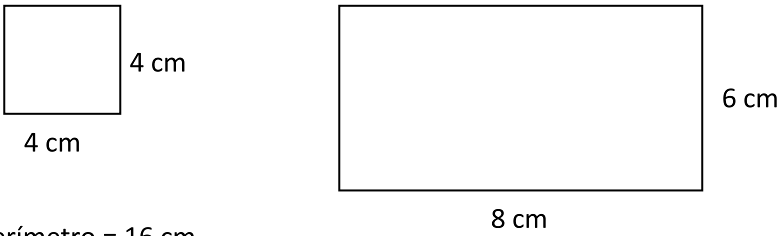
Área = 16 cm²

Perímetro = 24 cm

Área = 32 cm²

Note que **área também aumenta**.

- ✓ Se o **perímetro aumenta**, aumentando as duas dimensões, por exemplo:



Perímetro = 16 cm

Área = 16 cm²

Perímetro = 28 cm

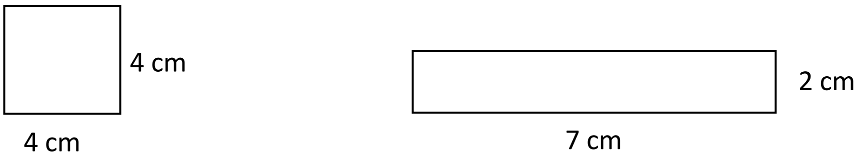
Área = 48 cm²

Note que também neste caso a **área também aumenta**.

- ✓ Se o **perímetro aumenta**, aumentando um lado e diminuindo o outro, por exemplo:

Neste caso, vamos considerar mais algumas situações:

1. **Perímetro aumenta** e a **área diminui**,



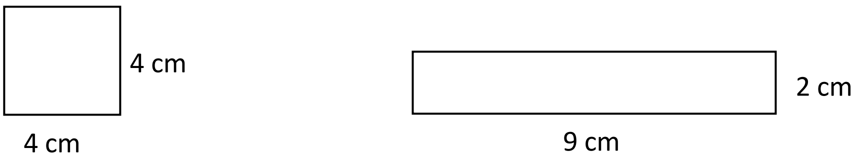
Perímetro = 16 cm

Área = 16 cm²

Perímetro = 18 cm

Área = 14 cm²

2. **Perímetro aumenta** e a **área também aumenta**, veja.



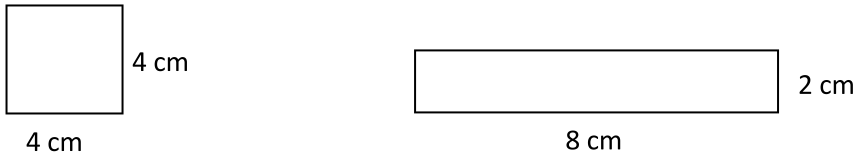
Perímetro = 16 cm

Área = 16 cm²

Perímetro = 22 cm

Área = 18 cm²

3. **Perímetro aumenta** e a **área se mantem constante**.



Perímetro = 16 cm	Perímetro = 20 cm
Área = 16 cm^2	Área = 16 cm^2

Perceba que para uma indagação simples entre perímetro e área podemos desmembrar em várias situações para responder à pergunta da aluna e a resposta é: Não existe uma relação entre perímetro e área, o perímetro pode aumentar ou diminuir e não podemos afirmar nada sobre o que vai acontecer com área, usamos o exemplo do retângulo, mas esta conclusão se faz verdadeira também para os demais polígonos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BIGODE, A. J., & FRANT, J. B. (2011). *Matemática - Soluções para dez desafios do professor* (1ª ed.). São Paulo: Nós da educação.

CENTURIÓN, M. (1994). *Conteúdos e Metodologia Matemática - Números e Operações* (1ª ed.). São Paulo: Scipione.

DE OLIVEIRA, A. R. (s.d.). *http://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Comunicacao_Cientifica/Trabalhos/CC24755508487T.doc.* Acesso em 13 de novembro de 2014, disponível em www.sbembrasil.org.br.

Edivaldo Bianchinni – 5ª série

MA, Liping. (2009). *Saber e Ensinar matemática Elementar* (1ª ed.). Lisboa: Gradiva.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** - 3. ed. - Brasília: Secretaria da Educação Fundamental, 2001.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. (2001.). Acesso em 10 de 08 de 2014, disponível em MEC - Ministério da Educação: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf

MOREIRA, M. A. (s.d.). *http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID80/v7_n1_a2002.pdf.* Acesso em 13 de Novembro de 2014, disponível em www.if.ufrgs.br.

RAMOS, L. F. (2009). *Conversa sobre números, ações e operações: uma proposta criativa para o ensino de matemática nos primeiros anos* (1ª ed.). São Paulo, SP: Ática.

SÁ, P. F. (2009). *Atividades para o ensino de Matemática no nível fundamental* (1ª ed.). Belém: EDUEPA.

SMOLE, K. S., & MUNIZ, C. A. (2013). *A matemática em sala de aula: reflexões e propostas para os anos iniciais do ensino fundamental* (1ª ed.). Porto Alegre: Penso.

http://www.brasilescola.org.br acessado em 14 de abril de 2015

http://www.matematicadidatica.com.br acessado em 16 de abril de 2015