CRISTINA LÚCIA DIAS VAZ

TÓPICOS MATEMÁTICOS DE ALGUNS MODELOS DE INTERFACE DIFUSA

editAedi
Assessoria de Educação a Distância • UFPA

CRISTINA LÚCIA DIAS VAZ

TÓPICOS MATEMÁTICOS DE ALGUNS MODELOS DE INTERFACE DIFUSA

1ª EDIÇÃO

BELÉM - PARÁ

editAedi
Assessoria de Educação a Distância • UFPA

2019

REITOR
Dr. Emmanuel Zagury Tourinho

VICE-REITOR
Dr. Gilmar Pereira da Silva

AUTORA
Cristina Lúcia Dias Vaz

DIAGRAMAÇÃO
Cristina Lúcia Dias Vaz

CAPA
Andreza Jackson de Vasconcelos

IMAGEM DA CAPA
https://pages.nist.gov/pfhub/

EDITORA
EditAedi

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Vaz, Cristina Lúcia Dias.
Tópicos Matemáticos de Alguns Modelos de Interface Difusa / Vaz, Cristina Lúcia Dias
Belém: EditAedi/UFPA, 2019

ISBN: 978-85-65054-83-6

1. Ensino
2. Matemática
3. Ciências Exatas e Naturais

SUMÁRIO

PREFÁCIO

Homenagear um professor, um mestre, uma influência importante em nossa vida, não é tarefa fácil. Escolher as palavras adequadas, pensar nos momentos vividos, entender os ensinamentos, as lições, revelar a gratidão, reconhecer o mérito....

Ser professor é ser capaz de doar. Uma doação generosa e espontânea, não apenas de conhecimentos técnicos, mas, especialmente, de afetos. Doar parte do seu tempo, da sua vida, do que aprendeu.

Contribuir para a formação de alguém é um privilégio e uma grande responsabilidade. Contribuir de modo generoso e afetuoso é para poucos.

O prof. José Luiz Boldrini é um destes poucos mestres que marcam a sua vida e o fazem acreditar que tudo vale a pena. Todas as noites em claro, todos os obstáculos, todos os sacrifícios... Um orientador sábio, atencioso e exigente. Um amigo bondoso, atencioso e amoroso.

Estas notas são frutos do trabalho do prof. Boldrini e uma homenagem ao seu 60° aniversário. Espero com elas expressar a minha gratidão e reconhecimento por sua paciência, compreensão e ensinamentos aos longo destes doze anos que trabalhamos juntos e pelos próximos que, espero, trabalharemos.

É um grande privilégio poder compartilhar com o prof. Boldrini os desafios dos problemas originados por modelos de campo de fase. Desafios que tiveram início com a minha tese de doutorado, sob sua orientação. Nestas notas descreverei alguns percursos que trilhamos neste caminho.

Para finalizar, gostaria de destacar uma das qualidades do prof. Boldrini que muito de impressiona: a sua capacidade de ver no erro um talento.

Somente um poeta da grandeza de Ferreira Gullar poderia traduzir em palavras uma qualidade rara como esta...

No princípio
era verso
alheio

Disperso
em meio
às vozes
e as coisas
o poeta dorme
sem se saber

ignora o poema
não tem nada a dizer

o poema péssimo
revela
ao ser lido
que há no leitor
um poeta adormecido

o poema péssimo
(por péssimo) pode
ser comovido

inda que errado
em sua emoção
inda que truncado
em sua dicção
ele guarda um barulho
de quintal, de sala,
de vento ou de chuva
de gente que fala:
ivo viu a uva

o poeta ao ler
o péssimo poema
nele não se vê

na palavra ou verso
onde não se lê –
se lê ao reverso
em seu vir a ser

e assim vira ser

já que a escrita cria
o escrivinhador:
soletra na pétala

o seu nome: flor

o mundo que é fácil
de ver ou pegar
é difícil de ter:
difícil de falar
a fala que o dá

e a fala vazia
nem é bom falar
se a fala não cria
é melhor calar

ou – à revelia
do melhor falar –
falar: que a poesia
é saber falhar

(Ferreira Gullar - Muitas vozes)

Talvez a maior lição que esta sua aluna aprendeu, querido professor Boldrini, foi que "Matemática é saber falhar". Obrigada por tudo.

Belém - Julho de 2012

Cristina Lúcia Dias Vaz

INTRODUÇÃO

Problemas com mudança de fase tem sido extensivamente estudados desde o século passado quando J. Stefan formulou o problema para encontrar a distribuição de temperatura durante a solidificação da água.

Metodologicamente podemos classificar o estudo dos problemas de mudança de fase em três grupos: problemas do tipo Stefan, método da entalpia e modelos de interface difusa. Nos problemas clássicos do *tipo Stefan* tanto para solidificação de materiais puros e ligas, a hipótese fundamental é considerar a região de transição de fase como uma superfície regular, com localização desconhecida, chamada *interface* (veja, figura 1b)).

Nestes modelos as equações que governam as variáveis termodinâmicas, como por exemplo, temperatura e/ou concentração, são baseadas em princípios de conservação e formuladas, independentemente, em cada uma das fases, isto é, são válidas em cada lado da interface. Deste modo, uma condição deve ser imposta na interface, para descrever conservação de energia e/ou massa. Esta condição é conhecida como *condição de Stefan*.

Em geral, os modelos clássicos do tipo Stefan não incorporam vários efeitos, em particular, os efeitos causados pela tensão superficial e os efeitos convectivos. Efeitos causados pela tensão superficial são tratados nos chamados *problemas de Stefan modificados*, os quais consideram uma condição conhecida como *condição do tipo Gibbs-Thompson*. Mais detalhes sobre os problemas do tipo Stefan podem ser encontrados em Alexiades & Solomon [3] e Rubinstein [58].

Do ponto de vista computacional, a maior dificuldade da formulação do tipo Ste-

fan é a exigência que a interface deva ser numericamente *seguida*. Deste modo, formulações que incorporam implicitamente a condição de Stefan são mais versáteis para simular processos de mudança de fase nos quais a interface é complexa. Esta é principal característica do método chamado *entalpia*.

O método da entalpia é a formulação dos problemas do tipo Stefan que incorpora a condição da interface e usa a *entalpia* para descrever as fases do processo. Em tais formulações não existe nenhuma condição imposta *a priori* na interface, que tanto pode ser uma superfície regular ou uma região de mistura, porém esta formulação tem a desvantagem de não incorporar algumas condições especiais de interface, tais como efeitos de super-resfriamento (para mais detalhes consulte [3, 71] e as referências citadas).

Nas últimas décadas, uma formulação bastante utilizada para descrever fenômenos de transição de fase tem sido o método de *interface difusa*. Originalmente, tal método foi formulado para investigar o comportamento de líquidos na vizinhança de seus pontos críticos e depois aplicado em muitas situações físicas tais como cristal líquido [34], supercondutividade [35], decomposição spinodal [20, 19] e ligas binárias [18, 4, 14]. Os trabalhos [51] e [57] apresentam a evolução do desenvolvimento histórico deste método.

A principal idéia do método de interface difusa é supor que a interface tem uma *espessura*, embora fina (veja, figura 1a)), e pode ser considerada uma região interfacial, na qual as quantidades físicas variam de modo contínuo. Um exemplo importante de modelos de interface difusa são os chamados *modelos de campo de fase*.

Nos modelos de interface difusa, a mudança de fase é descrita por um conjunto de variáveis chamadas *campo de fase ou parâmetro de ordem*, que são funções contínuas do espaço e do tempo. A posição da interface é dada por um valor constante das variáveis campo de fase e as equações de evolução destas variáveis são definidas em todo o domínio, ou seja, nenhuma condição é imposta na interface. Por exemplo, em solidificação considera-se uma função $\varphi(x,t)$, cujos valores indicam a fase do material: para $\varphi = 1$, a fase é *sólida*; para $\varphi = 0$, a fase é *líquida*, para $0 < \varphi < 1$, a fase é *misturada* e a interface localiza-se em $\varphi = 1/2$.

Quando $\varphi(x,t)$ indica somente a fase é um parâmetro de ordem *não conservativo*. Porém, em alguns processos de mudança de fase, como por exemplo, solidificação de ligas binárias ou mistura de dois fluidos, $\varphi(x,t)$ pode representar a *concentração* de uma das substâncias, e neste caso é um parâmetro de ordem *conservativo*.

O primeiro modelo campo de fase para descrever a solidificação de materiais puros foi proposto por Langer e Fix [30, 42]. Este modelo foi posteriormente desenvolvido e generalizado por vários pesquisadores. Para maiores detalhes consulte, por exemplo, [15, 16, 23, 29, 50] e referências citadas.

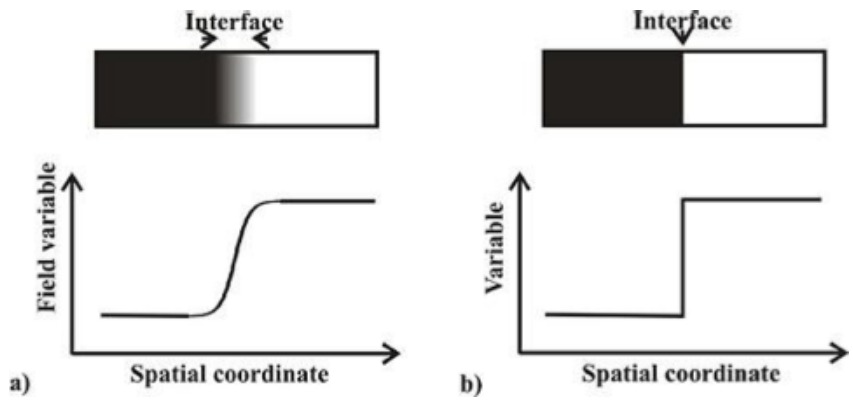

Figura 1: a) Interface difusa, b) Modelo do tipo Sfefan

Fonte: http://nele.studentenweb.org/research/?subject=PFM

Fundamentalmente, esta formulação usa a energia para descrever as fases do processo, ou seja, considera-se um funcional energia livre com dois tipos de contribuições da energia: uma parcela dependendo do gradiente do campo de fase (e que basicamente fornece a energia acumuladas na interface) e outra correspondente à densidade de energia potencial. Este funcional é conhecido como *funcional energia Ginzburg-Landau* e é do tipo

$$F = \int_\Omega f(\varphi,\theta) + \gamma(\varphi,\theta)|\nabla\varphi|^2\, dx.$$

Ressaltamos que uma das principais vantagens do método campo de fase é ser uma ferramente computacional efeciente para calcular interfaces complexas associadas, por exemplo, ao crescimento de cristais.

Uma grande variedade de problemas têm sido investigados com a formulação de

interface difusa, entre eles, podemos citar os seguintes: fenômenos da hidrodinâmica envolvendo capilaridade, movimento de contato, nucleação, crescimento de cristais. etc. Mais detalhes sobre a formulação campo de fase e suas aplicações podem ser encontrados no trabalho de N. Moelans *et al* [51].

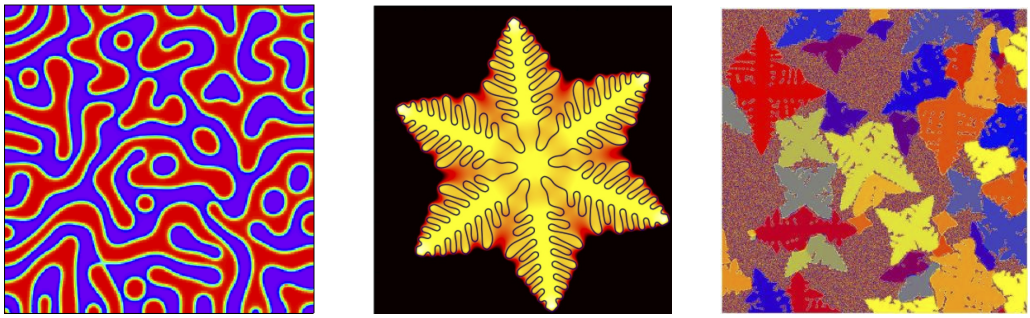

Figura 2: Fonte: https://pages.nist.gov/pfhub/

Um aspecto restritivo que merece ser destacado, é o fato que, na maioria dos modelos mencionados anteriormente, há implicitamente a hipótese de que não ocorre transporte macroscópico de material durante o processo físico. Isto é, supõe-se que, mesmo na fase fluida, não ocorre fluxo de material e, portanto, as únicas questões relevantes são aquelas associadas aos fluxos de energia e as mudanças de fase. Entretanto, em muitas situações práticas relevantes, esta não é uma hipótese realista e os efeitos dos fluxos na parte fluida são importante para o resultado final do processo (veja, por exemplo, [9]). Nestes casos, é necessário acoplar às equações anteriores as equações que descrevem o escoamento que ocorre na região fluida. Este tipo de consideração tem um grau maior de dificuldade.

Para obtenção de um modelo, os trabalhos [8, 21, 9] introduzem a convecção na fase fluida usando o método de interface difusa e simulam a região de mistura como um *meio poroso*. Especificamente, consideraram como parâmetro de ordem a fração sólida $\varphi(x,t)$, ou seja, $\varphi = 1$ na fase sólida, $\varphi = 0$ na fase líquida e $0 < \varphi < 1$ na fase misturada. Esta fração sólida é acoplada as equações de Navier-Stokes por um termo fonte adicional. Este termo fonte simula o comportamento da zona misturada como um *meio poroso*. Em [8, 21], os autores usam como termo adicional uma penalização

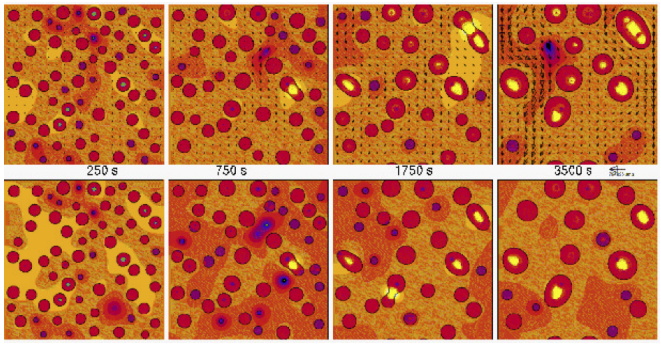

Figura 3:

Fonte: http://blogs.cae.tntech.edu/hydration-kinetics/files/2009/07/bullard-can-csh.pdf

do tipo *Carman-Kozeny* e em [9], os autores usam uma força interfacial dissipativa. Nas duas formulações, a fase sólida é considerada um sólido rígido e estacionário.

Outra abordagem, descrita em [5, 6], considera a formulação da mudança de fase entre dois fluidos newtonianos e simula a fase sólida como um *líquido altamente viscoso* com a viscosidade dependendo do parâmetro de ordem.

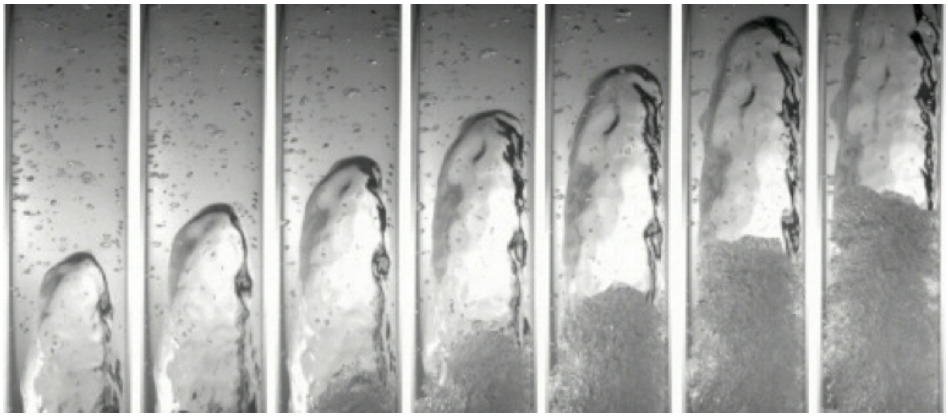

Figura 4: Fonte: [5, 6]

Nestas notas apresentaremos e analisaremos alguns modelos de interface difusa que descrevem fenômenos de solidificação. Especificamente, trataremos modelos do tipo Allen-Cahn, Peronse-Fife e Carman-Kozeny.

No Capítulo 1 faremos uma breve introdução da formulação dos modelos de interface difusa para solidificação não isotérmica de materiais puros e ligas binárias sem e com a convecção. Apresentaremos também os modelos de interface difusa para dois fluidos newtonianos incompressíveis. Algumas generalizações serão descritas, tais como: Lei de Fourier generalizada, Lei de Catteano e fluido quase newtoniano.

No Capítulo 2 faremos a análise matemática dos modelos Allen-Cahn e Penrose-Fife para solidificação não isotérmica de materiais puros.

No Capítulo 3 faremos a análise matemática de um modelo de interface difusa que incorpora a convecção. Em particular, investigaremos um modelo do tipo Carman-Kozeny. Pela importância teórica, apresentaremos os resultados clássicos da teoria das equações de Navier-Stokes e de um modelo de fluido quase newtoniano.

CAPÍTULO 1

Apresentação dos modelos

Neste capítulo, apresentaremos os modelos de interface difusa para solidificação não isotérmica de materiais puros e ligas binárias sem e com a convecção. Apresentaremos também os modelos de interface difusa para dois fluidos newtonianos incompressíveis. Algumas generalizações serão descritas, tais como: Lei de Fourier generalizada, Lei de Catteano e fluido quase newtoniano.

Os detalhes destas formulações podem ser encontrados em [1, 6, 9, 46, 51, 53, 56] e referências citadas.

1.1 Modelos de interface difusa

Nesta seção apresentaremos os modelos Allen-Cahn, Cahn-Hilliard, Penrose-Fife e um modelo geométrico para solidificação não isotérmica de materiais puros e ligas binárias. Apresentaremos também alguns modelos mais realísticos obtidos generelizando-se a Lei de Fourier.

Equações de Allen-Cahn e Cahn-Hilliard

Se o parâmetro de ordem φ representa a "densidade" ou a "concentração" de alguma substância então pelo *princípio da conservação de massa*, a massa total do sistema é conservada (desde que não haja fluxo de massa pela fronteira). Neste caso,

postula-se que o fluxo de massa associado a φ (representado por $\mathbf{j}$) é proporcional ao gradiente da força termodinâmica generalizada (dada pela 1ª variação do funcional energia), ou seja,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\mathrm{div}\,\mathbf{j}, \quad \mathbf{j} = -m(\varphi,\theta)\nabla\left(\frac{\delta F}{\delta \varphi}\right). \tag{1.1}$$

Para o caso não conservativo, postula-se que φ é proporcional a força termodinâmica generalizada, ou seja,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -M(\varphi,\theta)\frac{\delta F}{\delta \varphi} \tag{1.2}$$

com $\dfrac{\delta F}{\delta \varphi}$ a 1ª variação do funcional energia, m e M funções coeficientes (funções positivas).

Se o funcional energia é dado por

$$F = \int_\Omega f(\varphi,\theta) + \gamma(\varphi,\theta)|\nabla\varphi|^2\,dx. \tag{1.3}$$

Então, considerando a variação $\varphi + \xi\psi$ de φ tem-se

$$\frac{dF}{d\xi}\Big|_{\xi=0} = \int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi}|\nabla\varphi|^2\right)\psi + \gamma(\varphi,\theta)\nabla\varphi.\nabla\psi\,dx.$$

Usando o Teorema de Green e supondo que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 \text{ em } \partial\Omega \tag{1.4}$$

com $\partial\Omega$ a fronteira do domínio Ω obtemos

$$\frac{dF}{d\xi}\Big|_{\xi=0} = \int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi}|\nabla\varphi|^2 - \mathrm{div}(\gamma(\varphi,\theta)\nabla\varphi)\right)\psi\,dx,$$

e, logo,

$$\frac{\delta F}{\delta \varphi} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi}|\nabla\varphi|^2 - \mathrm{div}(\gamma(\varphi,\theta)\nabla\varphi). \tag{1.5}$$

Substituindo (1.5) em (1.1) e (1.2) obtemos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = M(\varphi,\theta)\left(\mathrm{div}(\gamma(\varphi,\theta)\nabla\varphi) - \frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi}|\nabla\varphi|^2\right) \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mathrm{div}\left(m(\varphi,\theta)\nabla\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi}|\nabla\varphi|^2 - \mathrm{div}(\gamma(\varphi,\theta)\nabla\varphi)\right)\right) \tag{1.7}$$

A equação (1.6) é conhecida como a **equação de Allen-Cahn** (ou equação de Ginzburg-Landau) e a equação (1.7) é conhecida como a **equação de Cahn-Hilliard**.

No caso da equação de Cahn-Hilliard, além da condição de fronteira (1.4), impõe-se que não existe fluxo de massa na fronteira, ou seja, $\mathbf{j}.\eta = 0$ em $\partial\Omega$, ou equivalentemente,

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(m(\varphi,\theta)\nabla\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}+\frac{\partial\gamma}{\partial\varphi}|\nabla\varphi|^2-\operatorname{div}(\gamma(\varphi,\theta)\nabla\varphi)\right)\right)=0 \text{ em } \partial\Omega. \tag{1.8}$$

No caso que M, m e γ são constantes e o potencial de densidade de energia é um potencial de "poço duplo" (veja figura 1.1) com contribuição da temperatura, ou seja, é do tipo

$$f(\varphi,\theta)=\frac{(\varphi^2-1)^2}{4}+\theta\varphi.$$

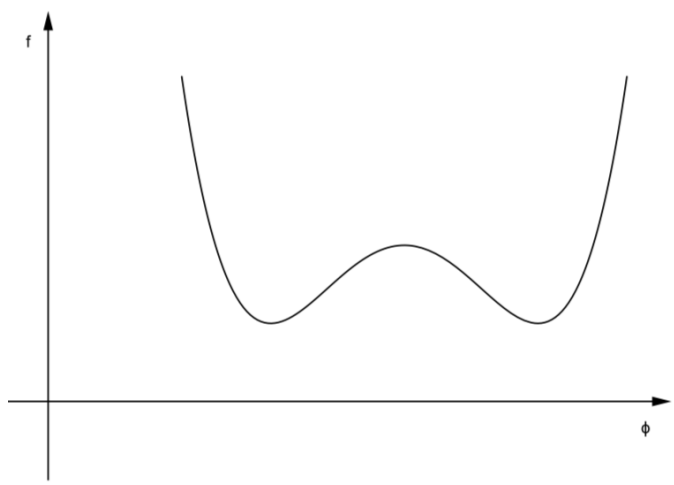

Figura 1.1: Potencial duplo poço

Fonte: autora

Assim, as equações de Allen-Cahn e Cahn-Hilliard tornam-se, respectivamente,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=\xi^2\Delta\varphi+\varphi-\varphi^3+\theta & \text{em} \quad \Omega\times(0,T), \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta}=0 & \text{em} \quad \partial\Omega\times(0,T), \\ \varphi(x,0)=\varphi_0(x) & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta \mu & \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\ \mu = -\xi^2 \Delta \varphi + \varphi^3 - \varphi - \theta & \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0, \ \dfrac{\partial \mu}{\partial \eta} = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x) & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{1.10}$$

Formulação termodinamicamente consistente

Observe que as equações (1.6) e (1.7) foram obtidas considerando-se a temperatura constante. Outra abordagem, adotada por Penrose-Fife [53], considera a 2ª lei da termodinâmica e deduz as equações do campo de fase e da energia interna usando um funcional entropia do tipo

$$S(e,\varphi) = \int_\Omega s(e,\varphi) - \xi^2 |\nabla \varphi|^2 \, dx$$

com "e" a energia interna e $s(e,\varphi)$ a densidade de entropia.

Postulam-se as seguintes leis para o parâmetro de ordem:

(i) caso não conservativo: $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = M(\varphi,\theta)\dfrac{\delta S}{\delta \varphi}$,

(ii) caso conservativo: $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = -\text{div}\left(m(\varphi,\theta)\nabla\left(\dfrac{\delta S}{\delta \varphi}\right)\right)$.

Procedendo de forma similar a do funcional energia F temos que a 1ª variação do funcional S com relação a φ é dada por

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi} = \xi^2 \Delta \varphi + \frac{\partial s}{\partial \varphi}.$$

Portanto, quando M e m são constantes (por simplicidade, $M = m = 1$) temos as seguintes as equações do modelo Pensose-Fife:

caso não conservativo: $$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \xi^2 \Delta \varphi + \frac{\partial s}{\partial \varphi}, \tag{1.11}$$

caso conservativo: $$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\Delta\left(\xi^2 \Delta \varphi + \frac{\partial s}{\partial \varphi}\right). \tag{1.12}$$

Uma outra maneira de obtermos estas equações é considerar 2^a lei da termodinâmica e redefinir o funcional energia (1.3) do seguinte modo:

$$F = \int_\Omega s(\varphi, e) + \gamma(\varphi, \theta)\frac{|\nabla\varphi|^2}{\theta}\, dx. \tag{1.13}$$

Assim,

$$\frac{\delta F}{\delta\varphi} = \frac{\partial s}{\partial\varphi} + \frac{\partial\gamma}{\partial\varphi}\frac{|\nabla\varphi|^2}{\theta} - \operatorname{div}\left(\frac{\gamma(\varphi,\theta)\nabla\varphi}{\theta}\right). \tag{1.14}$$

E as equações (1.6) e (1.7) tornam-se

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = M(\varphi,\theta)\left(\operatorname{div}\left(\frac{\gamma(\varphi,\theta)\nabla\varphi}{\theta}\right) + \frac{\partial s}{\partial\varphi} - \frac{\partial\gamma}{\partial\varphi}\frac{|\nabla\varphi|^2}{\theta}\right) \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \operatorname{div}\left(m(\varphi,\theta)\nabla\left(\frac{\partial s}{\partial\varphi} + \frac{\partial\gamma}{\partial\varphi}\frac{|\nabla\varphi|^2}{\theta} - \operatorname{div}\left(\frac{\gamma(\varphi,\theta)\nabla\varphi}{\theta}\right)\right)\right). \tag{1.16}$$

Para M e m constantes unitárias e $\gamma = \theta$ recuperamos as equações de Penrose-Fife (1.11) e (1.12).

Observe que, como a densidade de entropia $s(\varphi, e)$ depende da fase e da energia, para obtermos a expresssão completa da equação do parâmetro de ordem φ deve-se descrever a evolução da energia interna "e" .

Mudança de fase não isotérmica

Nesta seção apresentaremos o acoplamento da equação que governa a energia interna aos modelos descritos nas seções anteriores.

A equação de evolução da energia é obtida por uma lei de balanço do tipo

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{q} = g \tag{1.17}$$

com $\mathbf{q}$ o fluxo de calor e g a densidade de energia externa do sistema, respectivamente.

Para os modelos de Allen-Cahn e Cahn-Hilliard aplica-se a lei de Fourier clássica dada por

$$\mathbf{q} = -k(\varphi,\theta)\nabla\theta \tag{1.18}$$

e para o modelo Penrose-Fife postula-se

$$\mathbf{q} = k(\varphi, \theta)\nabla\left(\frac{1}{\theta}\right). \tag{1.19}$$

Observe que recuperamos a Lei de Fourier tomando $k(\varphi, \theta) = k_0\theta^2$, com $k_0 > 0$ em (1.19).

Em geral, supõe-se que a energia interna "e" é uma função da temperatura e do calor latente da fase, isto é,

$$e = w(\theta) + \ell(\varphi). \tag{1.20}$$

Para as equações de Allen-Cahn e Cahn-Hilliard (veja, por exemplo, [15, 51]) postula-se a seguinte relação para a energia:

$$e = \theta + \ell\varphi \tag{1.21}$$

e para o modelo Penrose-Fife postula-se

$$e = -\frac{1}{\theta} + \ell(\varphi)\varphi, \tag{1.22}$$

com a seguinte densidade de entropia:

$$s(\varphi, e) = \frac{1}{2}(\ell(\varphi)\varphi - e)^2 + f(\varphi), \tag{1.23}$$

sendo que f pode ser escolhida como um potencial de energia de "duplo poço"(veja figura 1.1).

Substituindo (1.18) e (1.21) em (1.17) obtemos a seguinte equação de evolução para a temperatura

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta + \ell\varphi) = \operatorname{div}(k(\varphi, \theta)\nabla\theta) + g \tag{1.24}$$

Por outro lado, em [53], Penrose e Fife fazem duas escolhas da função $\ell(\varphi)$, chamada *densidade do calor latente*: calor latente constante, isto é, $\ell(\varphi) = \ell$ e calor latente polinomial, isto é, $\ell(\varphi) = a\,\varphi$ com $a > 0$. Substituido estas escolhas na relação da energia (1.22) e combinando o resultado com as equações (1.17) e (1.19) obtemos as seguintes equações de evolução para a temperatura:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\theta}\right) - \ell\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\mathrm{div}\left(k(\varphi,\theta)\nabla\left(\frac{1}{\theta}\right)\right) + g \tag{1.25}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\theta}\right) - \ell\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\mathrm{div}\left(k(\varphi,\theta)\nabla\left(\frac{1}{\theta}\right)\right) + g. \tag{1.26}$$

Além disso, observe que (1.23) torna-se, respectivamente,

$$s(\varphi,e) = \frac{1}{2}(\ell\varphi - e)^2 + f(\varphi),$$
$$s(\varphi,e) = \frac{1}{2}(a\varphi^2 - e)^2 + f(\varphi).$$

Portanto, calculando a 1ª variação da densidade de entropia "s" com relação a φ e usando (1.22) obtemos

$$\frac{\partial s}{\partial\varphi} = \frac{\ell}{\theta} + \frac{\partial f}{\partial\varphi}, \quad \frac{\partial s}{\partial\varphi} = \frac{2a\varphi}{\theta} + \frac{\partial f}{\partial\varphi}. \tag{1.27}$$

Substituindo (1.27) em (1.11) e (1.12), respectivamente,

$$\begin{aligned}
\text{caso não conservativo:}\quad & \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \xi^2\Delta\varphi + \frac{\ell}{\theta} + \frac{\partial f}{\partial\varphi},\\
& \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \xi^2\Delta\varphi + \frac{2a\varphi}{\theta} + \frac{\partial f}{\partial\varphi},\\
\text{caso conservativo:}\quad & \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\Delta\left(\xi^2\Delta\varphi + \frac{\ell}{\theta} + \frac{\partial f}{\partial\varphi}\right),\\
& \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\Delta\left(\xi^2\Delta\varphi + \frac{2a\varphi}{\theta} + \frac{\partial f}{\partial\varphi}\right).
\end{aligned}$$

Escolhendo $f(\varphi) = \dfrac{(1-\varphi^2)^2}{4}$ obtemos as seguintes equações do parâmetro de ordem para o modelo Penrose-Fife:

$$\begin{aligned}
\text{caso não conservativo:}\quad & \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \xi^2\Delta\varphi + \frac{\ell}{\theta} + \varphi - \varphi^3,\\
& \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \xi^2\Delta\varphi + \frac{2a\varphi}{\theta} + \varphi - \varphi^3,\\
\text{caso conservativo:}\quad & \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\Delta\left(\xi^2\Delta\varphi + \frac{\ell}{\theta} + \varphi - \varphi^3\right),\\
& \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\Delta\left(\xi^2\Delta\varphi + \frac{2a\varphi}{\theta} + \varphi - \varphi^3\right).
\end{aligned}$$

Em resumo, temos os seguintes modelos não isotérmicos:

i) **Allen-Cahn não isotérmico**

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \xi^2 \Delta\varphi + \varphi - \varphi^3 + \ell\theta && \text{em} \quad \Omega \times (0,T),\\
&\frac{\partial}{\partial t}(\theta + \ell\varphi) = \operatorname{div}(k(\varphi,\theta)\nabla\theta) + g && \text{em} \quad \Omega \times (0,T),\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0, \ \ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 && \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T),\\
&\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \ \ \theta(x,0) = \theta_0(x) && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned} \tag{1.28}$$

ii) **Cahn-Hilliard não isotérmico**

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta\mu && \text{em} \quad \Omega \times (0,T),\\
&\mu = -\xi^2 \Delta\varphi + \varphi^3 - \varphi - \ell\theta && \text{em} \quad \Omega \times (0,T),\\
&\frac{\partial}{\partial t}(\theta + \ell\varphi) = \operatorname{div}(k(\varphi,\theta)\nabla\theta) + g && \text{em} \quad \Omega \times (0,T),\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0, \ \ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0, \ \ \frac{\partial \mu}{\partial \eta} = 0, && \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T),\\
&\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \ \ \theta(x,0) = \theta_0(x) && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

iii) **Penrose-Fife**

a) Caso Constante:

ai) **Parâmetro de ordem não conservativo**

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \xi^2 \Delta\varphi + \frac{\ell}{\theta} + \varphi - \varphi^3 && \text{em} \quad \Omega \times (0,T),\\
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\theta}\right) - \ell\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\operatorname{div}\left(k(\varphi,\theta)\nabla\left(\frac{1}{\theta}\right)\right) + g && \text{em} \quad \Omega \times (0,T),\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0, \ \ \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{\theta}\right) = 0 && \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T),\\
&\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \ \ \theta(x,0) = \theta_0(x) && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned} \tag{1.30}$$

aii) **Parâmetro de ordem conservativo**

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta \mu && \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\
&\mu = -\xi^2 \Delta \varphi + \varphi^3 - \varphi + \frac{2a\varphi}{\theta} && \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\theta}\right) - 2a\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\mathrm{div}\left(k(\varphi,\theta)\nabla\left(\frac{1}{\theta}\right)\right) + g && \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\
&\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0, \ \ \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{\theta}\right) = 0, \ \ \frac{\partial \mu}{\partial \eta} = 0 && \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\
&\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \ \ \theta(x,0) = \theta_0(x) && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned}
\tag{1.31}
$$

b) Caso Linear:

bi) **Parâmetro de ordem não conservativo**

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \xi^2\Delta\varphi + \frac{2a\varphi}{\theta} + \varphi - \varphi^3 && \text{em} \quad \Omega\times(0,T),\\
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\theta}\right) - 2a\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\text{div}\left(k(\varphi,\theta)\nabla\left(\frac{1}{\theta}\right)\right) + g && \text{em} \quad \Omega\times(0,T),\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0, \ \ \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{\theta}\right) = 0 && \text{em} \quad \partial\Omega\times(0,T),\\
&\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \ \ \theta(x,0) = \theta_0(x) && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned} \tag{1.32}$$

bii) **Parâmetro de ordem conservativo**

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \Delta\mu && \text{em} \quad \Omega\times(0,T),\\
&\mu = -\xi^2\Delta\varphi + \varphi^3 - \varphi + \frac{2a\varphi}{\theta} && \text{em} \quad \Omega\times(0,T),\\
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\theta}\right) - 2a\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\text{div}\left(k(\varphi,\theta)\nabla\left(\frac{1}{\theta}\right)\right) + g && \text{em} \quad \Omega\times(0,T),\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0, \ \ \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{\theta}\right) = 0, \ \ \frac{\partial\mu}{\partial\eta} = 0 && \text{em} \quad \partial\Omega\times(0,T),\\
&\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \ \ \theta(x,0) = \theta_0(x) && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned} \tag{1.33}$$

Formulação geométrica

Nesta seção apresentaremos a formulação geométrica dada por Beckermann e colaboradores em [9] para modelos de interface difusa aplicados a solidificação.

Considere a normal exterior à interface dada por $\eta = -\dfrac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}$. Assim, a curvatura da interface $\kappa = \nabla.\eta$ é da forma

$$\kappa = -\frac{1}{|\nabla\varphi|}(\xi^2\Delta\varphi - \Phi(\nabla\varphi)). \tag{1.34}$$

Lembrando que a Lei de Gibbs-Thompson para energia e uma liga binária simples é dada por

$$v_n = \theta + c - \kappa. \tag{1.35}$$

com v_n a componente normal da velocidade, c a concentração e θ a temperatura.

Por outro lado, tem-se

$$v_n = v.\eta = \frac{1}{|\nabla\varphi|}\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{1.36}$$

Substituindo (1.34) e (1.36) em (1.35) obtemos

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \xi^2\Delta\varphi + \Phi(\nabla\varphi) + |\nabla\varphi|(\theta + c).$$

Para finalizar, os autores fazem uma escolha especial de φ para simular a energia livre de Gibbs como um potencial de "poço duplo". Deste modo, obtêm uma expressão polinomial para $|\nabla\varphi|$ e uma expressão do tipo "poço duplo"para $\Phi(\nabla\varphi)$.

Uma aproximação mais realística do modelo (adotada por Boldrini-CVaz) é considerar somente a expressão de $\Phi(\nabla\varphi)$ e preservar $|\nabla\varphi|$ na equação, ou seja,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \xi^2\Delta\varphi + \varphi(\varphi-1)(1-2\varphi) + |\nabla\varphi|(\theta + c).$$

Para materiais puros (concentração nula) temos

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \xi^2\Delta\varphi + \varphi(\varphi-1)(1-2\varphi) + |\nabla\varphi|\theta.$$

Acoplando a equação da energia (1.24) obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \xi^2\Delta\varphi = \varphi(\varphi-1)(1-2\varphi) + |\nabla\varphi|\theta && \text{em} \quad \Omega\times(0,T),\\
&\frac{\partial}{\partial t}(\theta + \ell\varphi) - \operatorname{div}(k(\varphi,\theta)\nabla\theta) = g && \text{em} \quad \Omega\times(0,T),\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0, \ \ \frac{\partial\theta}{\partial\eta} = 0 && \text{em} \quad \partial\Omega\times(0,T),\\
&\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \ \ \theta(x,0) = \theta_0(x) && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Concentração

Para os fenômenos físicos que envolvem a solidificação de ligas binárias deve-se acoplar a concentração "c" ao processo de mudança de fase. Nestes casos, usa-se a Lei de Fick para descreve o comportamento da concentração, ou seja,

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathbf{j}, \quad \mathbf{j} = -m(\varphi,\theta,c)\nabla\left(\frac{\delta F}{\delta c}\right). \tag{1.38}$$

com $\dfrac{\delta F}{\delta c}$ a 1ª variação do funcional energia e m uma função coeficiente.

A formulação descrita por Beckermann [9] e Warren [71] considera

$$\nabla\left(\frac{\delta F}{\delta c}\right) = D_1(\varphi)\nabla c + D_2(c,\varphi)\nabla\varphi.$$

Deste modo, podemos acoplar as equações campo de fase Allen-Canh ou Penrose-Fife à equação governa a concentração.

Por exemplo, Boldrini-CVaz, em [13], investigaram o seguinte modelo para solidificação de ligas binárias inspirado no modelo (1.37):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \xi^2\Delta\varphi = \varphi(\varphi-1)(1-2\varphi) - |\nabla\varphi|\,(\mu_1\, c + \mu_2\,\theta) \quad &\text{em} \quad \Omega\times(0,T),\\
\frac{\partial}{\partial t}(\theta+\ell\varphi) - \operatorname{div}(k(\varphi,\theta,c)\nabla\theta) = f(x,t) \quad &\text{em} \quad \Omega\times(0,T),\\
\frac{\partial c}{\partial t} - \operatorname{div}(D_1(\varphi,\theta,c)\nabla c + D_2(\varphi,\theta,c)\nabla\varphi) = 0 \quad &\text{em} \quad \Omega\times(0,T),\\
\varphi = 0,\quad \theta = 0 \quad c = 0 \quad &\text{em} \quad \partial\Omega\times(0,T),\\
\varphi(x,0) = \varphi_0(x),\quad \theta(x,0) = 0 \quad c(x,0) = c_0(x) \quad &\text{em} \quad \Omega.
\end{aligned}$$

Algumas generalizações

Nesta seção apresentaremos algumas generalizações da Lei de Fourier (1.18) que tornam os modelos mais realísticos.

Lei de Catteano

Em [39] e referência citadas, o fluxo de calor satisfaz a seguinte lei de Catteano-Maxwell:

$$\left(1+\eta\frac{\partial}{\partial t}\right) q = -\nabla\theta, \qquad \eta > 0. \tag{1.39}$$

Deste modo, tomando $g = 0$ temos que equação da energia (1.17) torna-se

$$\left(1+\eta\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial e}{\partial t} - \Delta\theta = 0,$$

Fazendo, por exemplo, $e = \theta + \ell\varphi$ obtemos

$$\eta\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + \frac{\partial\theta}{\partial t} - \Delta\theta = -\eta\ell\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \ell\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{1.40}$$

Para simplificarmos o tratamento matemático do problema faremos a seguinte mudança de variável:

$$\alpha = \int_0^t \theta(s)\, ds, \qquad \theta = \frac{\partial \alpha}{\partial t}.$$

Integrando (1.40) com relação a $s \in [0,t]$, obtemos

$$\eta \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta\alpha = -\eta\ell \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \ell\varphi + S, \tag{1.41}$$

com $S = \eta \dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}(x,0) + \dfrac{\partial \alpha}{\partial t}(x,0) - \Delta\alpha(0) + \eta\ell \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(x,0) + \ell\varphi(x,0)$.

Deste modo, obtemos o seguinte modelo Allen-Cahn/Catteano:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \xi^2 \Delta\varphi + \varphi(\varphi-1)(1-2\varphi) + \frac{\partial \alpha}{\partial t} && \text{em} \quad \Omega \times (0,T),\\
&\eta \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta\alpha = -\eta\ell \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \ell\varphi + S && \text{em} \quad \Omega \times (0,T),\\
&\varphi = \alpha = 0 && \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T),\\
&\varphi(x,0) = \varphi_0(x)\ ,\ \alpha(x,0) = 0 && \text{em} \quad \Omega,\\
&\frac{\partial \alpha}{\partial t}(x,0) = \alpha_(x)\ ,\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}(x,0) = \alpha_2(x) && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Observação 1.1 *Note que, fazendo $h(\varphi) = \varphi(\varphi-1)(1-2\varphi)$, pela equação do campo de fase dada em* (1.42)*, deduzimos que*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,0) = \alpha_1 + \Delta\varphi_0 + h(\varphi_0),$$

e, logo, $S = \eta\alpha_2 + \alpha_1 + \eta\ell(\alpha_1 + \Delta\varphi_0 + h(\varphi_0)) + \ell\varphi_0$.

Note também que fixamos o valor inicial de $\alpha(x,t)$, o que explica a condição inicial na segunda derivada temporal de $\alpha(x,t)$ (essa condição é natural, pois $\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = \dfrac{\partial \theta}{\partial t}$.)

Se desprezarmos o termos $\eta\ell \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ da equação (1.40), obtemos o modelo chamado *quase estático* para o parâmetro de ordem:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \xi^2 \Delta\varphi + \varphi(\varphi-1)(1-2\varphi) + \frac{\partial \alpha}{\partial t} && \text{em} \quad \Omega \times (0,T),\\
&\frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta\alpha = -\eta\ell \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \ell\varphi + S && \text{em} \quad \Omega \times (0,T),\\
&\varphi = \alpha = 0 && \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T),\\
&\varphi(x,0) = \varphi_0(x)\ ,\ \alpha(x,0) = 0 && \text{em} \quad \Omega,\\
&\frac{\partial \alpha}{\partial t}(x,0) = \alpha_(x) && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Lei de Fourier generalizada

Outra generalização possível é considerar a seguinte *Lei de Fourier generalizada* (veja [63]):

$$\mathbf{q} = -k(\varphi, \theta, \nabla\theta)\nabla\theta = -k(\varphi, \theta)|\nabla\theta|^{p-2}\nabla\theta. \tag{1.44}$$

Neste caso, a equação da energia (1.17) torna-se

$$\frac{\partial e}{\partial t} - \operatorname{div}(k(\varphi, \theta)|\nabla\theta|^{p-2}\nabla\theta) = g. \tag{1.45}$$

Portanto, por exemplo, o sistema Allen-Cahn (2.25) torna-se

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \xi^2\Delta\varphi + \varphi - \varphi^3 + \ell\theta && \text{em} \quad \Omega \times (0, T),\\
&\frac{\partial}{\partial t}(\theta + \ell\varphi) = \operatorname{div}(k(\varphi, \theta)|\nabla\theta|^{p-2}\nabla\theta) + g && \text{em} \quad \Omega \times (0, T),\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0, \ \ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 && \text{em} \quad \partial\Omega \times (0, T),\\
&\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \ \ \theta(x, 0) = \theta_0(x) && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned} \tag{1.46}$$

1.2 Modelos com convecção

Nesta seção apresentaremos a formulação das equações de Navier-Stokes não isotérmicas e de fluidos quase newtonianos. Estas formulações podem ser encontradas em [24, 43, 46].

Equações de Navier-Stokes

Para *fluidos homogêneos* a densidade ρ é constante. Neste caso, a velocidade satisfaz a seguinte equação:

$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \operatorname{div}\vec{\tau} + \rho\,\mathbf{f} \tag{1.47}$$

com $\vec{\tau}$ o tensor de tensões viscoso.

Em componentes, para $\mathbf{u} = (u_i, \ldots, u_n)$, $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$,

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho\sum_{j=1}^{n} u_j\,\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho\, f_i, \qquad 1 \le i \le n.$$

Para *fluidos newtonianos* o tensor de tensões $\vec{\tau}$ satisfaz

$$\vec{\tau} = 2\mu\,\mathbf{D}.$$

com $\mu > 0$ o coeficiente de viscosidade e $\mathbf{D}$ o tensor de deformação dado por

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\Big(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T\Big).$$

Em geral, μ depende das outras variáveis do sistema físico, como, por exemplo, a temperatura.

Se o fluido é *incompressível* temos que $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$. Considerando fluidos incompressíveis e μ constante obtemos

$$\operatorname{div}\vec{\tau} = 2\operatorname{div}(\mu\,\mathbf{D}) \Rightarrow \operatorname{div}\vec{\tau} = 2\mu\operatorname{div}\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \mu\Delta\mathbf{u}. \tag{1.48}$$

Observação 1.2 *Em componentes temos,* $1 \leq i, j \leq n$,

$$D_{ij}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad \tau_{ij} = 2\mu D_{ij}(\boldsymbol{u}), \quad div\,\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} D_{ii}(\boldsymbol{u}).$$

Substituindo (1.48) em (1.47) e tomando $\nu = \mu/\rho$ e $p = p/\rho$ obtemos

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f}.$$

O seguinte sistema é chamado *Equações de Navier-Stokes* para fluidos incompressíveis homogêneos:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f},\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 && \text{em} \quad \Omega\times(0,T),\\
&\mathbf{u} = 0 && \text{em} \quad \partial\Omega\times(0,T),\\
&\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x) && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned} \tag{1.49}$$

Fluidos quase newtonianos

Para uma classe de fluidos quase newtonianos com lei do tipo potência, o tensor de tensões $\vec{\tau}$ satisfaz

$$\vec{\tau} = \mu\gamma(|\mathbf{D}|^2)\mathbf{D}$$

com $|\mathbf{D}|^2 = \mathbf{D} : \mathbf{D} = \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij}D_{ij}$ e a função γ do tipo

$$\gamma(d) = 2(\lambda + d^r)^{p-2}$$

para $r, \lambda \geq 0,\ p > 1$. Observe que, se $\lambda = 0$ e $r = 0$ temos o caso dos fluidos newtoniano.

Considere o caso que $\lambda = 0$ e $r = 1/2$, ou seja,

$$\vec{\tau} = 2\mu|\mathbf{D}|^{p-2}\mathbf{D}. \tag{1.50}$$

Então, para fluidos incompressíveis e μ constante obtemos

$$\operatorname{div}\vec{\tau} = 2\operatorname{div}(\mu\,|\mathbf{D}|^{p-2}\mathbf{D}) \Rightarrow \operatorname{div}\vec{\tau} = 2\mu\operatorname{div}(|\mathbf{D}(\mathbf{u})|^{p-2}\mathbf{D}(\mathbf{u})). \tag{1.51}$$

Substituindo (1.51) em (1.47) e tomando $\nu = 2\mu/\rho$ e $p = p/\rho$ obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\operatorname{div}(|\mathbf{D}(\mathbf{u})|^{p-2}\mathbf{D}(\mathbf{u})) + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}.$$

Em [43], J. L. Lions investiga existência, unicidade e regularidade dos seguintes problemas:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\operatorname{div}(|\mathbf{D}(\mathbf{u})|^{p-2}\mathbf{D}(\mathbf{u})) + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} && \text{em} \quad \Omega \times (0,T),\\
&\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 && \text{em} \quad \Omega \times (0,T),\\
&\mathbf{u} = 0 && \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T),\\
&\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x) && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned} \tag{1.52}$$

com $p > 2$.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\operatorname{div}(|\mathbf{D}(\mathbf{u})|^{p-2}\mathbf{D}(\mathbf{u})) - \nu_0\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} && \text{em} \quad \Omega \times (0,T),\\
&\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 && \text{em} \quad \Omega \times (0,T),\\
&\mathbf{u} = 0 && \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T),\\
&\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x) && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned} \tag{1.53}$$

com $\nu > 0$ e $\nu_0 > 0$.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - (\nu_0 + \nu_1||\mathbf{u}(t)||^2)\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} && \text{em} \quad \Omega \times (0,T),\\
&\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 && \text{em} \quad \Omega \times (0,T),\\
&\mathbf{u} = 0 && \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T),\\
&\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x) && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned} \tag{1.54}$$

com $\nu_0 > 0$ e $\nu_1 > 0$ e $||\mathbf{v}|| = \int_\Omega |\nabla \mathbf{v}|^2 \, dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right|^2 dx.$

O caso estacionário do problema (1.54) foi investigado por [24]. Na seção 3.3 do capítulo 3 apresentaremos a análise matemática do problema (1.52) feita por Lions em [43].

Fluido não isotérmico

Para fluidos incompressíveis homogêneos a equação da energia é dada por

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{u}.\nabla e = -\mathrm{div}\, \vec{q} + \vec{\tau} : \mathbf{D} \tag{1.55}$$

com "e" a energia térmica e $\vec{q}$ fluxo de calor.

Aplicando a Lei de Fourier tem-se

$$\vec{q} = -k(\theta)\nabla\theta \tag{1.56}$$

Substituindo (1.56) em (1.55) e tomando $\rho = 1$, obtemos

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla e = \mathrm{div}(k(\theta)\nabla\theta) + \vec{\tau} : \mathbf{D}. \tag{1.57}$$

Por outro lado, a viscosidade μ pode depender da temperatura θ e, logo, para fluidos newtonianos temos

$$\vec{\tau} = 2\,\mu(\theta)\mathbf{D}. \tag{1.58}$$

Substituindo (1.58) em (1.57) obtemos

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla e = \mathrm{div}(k(\theta)\nabla\theta) + 2\mu(\theta)|\mathbf{D}(\mathbf{u})|^2. \tag{1.59}$$

Além disso, $\mathrm{div}\,\vec{\tau} = 2\mathrm{div}(\mu(\theta)\mathbf{D}(\mathbf{u}))$ e as equações de Navier-Stokes tornam-se

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathrm{div}(\mu(\theta)\mathbf{D}(\mathbf{u})) + \mathbf{f},\ \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 && \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\ &\mathbf{u} = 0 && \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ &\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x) && \text{em} \quad \Omega. \end{aligned} \tag{1.60}$$

Portanto, o seguinte sistema de equações governa a dinâmica de um fluido newtoniano incompressível homogêneo não isotérmico:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \operatorname{div}(\mu(\theta)\mathbf{D}(\mathbf{u})) + \mathbf{f},\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 && \text{em} \quad \Omega \times (0,T),\\
&\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla e = \operatorname{div}(k(\theta)\nabla\theta) + 2\mu(\theta)|\mathbf{D}(\mathbf{u})|^p && \text{em} \quad \Omega \times (0,T),\\
&\mathbf{u} = 0,\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 && \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T),\\
&\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x),\quad \theta(x,0) = \theta_0(x) && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned} \tag{1.61}$$

O problema (1.61) com $e = \theta$ e k constante foi investigado por P. L. Lions em [46].

O problema (1.61) com $e = \theta$, $\mathbf{f} = \vec{\sigma}\theta$ sem o termo $|\mathbf{D}(\mathbf{u})|^2$ foi investigado por Boldrini-Lorca em [47].

Para fluidos quase newtonianos não isotérmicos do tipo (1.50) temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \operatorname{div}(\mu(\theta)|\mathbf{D}(\mathbf{u})|^{p-2}\mathbf{D}(\mathbf{u})) + \mathbf{f},\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 && \text{em} \quad \Omega \times (0,T),\\
&\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla e = \operatorname{div}(k(\theta)\nabla\theta) + 2\mu(\theta)|\mathbf{D}(\mathbf{u})|^2 && \text{em} \quad \Omega \times (0,T),\\
&\mathbf{u} = 0,\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 && \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T),\\
&\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x),\quad \theta(x,0) = \theta_0(x) && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned} \tag{1.62}$$

O caso estacionário do sistema (1.62) com $e = \theta$ e k constante, investigado por L. Consiglieri e J.F. Rodrigues em [24].

1.3 Modelo de interface difusa para dois fluidos

Nesta seção descreveremos o modelo que governa a mudança de fase de dois fluidos newtonianos incompressíveis que macroscopicamente não se misturam, mas se mesclam numa região interfacial fina, conhecido como *fluido com duas fases* (veja figuras 4 e **??**)

As referências usadas neste texto são os trabalhos de Abels [1], Anderson *et all* [5] e Gal & Grasselli [33].

A ideia principal deste formulação é introduzir um termo adicional (que representa os efeitos da capilaridade) no tensor de tensões $\vec{\tau}$. Este termo é do tipo

$$\xi\, \nabla\varphi \otimes \nabla\varphi$$

com $\otimes$ o produto exterior Assim, a equação do momento (1.47) torna-se

$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \operatorname{div}(2\mu\mathbf{D}) + \rho(\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \xi \operatorname{div}(\nabla\varphi \otimes \nabla\varphi) + \rho\,\mathbf{f}. \tag{1.63}$$

Com resultado final obtêm-se as equações de Navier- Stokes acopladas com a equação de Allen-Cahn ou Cahn-Hilliard. Nestas notas apresentaremos a formulação descrita em [1].

Para dois fluidos newtonianos incompressíveis homogêneos isotérmicos temos os seguintes sistemas de equações:

Navier-Stokes/Allen-Cahn

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \operatorname{div}(\mu(\varphi)\mathbf{D}(\mathbf{u})) + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathcal{K}\mu\nabla\varphi + \mathbf{f} & \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\
\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 & \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\
\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\varphi + \mu = 0 & \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\
\mu = \alpha f(\varphi) - \xi^2\Delta\varphi & \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\
\mathbf{u} = 0,\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\
\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x),\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x) & \text{em} \quad \Omega.
\end{array} \tag{1.64}$$

Navier-Stokes/Cahn-Hilliard

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \operatorname{div}(\mu(\varphi)\mathbf{D}(\mathbf{u})) + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mu\nabla\varphi + \mathbf{f} & \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\
\operatorname{div} v = 0 & \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\
\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\varphi = \Delta\mu & \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\
\mu = \alpha f(\varphi) - \xi^2\Delta\varphi & \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\
\mathbf{u} = 0,\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\
\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x),\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x) & \text{em} \quad \Omega.
\end{array} \tag{1.65}$$

Destaque para o termo μ na equação de φ em (1.64) e o termo $\Delta\mu$ na equação de φ em (1.65).

1.4 Solidificação com convecção

Nesta seção apresentaremos a formulação de um modelo de interface difusa para solidificação não isotérmica de materiais puros que incorpora a convecção. Este modelo foi inspirado nos trabalhos [8, 9, 21].

Modelo do tipo Carman-Kozeny

Nesta formulação descreve-se a mudança de fase com a fração sólida φ do material, ou seja, $\varphi = 1$ na região sólida, $\varphi = 0$ na região líquida e $0 < \varphi < 1$ na região de mistura.

Vamos considerar a seguinte sistema de equações para descrever a fase e a conservação de energia:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \xi^2 \Delta \varphi + \mathbf{u}.\nabla \varphi = \varphi - \varphi^3 + \theta, \\
&\frac{\partial}{\partial t}(\theta + \ell\varphi) - k\Delta\theta + \mathbf{u}.\nabla(\theta + \ell\varphi) = g
\end{aligned}$$

com g uma fonte externa de calor.

Para descrever a dinâmica do parte fluida (líquida ou misturada) do material considera-se as equações de Navier-Stokes do tipo

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = G(\varphi, \mathbf{u}) + F(\theta) \\
&\operatorname{div} \mathbf{u} = 0
\end{aligned}$$

com G e F termos fontes.

A ideia principal desta formulação é supor que zona de mistura é um *meio poroso*, para a qual vale a lei de Darcy dos meios porosos, isto é, a velocidade do fluido no meio poroso deve ser proporcional ao gradiente da p :

$$\mathbf{u} = -\frac{\mathrm{K}}{\nu}\nabla p$$

com K a permeabilidade do meio.

A influência do termo $G(\varphi, \mathbf{u})$ no sistema é a seguinte: na região líquida deve-se recuperar a equação do momento clássica, o que implica $G(\varphi, \mathbf{u}) = 0$ nesta região.

Na região de mistura, tem-se um meio poroso e portanto deve-se recuperar a Lei de Darcy clássica, ou seja, $G(\varphi, \mathbf{u})$ deve ser da forma $G(\varphi, \mathbf{u}) = -\nabla p + F(\theta)$ nesta região.

As considerações acima sugerem que $G(\varphi, \mathbf{u})$ seja uma função do tipo

$$G = -K(\varphi)\mathbf{u}.$$

com $K(\varphi)$ uma função adequada tal que $K(0) = 0$ e $\lim_{\varphi \to 1} K(\varphi) = +\infty$.

Em [8, 21], os autores escolhem $K(\varphi)$ como a função de permeabilidade Carman-Kozeny, dada por

$$K(\varphi) = \frac{\varphi^2}{(1-\varphi)^3}.$$

Em [9], os autores escolhem $K(\varphi)$ na forma

$$K(\varphi) = \kappa(\mu, \xi)\varphi^2.$$

Para mais detalhes consulte [8, 9, 21, 64, 65].

Nestas notas, para tratarmos situações mais gerais, vamos seguir [10] e considerar $K(\cdot)$ uma função do tipo Carman-Kozeny, isto é, estenderemos $K(\cdot)$ por zero ao intervalo $(-\infty, 1)$ tal que $K(\cdot)$ satisfaz as seguintes propriedades: $K \in \mathrm{C}^0(-\infty, 1)$, $K(0) = 0$, $K = 0$ em $\mathbb{R}^-$, K não negativa e $\lim_{\mathrm{y} \to 1} K(\mathrm{y}) = +\infty$.

O termo fonte $F(\theta)$ é usado para modelar a convecção natural. Assumindo que vale a aproximação de Boussinesq, isto é, que a densidade é constante em todos os termos exceto na força de gravidade, temos que

$$F(\theta) = C\rho\mathbf{g}(\theta - \theta_r)$$

com $C > 0$ uma constante, ρ a densidade média, $\mathbf{g}$ a força da gravidade e θ_r uma temperatura de referência. Por simplicidade, escreveremos $F(\theta) = \vec{\sigma}\,\theta$.

Finalmente, para concluirmos a descrição completa do modelo devemos definir claramente as regiões onde as nossas equações devem ser válidas. Vamos considerar a solidificação no cilindro Q onde as fases fluida e sólida são identificadas com os conjuntos abertos Q_{ml} e Q_s respectivamente. Deste modo, usando a fração sólida,

definimos as regiões Q_{ml} e Q_s como segue:

$$\begin{aligned}
&Q_s = \{(x,t) \in Q\,;\, \varphi(x,t) = 1\},\\
&\Omega_s(t) = \{x \in \Omega\,;\, \varphi(x,t) = 1\},\\
&Q_{ml} = Q \setminus \bar{Q}_s,\ \ \Omega_{ml}(0) = \Omega \setminus \bar{\Omega}_s(0).
\end{aligned}$$

Observação 1.3 *Devemos ressaltar que este modelo pode ser considerado um problema de fronteira livre, pois as regiões Q_{ml} e Q_s são desconhecidas a priori.*

Deste modo, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \xi^2 \Delta\varphi + \mathbf{u}.\nabla\varphi = \varphi - \varphi^3 + \theta && \text{em} \quad Q,\\
&\frac{\partial}{\partial t}(\theta + \ell\varphi) - k\Delta\theta + \mathbf{u}.\nabla(\theta + \ell\varphi) = g && \text{em} \quad Q,\\
&\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \nabla p + K(\varphi)\mathbf{u} = \vec{\sigma}\,\theta && \text{em} \quad Q_{ml},\\
&\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 && \text{em} \quad Q_{ml},\\
&\mathbf{u} = 0 && \text{em} \quad \overset{o}{Q}_s,\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0, \quad \theta = 0, \quad \mathbf{u} = 0 && \text{em} \quad S_{ml},\\
&\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x), && \text{em} \quad \Omega,\\
&\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x) && \text{em} \quad \Omega_{ml}(0).
\end{aligned} \tag{1.66}$$

com S_{ml} a fronteira lateral de Q_{ml}.

Na seção 3.4 do capítulo 3 apresentaremos a análise matemática do problema (1.66) essencialmente feita por Boldrini-CVaz em [11].

Fluido altamente viscoso

Este modelo foi inspirado nos trabalhos [6, 9, 55] e investigado por Boldrini & CVaz em [12].

Nesta formulação, as equações que governam a fase, a energia e a concentração são dadas por

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \xi^2 \Delta\varphi + \mathbf{u}.\nabla\varphi = \varphi(\varphi - 1)(1 - 2\varphi) - |\nabla\varphi|\,(\mu_1 c + \mu_2\theta),\\
&\frac{\partial}{\partial t}(\theta + \ell\varphi) - \operatorname{div}(k(\varphi)\nabla\theta) + \mathbf{u}.\nabla(\theta + \ell\varphi) = g,\\
&\frac{\partial c}{\partial t} - \operatorname{div}(D_1(\varphi,\theta)\nabla c + D_2(\varphi,\theta)\nabla\varphi) + \mathbf{u}.\nabla c = 0.
\end{aligned}$$

Para simular o comportamento da região sólida como um fluido altamente viscoso supõe-se que a viscosidade satisfaz

$$\nu(\cdot) \in C^0([0,1)), \quad 0 < \nu_1 \leq \nu(\cdot), \quad \lim_{y \to 1-} \nu(y) = +\infty.$$

e, deste modo, a dinâmica do parte fluida (líquida ou misturada) do material é descrita pelas equações de Navier-Stokes do tipo

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \operatorname{div}(\nu(\varphi)\nabla \mathbf{u}) + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = F(\theta, c), \\ &\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{aligned}$$

com F um termo fonte.

Assumindo que vale a aproximação de Boussinesq e escrevendo

$$F(\theta, c) = \vec{\sigma}_1\, c + \vec{\sigma}_2\, \theta$$

temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \xi^2 \Delta \varphi + \mathbf{u}.\nabla\varphi &= \varphi(\varphi-1)(1-2\varphi) - |\nabla\varphi|\,(\mu_1 c + \mu_2 \theta) && \text{em} \quad Q, \\
\frac{\partial}{\partial t}(\theta + \ell\varphi) - \operatorname{div}(k(\varphi)\nabla\theta) + \mathbf{u}.\nabla(\theta + \ell\varphi) &= g && \text{em} \quad Q, \\
\frac{\partial c}{\partial t} - \operatorname{div}(D_1(\varphi,\theta)\nabla c + D_2(\varphi,\theta)\nabla\varphi) + \mathbf{u}.\nabla c &= 0 && \text{em} \quad Q, \\
\varphi = 0, \quad \theta = 0, \quad c &= 0 && \text{em} \quad S, \\
\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x), \quad c(x,0) &= c_0(x) && \text{em} \quad \Omega, \\
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \operatorname{div}(\nu(\varphi)\nabla\mathbf{u}) + (\mathbf{u}\,\nabla)\mathbf{u} + \nabla p &= \vec{\sigma}_1\, c + \vec{\sigma}_2\, \theta && \text{em} \quad Q_{ml}, \\
\operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{em} \quad Q_{ml}, \\
\mathbf{u} \quad \text{é um movimento rígido em cada componente conexa} & && \text{de} \quad Q_s, \\
\mathbf{u} &= 0 && \text{em} \quad \partial Q_{ml} \cap S, \\
\gamma_0(\mathbf{u}|_{Q_{ml}}) &= \gamma_0(\mathbf{u}|_{Q_s}) && \text{em} \quad \partial Q_{ml} \cap \partial Q_s, \\
\mathbf{u}(x,0) &= \mathbf{u}_0(x) && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned}$$

CAPÍTULO 2

Análise matemática de alguns modelos campo de fase

Neste capítulo apresentaremos a análise matemática dos modelos Allen-Cahn isotérmico e não isotérmico e do modelo de Penrose-Fife. Essencialmente, as demonstrações apresentadas neste capítulo podem ser encontradas em [38, 50, 70].

2.1 Equação de Allen-Cahn

Nesta seção vamos provar resultados de existência, unicidade e regularidade do modelo de Allen-Cahn isotérmico e não isotérmico.

Modelo Allen-Cahn isotérmico

Considere o seguinte problema :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \xi^2 \Delta \varphi = a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 + g && \text{em} \quad Q, \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 && \text{em} \quad S, \\ &\varphi(x,0) = \varphi_0(x) && \text{em} \quad \Omega. \end{aligned} \tag{2.1}$$

com $\xi > 0$ uma constante, $a(x,t)$, $b(x,t)$ e $g(x,t)$ funções conhecidas.

Teorema 2.1 *Seja Ω domínio aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1. Suponha que $q \geq 2$, $a, b \in L^\infty(Q)$, $g \in L^q(Q)$, $\varphi_0 \in W_q^{2-2/q}(\Omega)$ tal que $\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} = 0$ em $\partial\Omega$. Então, existe uma única solução $\varphi \in W_q^{2,1}(Q)$ do problema (2.1) tal que*

$$||\varphi||_{q,Q}^{(2)} \leq C(||\varphi_0||_{m,q,\Omega} + ||g||_{q,Q})$$

com $m = 2 - 2/q$ e $C > 0$ uma constante que depende de T, Ω, $||a||_{\infty,Q}$, $||b||_{\infty,Q}$ e $||\varphi_0||_{m,q,\Omega}$.

A prova do Teorema 2.1 pode ser encontrada em Hoffman [38] para o caso $n = 3$ (o resultando também vale para $n = 2$). Porém, nestas notas, obteremos alguns resultados adicionias.

Demonstração: Aplicaremos o Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder. Para isto, considere o operador $T : [0, 1] \times L^6(Q) \to L^6(Q)$ que associa a cada $w \in L^6(Q)$ a única solução do seguinte problema linear:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \xi^2 \Delta \varphi = aw + bw^2 - w^3 + \lambda g && \text{em} \quad Q, \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 && \text{em} \quad S, \\ &\varphi(x, 0) = \varphi_0(x) && \text{em} \quad \Omega. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Observe que $T(\lambda, \cdot)$ está bem definido. De fato, aplicando o Lema E.3 com $q = 2$, $n = 2, 3$, $aw + bw^2 - w^3 \in L^2(Q)$, $g \in L^q(Q)$ e $\varphi_0 \in W_q^{2-2/q}(\Omega)$ tem-se que existe uma única solução $\varphi \in W_2^{2,1}(Q)$ do problema (2.2). Mas, pelo Lema B.9 temos que $W_2^{2,1}(Q) \subset L^p(Q)$ com $p \geq 2$ se $n = 2$ e $p = 10$ se $n = 3$. Portanto, $T(\lambda, \cdot)$ está bem definido de $L^6(Q)$ em $L^6(Q)$.

Para mostrarmos que $T(\lambda, \cdot)$ é contínuo em $L^6(Q)$ para $\forall \lambda \in [0, 1]$ fixo, considere $w_1, w_2 \in L^6(Q)$ e as correspondentes soluções $\varphi_1 = T(\lambda, w_1)$ e $\varphi_2 = T(\lambda, w_2)$. Então, o problema (2.2) para a diferença $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ torna-se

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \xi^2 \Delta \varphi = d(x, t)(w_1 - w_2) && \text{em} \quad Q, \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 && \text{em} \quad S, \\ &\varphi(x, 0) = 0 && \text{em} \quad \Omega. \end{aligned} \tag{2.3}$$

com $d(x,t) = a + b(w_1 + w_2) - (w_1^2 + w_1 w_2 + w_2^2) \in L^3(Q)$.

Multiplicando a equação (2.3) por $\varphi,\ \varphi_t,\ -\Delta\varphi$, respectivamente, integrando em Ω, integrando por partes e usando as desigualdades de Hölder e Young obtemos

$$\frac{d}{dt}||\varphi(t)||_{2,\Omega}^2 + 2\xi^2||\nabla\varphi(t)||_{2,\Omega}^2 \leq ||d(t)||_{3,\Omega}^2\,||w_1(t) - w_2(t)||_{6,\Omega}^2 + ||\varphi(t)||_{2,\Omega}^2, \tag{2.4}$$

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t)\right\|_{2,\Omega}^2 + \xi^2\frac{d}{dt}||\nabla\varphi(t)||_{2,\Omega}^2 \leq ||d(t)||_{3,\Omega}^2\,||w_1(t) - w_2(t)||_{6,\Omega}^2, \tag{2.5}$$

$$\frac{d}{dt}||\nabla\varphi(t)||_{2,\Omega}^2 + \frac{\xi^2}{2}||\Delta\varphi(t)||_{2,\Omega}^2 \leq ||d(t)||_{3,\Omega}^2\,||w_1(t) - w_2(t)||_{6,\Omega}^2. \tag{2.6}$$

Usando a desigualdade de Gronwall em (2.4) obtemos

$$||\varphi||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C_1||d||_{3,Q}^2\,||w_1 - w_2||_{6,Q}^2. \tag{2.7}$$

Integrando as estimativas (2.5) e (2.6) em $(0,T)$ tem-se

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|_{2,Q}^2 + ||\nabla\varphi||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + ||\Delta\varphi||_{2,Q}^2 \leq C_2||d||_{3,Q}^2\,||w_1 - w_2||_{6,Q}^2. \tag{2.8}$$

Combinando as estimativas (2.7) e (2.8) temos que

$$||\varphi||_{2,Q}^{(2)} \leq C||d||_{3,Q}||w_1 - w_2||_{6,Q}. \tag{2.9}$$

Aplicando o Lema B.9 e usando estimativa (2.9) obtemos

$$||T(\lambda, w_1) - T(\lambda, w_2)||_{p,Q} \leq C||d||_{3,Q}||w_1 - w_2||_{6,Q}.$$

com $p \geq 2$ se $n = 2$ e $p = 10$ se $n = 3$.

Assim, $T(\lambda,\cdot)$ é localmente Lipschitz em $L^6(Q)$ e, consequentemente, contínuo em $L^6(Q)$.

Agora, provarmos que $T(\lambda,\cdot)$ é um operador compacto $\forall\lambda \in$ [0,1]. Para isto, aplicando o Lema B.10 com $n = 2,3$ e $q = 2$ obtemos que a imersão de $W_2^{2,1}(Q) \subset L^r(Q)$ é compacta com $\forall r < 0$ para $n = 2$ e $r < 10$ para $n = 3$. Então, a imersão $W_2^{2,1}(Q) \subset L^6(Q)$ é compacta para $n = 2,3$.

Por outro lado, multiplicando a equação (2.2) por $\varphi,\ \varphi_t,\ -\Delta\varphi$, respectivamente, integrando em Ω, integrando por partes e usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\frac{d}{dt}||\varphi(t)||_{2,\Omega}^2 + 2\xi^2||\nabla\varphi(t)||_{2,\Omega}^2 \leq C_3(||w(t)||_{2,\Omega}^2 + ||w(t)||_{4,\Omega}^4 + ||w(t)||_{6,\Omega}^6 +$$

$$||g(t)||^2_{2,\Omega} + ||\varphi(t)||^2_{2,\Omega}). \tag{2.10}$$

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t)\right\|^2_{2,\Omega} + \xi^2\frac{d}{dt}||\nabla\varphi(t)||^2_{2,\Omega} \leq C_4(||w(t)||^2_{2,\Omega} + ||w(t)||^4_{4,\Omega} + ||w(t)||^6_{6,\Omega} + ||g(t)||^2_{2,\Omega}), \tag{2.11}$$

$$\frac{d}{dt}||\nabla\varphi(t)||^2_{2,\Omega} + \frac{\xi^2}{2}||\Delta\varphi(t)||^2_{2,\Omega} \leq C_5(||w(t)||^2_{2,\Omega} + ||w(t)||^4_{4,\Omega} + ||w(t)||^6_{6,\Omega} + ||g(t)||^2_{2,\Omega}). \tag{2.12}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall em (2.10) e integrando as estimativas (2.11) e (2.12) em $(0,T)$ obtemos

$$||\varphi||^2_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2_{2,Q} + ||\Delta\varphi||^2_{2,Q} \leq C(||\varphi_0||_{1,2,\Omega} + ||w||^2_{2,Q} + ||w||^4_{4,Q} + ||w||^6_{6,Q} + ||g||^2_{2,Q})$$

e conseqüentemente,

$$||\varphi||^{(2)}_{2,Q} \leq C(||\varphi_0||_{1,2,\Omega} + ||w||^2_{2,Q} + ||w||^4_{4,Q} + ||w||^6_{6,Q} + ||g||^2_{2,Q}). \tag{2.13}$$

Agora, seja $\mathcal{A} \subset L^6(Q)$ um conjunto limitado e $\{w_n\} \subset \mathcal{A}$ qualquer sequência então pela definição do operador $T(\lambda,\cdot)$ temos que $T(\lambda, w_n) = \varphi_n$. Mas, por (2.13) tem-se

$$||\varphi_n||^{(2)}_{2,Q} \leq C(||\varphi_0||_{1,2,\Omega} + ||w_n||^2_{2,Q} + ||w_n||^4_{4,Q} + ||w_n||^6_{6,Q} + ||g||^2_{2,Q})$$

o que implica

$$||\varphi_n||^{(2)}_{2,Q} \leq C(\mathcal{A}).$$

Como $W^{2,1}_2(Q) \subset L^6(Q)$ é compacta então existe uma subsequência $T(\lambda, w_k)$ que converge forte em $L^6(Q)$. Logo, $T(\lambda,\cdot)$ é compacto.

Para verificarmos que $T(\lambda,\cdot)$ é uniformemente contínuo com relação a λ, considere λ_1 e λ_2 e as correspondentes soluções $\varphi_1 = T(\lambda_1, w_1)$ e $\varphi_2 = T(\lambda_2, w_2)$. Então, o problema (2.2) para a diferença $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ torna-se

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \xi^2\Delta\varphi = d(w_1 - w_2) + (\lambda_1 - \lambda_2)g && \text{em} \quad Q,\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0 && \text{em} \quad S,\\
&\varphi(x,0) = 0 && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned}$$

com $d(x,t) = a + b(w_1 + w_2) - (w_1^2 + w_1w_2 + w_2^2) \in L^3(Q)$.

De modo análogo como na prova da continuidade temos que

$$||\varphi||_{2,Q}^2 \leq C \left\|d\right\|_{3,Q} \left\|w_1 - w_2\right\|_{6,Q} + \left|\lambda_1 - \lambda_2\right| \left\|g\right\|_{2,Q},$$

o que implica

$$\left\|T(\lambda_1, w_1) - T(\lambda_2, w_2)\right\|_{p,Q} \leq C \left\|d\right\|_{3,Q} \left\|w_1 - w_2\right\|_{6,Q} + \left|\lambda_1 - \lambda_2\right| \left\|g\right\|_{2,Q}.$$

Portanto, $T(\lambda, \cdot)$ é localmente Lipschitz com relação a λ.

Agora, fazendo $\lambda = 0$ em (2.2) tem-se

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \xi^2 \Delta \varphi = aw + bw^2 - w^3 && \text{em} \quad Q, \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 && \text{em} \quad S, \\ &\varphi(x, 0) = \varphi_0(x) && \text{em} \quad \Omega. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Aplicando o Lema E.3 temos que o problema (2.14) tem uma única solução $\varphi \in W_2^{2,1}(Q) \cap L^p(Q)$ com $p \geq 2$ se $n = 2$ e $p = 10$ se $n = 3$.

Para finalizar, provaremos que o conjunto dos possíveis pontos fixos de $T(\lambda, \cdot)$ é uniformemente limitado. Para isto, seja φ um ponto fixo de $T(\lambda, \cdot)$ então $T(\lambda, \varphi) = \varphi$ e o problema (2.2) torna-se

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \xi^2 \Delta \varphi = a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 + \lambda g && \text{em} \quad Q, \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 && \text{em} \quad S, \\ &\varphi(x, 0) = \varphi_0(x) && \text{em} \quad \Omega. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Multiplicando a equação (2.15) por φ, φ_t, e $-\Delta\varphi$, respectivamente, integrando em Ω usando as desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$\frac{d}{dt}||\varphi(t)||_{2,\Omega}^2 + 2\xi^2||\nabla\varphi(t)||_{2,\Omega}^2 + ||\varphi(t)||_{4,\Omega}^4 \leq C_1(1 + ||g(t)||_{2,\Omega}^2 + ||\varphi(t)||_{2,\Omega}^2), \tag{2.16}$$

com C_1 uma constante que depende de T, Ω e $\max\limits_{s\in\mathbb{R}} \left(as + bs^2 - \dfrac{s^4}{2}\right)$.

$$\left\|\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t)\right\|_{2,\Omega}^2 + 4\xi^2 \frac{d}{dt}||\nabla\varphi(t)||_{2,\Omega}^2 + 2\frac{d}{dt}||\varphi(t)||_{4,\Omega}^4 \leq C_2(||g(t)||_{2,\Omega}^2 + ||\varphi(t)||_{2,\Omega}^2) + ||\varphi(t)||_{4,\Omega}^4), \tag{2.17}$$

com C_2 uma constante que depende de $||a||_{\infty,\Omega}$ e $||b||_{\infty,\Omega}$.

$$\frac{d}{dt}||\nabla\varphi(t)||^2_{2,\Omega}+\frac{\xi^2}{2}||\Delta\varphi(t)||^2_{2,\Omega}+4\int_\Omega \varphi^2|\nabla\varphi|^2\,dx \leq C_3(||g(t)||^2_{2,\Omega}+||\varphi(t)||^2_{2,\Omega})+||\varphi(t)||^4_{4,\Omega}). \tag{2.18}$$

com C_3 uma constante que depende de ξ, $||a||_{\infty,\Omega}$ e $||b||_{\infty,\Omega}$.

Usando a desigualdade de Gronwall em (2.16) obtemos

$$||\varphi||^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + ||\varphi||^4_{4,Q} \leq C_4(1 + ||\varphi_0||^2_{2,\Omega} + ||g||^2_{2,Q}). \tag{2.19}$$

Integrando as estimativas (2.17) e (2.18) em $(0,T)$ e usando (2.19) obtemos

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2_{2,Q}+||\nabla\varphi||^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+||\varphi||^4_{L^\infty(0,T;L^4(\Omega))}+||\Delta\varphi||^2_{2,Q} \leq C_5(1+||\varphi_0||^2_{1,2,\Omega}+||g||^2_{2,Q}). \tag{2.20}$$

Combinando as estimativas (2.19) e (2.20) temos que

$$||\varphi||^{(2)}_{2,Q} \leq C(1 + ||\varphi_0||_{1,2,\Omega} + ||g||_{2,Q}). \tag{2.21}$$

com C uma constante que depende de T, ξ, Ω, $||a||_{\infty,Q}$ e $||b||_{\infty,Q}$.

Aplicando o Lema B.9 e usando (2.21) obtemos

$$||\varphi||_{p,Q} \leq C(1 + ||\varphi_0||_{1,2,\Omega} + ||g||_{2,Q}). \tag{2.22}$$

com $p \geq 2$ se $n = 2$ e $p = 10$ se $n = 3$.

Portanto, pelo Teorema de Leray-Schauder (veja Lema B.3), $T(1,\varphi)$ tem um ponto fixo, ou seja, existe $\varphi \in L^6(Q)$ solução do problema (2.1).

Para concluirmos a demonstração, vamos analisar a regularidade desta solução usando um argumento de *bootstraping*, ou seja, aplicaremos repetidamente o resultado da teoria L_p das equações parabólicas lineares dado no Lema E.3.

Pelas estimativas (2.21) e (2.22) temos que a solução φ satisfaz

$$||\varphi||_{p,Q} \leq ||\varphi||^{(2)}_{2,Q} \leq C(1 + ||\varphi_0||_{1,2,\Omega} + ||g||_{2,Q}). \tag{2.23}$$

com $2 \leq p < \infty$ se $n = 2$ e $p = 10$ se $n = 3$.

Aplicando o Lema E.3 com $q = 3$, $n = 3$ (o caso $n = 2$ é análogo), $g \in L^3(Q)$, $a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 \in L^3(Q)$ e $\varphi_0 \in W_3^{4/3}(\Omega)$ deduzimos que existe uma única solução

$\varphi \in W_3^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q)$ do problema (2.1) tal que

$$\|\varphi\|_{\infty,Q} \leq C\,\|\varphi\|_{3,Q}^{(2)} \leq C\left(\|\varphi_0\|_{4/3,3,\Omega} + \left\|a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3\right\|_{3,Q} + \|g\|_{3,Q}\right).$$

Logo,

$$\|\varphi\|_{\infty,Q} \leq C\,\|\varphi\|_{3,Q}^{(2)} \leq C\left(\|\varphi_0\|_{4/3,3,\Omega} + ||\varphi||_{3,Q} + ||\varphi||_{6,Q}^2 + ||\varphi||_{9,Q}^3 + \|g\|_{3,Q}\right)$$

e, pela estimativa (2.65) obtemos

$$\|\varphi\|_{\infty,Q} \leq C\,\|\varphi\|_{3,Q}^{(2)} \leq C\left(1 + \|\varphi_0\|_{4/3,3,\Omega} + \|g\|_{3,Q}\right).$$

Repetindo este argumento, obteremos $\varphi \in W_q^{2,1}(Q)$ satisfazendo

$$\|\varphi\|_{q,Q}^{(2)} \leq C\left(1 + \|\varphi_0\|_{m,q,\Omega} + \|g\|_{q,Q}\right)$$

com $m = 2-2/q$ e a constante $C > 0$ dependendo de T, ξ, Ω, $\|a\|_\infty$, $\|b\|_\infty$ e $\|\varphi_0\|_{m,q,\Omega}$.

A unicidade é obtida de modo usual por argumento de contradição. De fato, considere φ_1 e φ_2 duas soluções do problema (2.2) então $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ satisfaz

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \xi^2\Delta\varphi = d(x,t)(\varphi_1 - \varphi_2) && \text{em} \quad Q, \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0 && \text{em} \quad S, \\ &\varphi(x,0) = 0 && \text{em} \quad \Omega. \end{aligned} \tag{2.24}$$

com $d(x,t) = a + b(\varphi_1 + \varphi_2) - (\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2)$ tal que $\max\limits_{\overline{Q}} d(x,t) \leq C$.

Multiplicando a equação (2.24) por φ, integrando por partes, usando as desigualdades de Young e Gronwall obtemos

$$\frac{d}{dt}||\varphi(t)||_{2,\Omega}^2 \leq 0.$$

Integrando e usando que $\|\varphi_0\|_{2,\Omega} = 0$ obtemos o resultado desejado.

E a prova do Teorema 2.1 está completa. ■

Modelo Allen-Cahn não isotérmico

Nesta seção investigaremos a existência, unicidade e regularidade do modelo Allen-Cahn não isotérmico dado pelo seguinte sistema de equações:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \xi^2 \Delta\varphi + \varphi - \varphi^3 + \ell\theta && \text{em} \quad Q,\\
&\frac{\partial}{\partial t}(\theta + \ell\varphi) - k\,\Delta\theta = 0 && \text{em} \quad Q,\\
&\varphi = 0, \;\; \theta = 0 && \text{em} \quad S,\\
&\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \;\; \theta(x,0) = \theta_0(x) && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

com $Q = \Omega \times (0,T)$ e $S = \partial\Omega \times (0,T)$.

Provaremos os seguintes resultados:

Teorema 2.2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado de classe C^1. Suponha que $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$ e $\theta_0 \in L^2(\Omega)$. Então, existe um $T^* > 0$ que depende de φ_0, θ_0 tal que o problema (2.25) tem uma única solução (φ, θ) que satisfaz $\varphi \in C([0,T^*]; H_0^1(\Omega))$, com $\varphi' \in L^2(0,T^*; L^2(\Omega))$ e $\theta \in C([0,T^*]; L^2(\Omega))$ com $\theta' \in L^2(0,T^*; H^{-1}(\Omega))$.*

Teorema 2.3 *Sejam $0 < T < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1. Suponha $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$ e $\theta_0 \in L^2(\Omega)$. Então, o problema (2.25) tem uma única solução (φ, θ) que satisfaz $\varphi \in C([0,T]; H_0^1(\Omega))$ com $\varphi' \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$ e $\theta \in C([0,T]; L^2(\Omega))$.*

Teorema 2.4 *Seja Ω domínio aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$, $n = 2,3$, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1. Suponha que $q \geq 2$, $(\varphi_0, \theta_0) \in W_q^{2-2/q}(\Omega) \times W_q^{2-2/q}(\Omega)$ tal que $\varphi_0 = \theta_0 = 0$ em $\partial\Omega$. Então, existe uma única solução $(\varphi, \theta) \in W_q^{2,1}(Q) \times W_q^{2,1}(Q)$ do problema (2.25) tal que*

$$||\varphi||_{q,Q}^{(2)} + ||\theta||_{q,Q}^{(2)} \leq C(||\varphi_0||_{m,q,\Omega} + ||\theta_0||_{m,q,\Omega})$$

com $m = 2 - 2/q$ e $C > 0$ uma constante que depende de T, Ω, $||\theta_0||_{m,q,\Omega}$, $||\varphi_0||_{m,q,\Omega}$.

A demonstração dos Teoremas 2.2 e 2.3 podem ser encontradas em [70].

Solução local: prova do Teorema 2.2

Para provarmos o teorema 2.2 vamos considerar o seguinte conjunto:

$$X = \Big\{(\varphi,\theta)\ ;\ (\varphi,\theta) \in (C([0,T^*]; H_0^1(\Omega)))^2,\ \ ||(\varphi,\theta)||_{(C([0,T^*];H_0^1(\Omega)))^2} \leq R\Big\}, \tag{2.26}$$

com $0 < T^* < \infty$ e $R > 0$ constantes a serem determinadas.

Seja $\Phi : X \to X$ um operador defindo por: para $(\psi, \beta) \in X$, $(\varphi, \theta) = \Phi(\psi, \beta)$ é a única solução do seguinte problema linearizado:

$$\varphi_t - \xi^2 \Delta\varphi = (\psi - \psi^3) + \ell\beta \quad \text{em} \quad Q, \tag{2.27}$$

$$\theta_t - k\Delta\theta = -\ell\varphi_t \quad \text{em} \quad Q, \tag{2.28}$$

$$\varphi = 0, \ \theta = 0 \quad \text{em} \quad S, \tag{2.29}$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0, \ \theta(x, 0) = \theta_0 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{2.30}$$

Lembrando que $H_0^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$ e $(\psi, \beta) \in (C([0, T^*]; H_0^1(\Omega)))^2$, obtemos que $\psi^3 \in C([0, T^*]; L^2(\Omega))$ e, logo, $\psi - \psi^3 + \ell\beta \in C([0, T^*]; L^2(\Omega))$. Portanto, pelo resultado de existência e unicidade das equações diferenciais parabólicos lineares[1], temos que existe uma única solução φ tal que $\varphi \in C([0, T^*]; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, T^*; H^2(\Omega))$ com $\varphi_t \in L^2(0, T^*; L^2(\Omega))$.

Agora, aplicando novamente os resultados de existência e unicidade das equações diferenciais parabólicos lineares com $\varphi_t \in L^2(0, T^*; L^2(\Omega))$ e $\theta_0 \in L^2(\Omega)$ obtemos que existe uma única solução u tal que $\theta \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$ com $\theta_t \in L^2(0, T^*; H^{-1}(\Omega))$.

Para provarmos que o operador Φ está bem definido, ou seja, $\Phi(\psi, \beta) = (\varphi, \theta) \in X$ devemos fazer uma escolha adequada da constante $R > 0$ e impor algumas restrições em T^*. Para isto, precisamos obter algumas estimativas das soluções do problema linearizado (2.27)-(2.30).

Multiplicando (2.27) por φ, integrando em Ω e usando a fórmula de Green, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_\Omega |\psi(t) - \psi^3(t)||\varphi(t)|\, dx + \ell \int_\Omega |\beta(t)||\varphi(t)|\, dx.$$

Usando desigualdades de Hölder, Young e Poincaré, obtemos

$$\frac{d}{dt}||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1(||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\psi(t)||^6_{L^6(\Omega)}) + C_2||\beta(t)||^2_{L^2(\Omega)},$$

com C_1 e C_2 são constantes positivas dependendo apenas de Ω e ξ.

[1] veja Lema E.2

Agora, integrando no tempo em $(0,t)$ com $t \in [0,T^*]$ obtemos

$$||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2||\nabla\varphi||^2_{L^2(Q)} \leq ||\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + C_1T^*\Big(||\psi||^6_{C([0,T^*];L^6(\Omega))}+$$
$$||\psi||^2_{C([0,T^*];L^2(\Omega))} + ||\beta||^2_{C([0,T^*];L^2(\Omega))}\Big)$$

Logo,

$$\max_{0\leq t\leq T^*} ||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + C_1T^*\Big(||\psi||^6_{C([0,T^*];L^6(\Omega))}+$$
$$||\psi||^2_{C([0,T^*];L^2(\Omega))} + ||\beta||^2_{C([0,T^*];L^2(\Omega))}\Big).$$

Portanto,

$$||\varphi||^2_{C([0,T^*];L^2(\Omega))} \leq ||\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + C_2T^*(R^6+R^2). \tag{2.31}$$

Multiplicando (2.27) por $-\Delta\varphi$, integrando em Ω, usando a fórmula de Green e as desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$\frac{d}{dt}||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2||\Delta\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_3(||\psi(t)||^6_{L^6(\Omega)} + ||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\beta(t)||^2_{L^2(\Omega)}).$$

Integrando em $(0,t)$ com $t \in [0,T^*]$, obtemos

$$||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2||\Delta\varphi||^2_{L^2(Q)}) \leq ||\nabla\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + C_3T^*\Big(||\psi||^6_{C([0,T^*];L^6(\Omega))}+$$
$$||\psi||^2_{C([0,T^*];L^2(\Omega))} + ||\beta||^2_{C([0,T^*];L^2(\Omega))}\Big)$$

Logo,

$$||\nabla\varphi||^2_{C([0,T^*];L^2(\Omega))} \leq ||\nabla\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + C_4T^*(R^6+R^2). \tag{2.32}$$

Somando as estimativas (2.31) e (2.32) tem-se

$$||\varphi||^2_{C([0,T^*];H^1_0(\Omega))} \leq ||\varphi_0||^2_{H^1_0(\Omega)} + C_5T^*(R^6+R^2). \tag{2.33}$$

com a constante positiva C_5 dependendo de Ω e ξ.

Multiplicando (2.27) por φ_t, integrando em Ω, usando a fórmula de Green e as desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$||\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + 2\xi^2\frac{d}{dt}||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_6\Big(||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\psi||^6_{L^6(\Omega)} + ||\beta(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big).$$

Integrando em $(0,t)$ com $t \in [0,T^*]$, obtemos

$$||\varphi_t||^2_{L^2(Q)} + 2\xi^2||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_7||\nabla\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + C_8T^*\Big(||\psi||^6_{C([0,T^*];L^6(\Omega))}+$$

$$||\psi||^2_{C([0,T^*];L^2(\Omega))} + ||\beta||^2_{C([0,T^*];L^2(\Omega))}\Big)$$

o que implica,

$$||\varphi_t||^2_{L^2(Q)} \leq C_7||\nabla\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + C_8T^*(R^6 + R^2). \tag{2.34}$$

A seguir, multiplicando (2.28) por θ integrando em Ω, usando a fórmula de Green e as desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$\frac{d}{dt}||\theta(t)||^2_{L^2(\Omega)} + k||\nabla\theta(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_9||\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Integrando em $(0,t)$ com $t \in [0,T^*]$, tem-se

$$\max_{0\leq t\leq T^*} ||\theta(t)||^2_{L^2(\Omega)} + k||\nabla\theta||^2_{L^2(Q)} \leq ||\theta_0||^2_{L^2(\Omega)} + C_9||\varphi_t||^2_{L^2(Q)}. \tag{2.35}$$

Usando (2.34) em (2.35), tem-se

$$||\theta||^2_{C([0,T^*],L^2(\Omega))} \leq ||\theta_0||^2_{L^2(\Omega)} + C_7||\nabla\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + C_{10}T^*(R^6 + R^2). \tag{2.36}$$

com as constantes C_7 e C_{10} dependendo de Ω, ℓ e k.

Agora vamos escolher $R > 0$. Escolhendo

$$R^2 > 4\max\{||\varphi_0||^2_{H^1_0(\Omega)}, ||\theta_0||^2_{L^2(\Omega)}, C_7||\nabla\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)}\}, \tag{2.37}$$

temos que as estimativas (2.33) e (2.36) torna-se

$$||\varphi||^2_{C([0,T^*],L^2(\Omega))} \leq \frac{R^2}{4} + C_5T^*(R^6 + R^2), \tag{2.38}$$

$$||\theta||^2_{C([0,T^*],L^2(\Omega))} \leq \frac{R^2}{2} + C_5T^*(R^6 + R^2). \tag{2.39}$$

Para termos $(\varphi,\theta) \in X$ devemos impor que

$$||\varphi||^2_{C([0,T^*],L^2(\Omega))} \leq R^2 \ \text{ e } \ ||\theta||^2_{C([0,T^*],L^2(\Omega))} \leq R^2.$$

Fazendo esta imposição em (2.38) e (2.39), obtemos

$$\frac{R^2}{4} + C_5T^*(R^6 + R^2) \leq R^2 \ \text{ e } \ \frac{R^2}{2} + C_5T^*(R^6 + R^2) \leq R^2,$$

o que implica nas restrições

$$T^* < \frac{3}{4C_5(R^4+1)} \ \text{ e } \ T^* < \frac{1}{2C_{10}(R^4+1)}.$$

Portanto, escolhendo $R > 0$ satisfazndo (2.37) e T^* tal que

$$T_1^* < \min\left\{\frac{3}{4C_5(R^4+1)}, \frac{1}{2C_{10}(R^4+1)}\right\} \tag{2.40}$$

temos que $(\varphi, \theta) \in X$ e o operador Φ está bem definido.

No que segue, mostraremos que este operador Φ é uma contração em X, para podermos aplicar o teorema da contração[2]. Para isto, sejam $(\psi_i, \beta_i) \in X$ e $(\varphi_i, \theta_i) = \Phi(\psi_i, \beta_i)$ com $i = 1, 2$. Pela definição de Φ temos que

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \xi^2 \Delta \varphi_i = (\psi_i - \psi_i^3) + \ell \beta_i && \text{em} \quad Q,\\
&\frac{\partial \theta_i}{\partial t} - k\Delta \theta_i = -\ell \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} && \text{em} \quad Q,\\
&\varphi_i = 0, \;\; \theta_i = 0, && \text{em} \quad S,\\
&\varphi_i(x,0) = \varphi_0, \;\; \theta_i(x,0) = \theta_0 && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Fazendo $\psi = \psi_1 - \psi_2, \beta = \beta_1 - \beta_2, \theta = \theta_1 - \theta_2, \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ e subtraindo as equações (2.41), obtemos

$$\begin{aligned}
&\varphi_t - \xi^2 \Delta \varphi = \Big((\psi_1 - \psi_1^3) - (\psi_2 - \psi_2^3)\Big) + \ell \beta && \text{em} \quad Q,\\
&\theta_t - k\Delta \theta = -\ell \varphi_t && \text{em} \quad Q,\\
&\varphi = 0, \;\; \theta = 0, && \text{em} \quad S,\\
&\varphi(x,0) = 0, \;\; \theta(x,0) = 0 && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
(\psi_1 - \psi_1^3) - (\psi_2 - \psi_2^3) &= \psi - (\psi_1^3 - \psi_2^3)\\
&= \psi - (\psi_1 - \psi_2)(\psi_1^2 + \psi_1\psi_2 + \psi^2)\\
&= \psi(1 - (\psi_1^2 + \psi_1\psi_2 + \psi^2))\\
&= \psi\, d(\psi_1, \psi_2),
\end{aligned}$$

Portanto, (2.42) torna-se

$$\varphi_t - \xi^2 \Delta \varphi = \psi\, d(\psi_1, \psi_2) + \ell \beta \quad \text{em} \quad Q, \tag{2.43}$$

$$\theta_t - k\Delta \theta = -\ell \varphi_t \quad \text{em} \quad Q, \tag{2.44}$$

$$\varphi = 0, \;\; \theta = 0, \quad \text{em} \quad S, \tag{2.45}$$

$$\varphi(x,0) = 0, \;\; \theta(x,0) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{2.46}$$

[2]veja Teorema B.1

com $d(\psi_1,\psi_2) = 1 - (\psi_1^2 + \psi_1\psi_2 + \psi_2^2)$.

Observe que $\psi_i \in C([0,T^*]; H_0^1(\Omega)) \subset C([0,T^*]; L^6(\Omega))$, e, logo, $\psi_i\,\psi_j \in C([0,T^*]; L^6(\Omega))$, o que impica $d(\psi_1,\psi_2) \in C([0,T^*]; L^3(\Omega))$.

Multiplicando a equação (2.43) por φ, integrando em Ω, usando a fórmula de Green e as desigualdades de Hölder, Young e Poincaré temos

$$\frac{d}{dt}||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\xi^2}{2}||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_{10}\Big(||\psi(t)||^2_{L^6(\Omega)}||d(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^3(\Omega)} + ||\beta(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big), \tag{2.47}$$

com C_{10} dependendo de Ω e ξ^2.

Integrando em $(0,t)$ com $t \in (0,T^*)$, temos

$$||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\xi^2}{2}\int_0^t ||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_{10}\left(\int_0^t ||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)}||d(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^3(\Omega)} + \int_0^t ||\beta(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right). \tag{2.48}$$

Mas $\psi_i \in X$, e logo,

$$||d(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \widetilde{C}\Big(1 + ||\psi_1||^2_{C([0,T^*];L^3(\Omega))} + ||\psi_1||_{C([0,T^*];L^3(\Omega))}||\psi_2||_{C([0,T^*];L^3(\Omega))}$$
$$+||\psi_2||^2_{C([0,T^*];L^3(\Omega))}\Big).$$

Portanto,

$$||d(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \widetilde{C}(1+3R^2). \tag{2.49}$$

Usando (2.49) em (2.48) tem-se

$$\max_{t\in[0,T^*]} ||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\xi^2}{2\alpha}\int_0^t ||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq$$
$$C_{11}T^*\Big((1+3R^2)||\psi||^2_{C([0,T^*];H_0^1(\Omega))} + ||\beta||^2_{C([0,T^*];L^2(\Omega))}\Big), \tag{2.50}$$

com C_{11} dependendo de Ω e ξ^2

Multiplicando a equação (2.43) por φ_t, integrando em Ω, usando as desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$||\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + 2\xi^2\frac{d}{dt}||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \widetilde{C}\Big(||\psi||^2_{L^6(\Omega)}||d(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^3(\Omega)} + ||\beta||^2_{L^2(\Omega)}\Big).$$

Integrando em $(0,t)$, com $t \in (0,T^*)$, tem-se

$$\max_{t\in[0,T^*]} ||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t ||\varphi_t(\tau)||^2_{L^2(\Omega)}\,d\tau \leq$$

$$C_{12}T^*\Big((1+3R^2)||\psi||^2_{C([0,T^*],H_0^1(\Omega))}+||\beta||^2_{C([0,T^*],L^2(\Omega))}\Big), \tag{2.51}$$

com C_{12} dependendo de ℓ e ξ.

Somando (2.50) e (2.51), obtemos

$$||\varphi||^2_{C([0,T^*],H_0^1(\Omega))}+\int_0^t ||\varphi(\tau)||^2_{H_0^1(\Omega)}\,d\tau+\int_0^t ||\varphi_t(\tau)||^2_{L^2(\Omega)}\,d\tau \leq$$

$$C_{13}T^*\Big((1+3R^2)||\psi||^2_{C([0,T^*],H_0^1(\Omega))}+||\beta||^2_{C([0,T^*],L^2(\Omega))}\Big). \tag{2.52}$$

Multiplicando a equação (2.44) por u, integrando em Ω, usando as desigualdades de Hölder, Poincaré e Young, obtemos

$$\frac{d}{dt}||\theta(t)||^2_{L^2(\Omega)}+k||\nabla\theta||^2_{L^2(\Omega)}\leq C_{14}||\varphi_t||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Integrando em $(0,t)$ com $t\in[0,T^*]$ e usando (2.52), tem-se

$$\max_{t\in[0,T^*]}||\theta(t)||^2_{L^2(\Omega)}\leq C_{14}T^*\Big((1+3R^2)||\psi||^2_{C([0,T^*],H_0^1(\Omega))}+||\beta||^2_{C([0,T^*],L^2(\Omega))}\Big). \tag{2.53}$$

Somando (2.52) e (2.53), resulta que

$$||\varphi||^2_{C([0,T^*];H_0^1(\Omega))}+||\theta||^2_{C([0,T^*];L^2(\Omega))}\leq C_{15}T^*\Big((1+3R^2)||\psi||^2_{C([0,T^*],H_0^1(\Omega))}+||\beta||^2_{C([0,T^*],L^2(\Omega))}\Big), \tag{2.54}$$

com C_{15} dependendo de Ω,ξ,ℓ,k.

Escolhendo T^* tal que $C_{15}T^*(1+3R^2)\leq\dfrac{1}{4}$ e $C_{15}T^*\leq\dfrac{1}{4}$, tem-se

$$T^*\leq\frac{1}{4C_{15}(1+3R^2)}\quad\text{e}\quad T^*\leq\frac{1}{4C_{15}}.$$

Logo, T^* satisfaz

$$T_2^*\leq\min\left\{\frac{1}{4C_{15}(1+3R^2)},\frac{1}{4C_{15}}\right\}. \tag{2.55}$$

Então, por (2.40) e (2.55) devemos escolher T^* tal que

$$T^*\leq\min\{T_1^*,T_2^*\}. \tag{2.56}$$

Assim, (2.54) torna-se

$$||\Phi(\psi,\beta)||_X=||(\varphi,\theta)||_X\leq\frac{1}{2}||(\psi,\beta)||_X,$$

e concluímos que o operador Φ é uma contração.

Portanto, pelo Teorema da contração, existe um único ponto fixo (φ, θ) de Φ em X, ou seja, $(\varphi, \theta) = \Phi(\varphi, \theta)$ é a única solução local do problema (2.25) em $[0, T^*]$ com T^* dado em (2.56).

Além disso, aplicando-se os resultados da teoria das equações parabólicas lineares com $\varphi_t \in L^2(0, T^*; L^2(\Omega))$ e $\theta_0 \in L^2(\Omega)$ tem-se $\theta \in C([0, T^*]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T^*; H_0^1(\Omega))$ tal que $\theta_t \in L^2(0, T^*; H^{-1}(\Omega))$. Aplicando-se novamente os resultados da teoria das equações parabólicas lineares com $\varphi - \varphi^3 + \ell\theta \in C([0, T^*]; L^2(\Omega))$ e $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$ tem-se $\varphi \in C([0, T^*]; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, T^*; H^2(\Omega))$.

E a prova do Teorema 2.2 está completa. ■

Solução Global: prova do Teorema 2.3

Para provarmos a existência de solução em $[0, T]$ precisamos obter estimativas uniformes das normas $||\varphi(t)||_{H^1(\Omega)}$ e $||\theta(t)||_{L^2(\Omega)}$. Para isto, multiplique a equação campo de fase dada em (2.25) por φ, integre em Ω, use as desigualdades de Hölder, Poincaré e Young e o fato de que $\max_{s\in\mathbb{R}}(s^2 - s^4) < \infty$ para obter

$$\frac{d}{dt}||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \widehat{C}_1(1 + ||\theta(t)||^2_{L^2(\Omega)}). \tag{2.57}$$

Multiplicando a equação da temperatura dada em (2.25) por $\theta + \ell\varphi$, integrando em Ω, usando desigualdade de Hölder e Young, obtemos

$$\frac{d}{dt}||\theta(t) + \ell\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + k||\nabla\theta(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq k\ell^2||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.58}$$

Multiplicando (2.57) por $k\ell^2$ e (2.58) por $\dfrac{\xi^2}{2}$, e somando o resultado obtemos

$$\frac{d}{dt}\Big(||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||u(t) + \ell\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big) + ||(\nabla\varphi(t), \nabla\theta(t))||^2_{(L^2(\Omega))^2} \leq \widehat{C}_2(1 + ||\theta(t)||^2_{L^2(\Omega)}). \tag{2.59}$$

Observe que:

$$||\theta(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \widehat{C}(||\theta(t) + \ell\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)}). \tag{2.60}$$

Usando (2.60) em (2.59) tem-se

$$\frac{d}{dt}\left(||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta(t)+\ell\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right) + ||(\nabla\varphi(t),\nabla\theta(t))||^2_{(L^2(\Omega))^2}$$
$$\leq \widehat{C}_3\left(1 + ||\theta(t)+\ell\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

Usando a desigualdade de Gronwall tem-se

$$||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta(t)+\ell\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \widehat{C}_4 e^{\widehat{C}_3 T^*}(1 + ||\varphi_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta_0||^2_{L^2(\Omega)}). \tag{2.61}$$

Combinando (2.60) e (2.61), obtemos

$$\max_{t\in[0,T^*]} ||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \max_{t\in[0,T^*]} ||\theta(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \widetilde{C}_1 \tag{2.62}$$

com a constante $\widetilde{C}_1$ dependendo de T^*, ξ, ℓ, $||\varphi_0||_{L^2(\Omega)}$ e $||\theta_0||_{L^2(\Omega)}$.

Agora, multiplicando a equação de φ em (2.25) por φ_t, integrando em Ω, usando desigualdade de Hölder e Young, obtemos

$$||\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + 2\xi^2\frac{d}{dt}||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4}\frac{d}{dt}||\varphi(t)||^4_{L^4(\Omega)} \leq \widehat{C}_5\Big(||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\theta(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big).$$

Integrando em $(0,t)$, com $t\in[0,T^*]$,

$$||\varphi_t||^2_{L^2(Q)} + ||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\varphi(t)||^4_{L^4(\Omega)} \leq \widehat{C}_6\Big(||\varphi||^2_{L^2(Q^*)} + ||\theta||^2_{L^2(Q^*)}\Big). \tag{2.63}$$

Combinando (2.62) e (2.63) resulta

$$\max_{t\in[0,T^*]} ||\varphi(t)||_{H^1_0(\Omega)} + ||\varphi_t||^2_{L^2(Q)} \leq \widetilde{C}_2, \tag{2.64}$$

com $\widetilde{C}_2$ depedendo de T^*, $\xi, \ell, \Omega, ||\varphi_0||_{H^1_0(\Omega)}, ||\theta_0||_{L^2(\Omega)}$.

E a prova do Teorema 2.3 está completa. ■

Regularidade: prova do Teorema 2.4

Para analisarmos a regularidade desta solução usaremos um argumento de *bootstraping*, ou seja, aplicaremos repetidamente o resultado da teoria L_p das equações parabólicas lineares dado no Lema E.2 e o Teorema 2.1.

Pelas estimativa (2.62) e (2.64) temos que a solução (φ, θ) satisfaz

$$||\varphi_t||_{2,Q} + ||\varphi||_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} + ||\theta||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C(1 + ||\varphi_0||_{2,\Omega} + ||\theta_0||_{2,\Omega}). \quad (2.65)$$

Aplicando o Teorema 2.1 com $q = 2$, $n = 3$ (o caso $n = 2$ é análogo), $\theta \in L^2(Q)$, $\varphi^2 - \varphi^3 \in L^2(Q)$ e $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$ deduzimos que existe uma única solução $\varphi \in W_2^{2,1}(Q) \cap L^q(Q)$ do problema (2.25), $2 \leq q \leq 10$, tal que

$$||\varphi||_{q,Q} \leq C||\varphi||_{2,Q}^{(2)} \leq C(||\varphi_0||_{1,2,\Omega} + ||\theta||_{2,Q}).$$

Logo,

$$||\varphi||_{q,Q} \leq C||\varphi||_{2,Q}^{(2)} \leq C(1 + ||\varphi_0||_{1,2,\Omega} + ||\theta_0||_{2,\Omega}).$$

Aplicando o Lema E.2 com $q = 2$, $n = 3$, $\varphi_t \in L^2(Q)$ e $\theta_0 \in H_0^1(\Omega)$ deduzimos que existe uma única solução $\theta \in W_2^{2,1}(Q) \cap L^q(Q)$ do problema (2.25), $2 \leq q \leq 10$, tal que

$$||\theta||_{q,Q} \leq C||\theta||_{2,Q}^{(2)} \leq C(||\theta_0||_{1,2,\Omega} + ||\varphi_t||_{2,Q}).$$

Logo,

$$||\theta||_{q,Q} \leq C||\theta||_{2,Q}^{(2)} \leq C(1 + ||\varphi_0||_{1,2,\Omega} + ||\theta_0||_{1,2,\Omega}).$$

Aplicando repetidamente o Teorema 2.1 e o Lema E.2 deduzimos que existe uma única solução $(\varphi, \theta) \in W_q^{2,1}(Q) \times W_q^{2,1}(Q)$ do problema (2.25) tal que

$$||\varphi||_{q,Q}^{(2)} + ||\theta||_{q,Q}^{(2)} \leq C(1 + ||\varphi_0||_{m,q,\Omega} + ||\theta_0||_{m,q,\Omega}).$$

com $m = 2 - 2/q$ e a constante $C > 0$ dependendo de T, ξ, Ω, $||\varphi_0||_{m,q,\Omega}$ e $||\theta_0||_{m,q,\Omega}$.

E a prova do Teorema 2.4 está completa. ■

Observação 2.1 *Não é complicado mostrar que o Teorema* 2.4 *continua válido se temos um termo fonte de calor externo* $g \in L^q(Q)$ *na equação da temperatura do problema* (2.25).

2.2 Modelo Penrose-Fife

Nesta seção investigaremos a existência e unicidade do modelo Penrose-Fife, ou seja, do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \xi^2 \Delta \varphi = \varphi - \varphi^3 + \frac{a\,\varphi}{\theta} \quad \text{em} \quad Q, \tag{2.66}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - a\,\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -K \Delta \left(\frac{1}{\theta}\right) \quad \text{em} \quad Q, \tag{2.67}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 \quad \text{em} \quad S, \tag{2.68}$$

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \;\; \theta(x,0) = \theta_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{2.69}$$

com $\theta_0(x) > 0$ em Ω.

Do ponto de vista matemático, o modelo de Penronse-Fife é mais complicado do que o modelo Allen-Cahn não isotérmico. As principais dificuldades que aparecem em (2.66)-(2.69) são o termo $\frac{1}{\theta}$ que pode ser singular e o termo altamente não linear $\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t}$.

Para contornarmos a primeira dificuldade é mais conveniente reescrever a equação da temperatura em termos do inverso da temperatura $u = \frac{1}{\theta}$. Neste caso, o sistema (2.66)-(2.69) torna-se

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \xi^2 \Delta \varphi = \varphi - \varphi^3 + a\,\varphi\, u \quad \text{em} \quad Q, \tag{2.70}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - K u^2 \Delta u = -a\, u^2 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{em} \quad Q, \tag{2.71}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{em} \quad S, \tag{2.72}$$

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \;\; u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{2.73}$$

com $u_0 = \frac{1}{\theta_0} > 0$.

Vamos mostrar existência e unicidade de solução do sistema (2.70)-(2.73) aplicando o teorema de contração. Provaremos o seguinte resultado:

Teorema 2.5 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \leq 3$, um domínio limitado de classe C^2. Suponha que $\varphi_0 \in H^3(\Omega)$, $u_0 \in H^4(\Omega)$, $\frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} = \frac{\partial u_0}{\partial \eta} = 0$ em $\partial\Omega$ e $u_0(x) > 0$ em Ω.*

Então, existe $T^{**} \in (0,T)$ *tal que o problema* (2.70)-(2.73) *tem uma única solução local* (φ, u) *que satisfaz* $(\varphi, u) \in (C([0,T^{**}]; H^2(\Omega)))^2$ *com* $(\varphi', u') \in (C([0,T^{**}]; H^1(\Omega)))^2$.

Além disso, $u(x,t) \geq \dfrac{m}{2} > 0$ *em* $\bar{\Omega} \times [0,T^{**}]$ *com* $m = \min\limits_{x\in\Omega} u_0(x)$.

Na prova do Teorema 2.5 precisaremos do seguinte problema auxiliar:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - J(x,t)\Delta u + b(x,t)\, u = g(x,t) \quad \text{em} \quad Q, \tag{2.74}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{em} \quad S, \tag{2.75}$$

$$u(x,0) = u_0 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{2.76}$$

Consideraremos a seguinte hipótese:

(H) Existe uma constante $\alpha > 0$ tal que $0 < \alpha \leq J(\cdot)$ e $J \in C(\bar{Q})$, $\nabla J \in C([0,T], H^1(\Omega))$.

Os seguintes resultados de existência, unicidade e regularidade para o problema (2.74)-(2.76) podem ser encontrados em [41]:

Teorema 2.6 *Seja* Ω *domínio limitado do* $\mathbb{R}^n$ *de classe* C^2. *Suponha que a hipótese* **(H)** *é válida. Se* $u_0 \in H^1(\Omega)$, $g \in L^2(0,T; H^1(\Omega))$ *e* $b \in C([0,T]; H^2(\Omega))$. *Então existe uma única solução do problema* (2.74)-(2.76) *tal que* $u \in C([0,T]; H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^2(\Omega))$ *com* $u_t \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$.

Teorema 2.7 *Suponha que as hipóteses do Teorema* 2.6 *são satisfeitas. Além disso, suponha que* $u_0 \in H^4(\Omega)$, $g \in C([0,T]; H^1(\Omega))$, $g_t \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$, $b_t \in L^2(Q)$, $J_t \in C([0,T]; H^1(\Omega))$ *então solução* u *do problema* (2.74)-(2.76) *dada no Teorema* 2.6 *satisfaz* $u \in C([0,T]; H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^3(\Omega)), u_t \in C([0,T]; H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^2(\Omega))$.

Solução local: prova do teorema 2.5

Nesta seção provaremos o Teorema 2.5. Para isto, vamos substituir na equação (2.71) o inverso da temperatura $u = \dfrac{1}{\theta}$ e obter

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{u}\right) - a\,\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -K\Delta u \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} - Ku^2\Delta u = -a\,u^2\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Deste modo, temos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \xi^2 \Delta \varphi = \varphi - \varphi^3 + a\,\varphi\, u && \text{em} \quad Q,\\
&\frac{\partial u}{\partial t} - K u^2 \Delta u = -a\, u^2 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} && \text{em} \quad Q,\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 && \text{em} \quad S,\\
&\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \;\; u(x,0) = u_0(x) && \text{em} \quad \Omega,
\end{aligned} \tag{2.77}$$

com $u_0 = \dfrac{1}{\theta_0} > 0$. Para aplicarmos o teorema da contração, vamos considerar o seguinte conjunto:

$$X = \left\{ \begin{array}{l} (\varphi, u)\,;\, (\varphi, u) \in (C([0,T]; H^2(\Omega)))^2\,,\, (\varphi_t, u_t) \in (C([0,T]; H^1(\Omega))^2\,, \\ ||(\varphi, u)||_{(C([0,T];H^2(\Omega)))^2} \leq R\,,\, ||(\varphi_t, u_t)||_{(C([0,T];H^1(\Omega)))^2} \leq R\,, \\ u(x,t) \geq m > 0. \end{array} \right\} \tag{2.78}$$

com $m = \dfrac{1}{2} \min\limits_{\Omega} u_0(x) = \dfrac{m_0}{2}$.

Então, definimos o operador $\Phi : X \to X$ do seguinte modo: para $(\psi, v) \in X$, $(\varphi, u) = \Phi(\psi, v)$ é a única solução do problema linearizado:

$$\varphi_t - \xi^2 \Delta \varphi = \psi - \psi^3 + av\psi \quad \text{em} \quad Q, \tag{2.79}$$

$$u_t - K v^2 \Delta u + av\psi\varphi_t u = 0 \quad \text{em} \quad Q, \tag{2.80}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0, \;\; \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{em} \quad S, \tag{2.81}$$

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \;\; u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{2.82}$$

com $u_0(x) \geq \min\limits_{\Omega} u_0(x) = m_0 > 0$.

Vamos assumir que o operador Φ está bem definido. Ou seja, $\Phi(\psi, v) = (\varphi, u) \in X$ para $(\psi, v) \in X$.

No que segue, faremos alguns comentários sobre esta hipótese.

Observemos que, para $\psi, v \in C([0,T]; H^2(\Omega))$ e $\psi_t, v_t \in C([0,T]; H^1(\Omega))$ temos que $\psi - \psi^3 + av\psi \in C([0,T]; L^\infty(\Omega))$ e $(\psi - \psi^3 + av\psi)_t = \psi_t - 3\psi^2\psi_t + av_t\psi + av\psi_t \in C([0,T]; H^1(\Omega))$. Portanto, pelos resultados da teoria das equações diferenciais parabólicas lineares, com $\varphi_0 \in H^3(\Omega)$ existe uma única solução φ tal que

$\varphi \in C([0,T];H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^3(\Omega))$, $\varphi_t \in C([0,T];H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^3(\Omega))$ e $\varphi_{tt} \in L^2(0,T;H^2(\Omega))$.

Por outro lado, para $(\psi, v) \in (C([0,T];H^2(\Omega)))^2$, $\varphi_t \in C([0,T];H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^3(\Omega))$ e $\varphi_{tt} \in L^2(0,T;H^2(\Omega))$ tem-se $a\, v\psi\varphi_t \in C([0,T];H^2(\Omega))$ e $(av\psi\varphi_t)_t = av_t\psi\varphi_t + av\psi_t\varphi_t + + av\psi\varphi_{tt} \in L^2(0,T;H^2(\Omega))$. Logo, pelo Teorema 2.7 temos que existe uma única solução u do problema (2.80) tal que $u \in C([0,T];H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^3(\Omega))$, $u_t \in C([0,T];H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega))$.

Além disso, aplicando o resultado [41, teorema 5.3, p. 320] com $v^2 \in C(\bar{Q})$, $v\psi\varphi_t \in C(\bar{Q})$ e $u_0 \in H^4(\Omega)$ obtemos que $u \in H^{2,1}(Q)$, com $H^{2,1}(Q)$ o espaço das funções Hölder contínuas com segunda derivada no espaço e primeira derivada no tempo também Hölder contínuas.

Agora vamos verificar que a solução u satisfaz $u(x,t) \geq m > 0$.

Lema 2.1 *Existe $T_0 > 0$ tal que a solução u do problema* (2.80) *satisfaz $u \geq m > 0$ em $t \in [0, T_0]$.*

Demonstração: Vamos primeiro mostrar que $u(x,t) > 0$ em Q. Para isso, mostraremos que a parte negativa de u, denotada por u^-, é zero. Multiplicando a equação (2.80) por u^-, integrando em Ω, usando a fórmula de Green e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} + K\int_\Omega v^2|\nabla u^-(t)|^2 \leq$$

$$a||v(t)||_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||_{L^\infty(\Omega)}||\varphi_t(t)||_{L^\infty(\Omega)}||u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$2K||v(t)||_{L^\infty(\Omega)}||\nabla v(t)||_{L^6(\Omega)}||u^-(t)||_{L^3(\Omega)}||\nabla u^-(t)||_{L^2(\Omega)}.$$

Lembrando que $v^2 \geq m^2 = \alpha > 0$ (pois $v \in X$) e usando as desigualdades de Young e de interpolação (A.9), temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{K\alpha}{2}||\nabla u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$a||v(t)||_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||_{L^\infty(\Omega)}||\varphi_t(t)||_{L^\infty(\Omega)}||u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$||v(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||\nabla v(t)||^2_{L^6(\Omega)}||u^-(t)||^2_{L^3(\Omega)}.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}||u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} + K\alpha||\nabla u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq$$
$$C_1\Big(||v(t)||_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||_{L^\infty(\Omega)}||\varphi_t(t)||_{L^\infty(\Omega)}||u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)}+$$
$$||v(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||\nabla v(t)||^2_{L^6(\Omega)}\Big(||u^-(t)||_{L^2(\Omega)}||\nabla u^-(t)||_{L^2(\Omega)} + ||u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big).$$

Usando novamente a desigualdade de Young, resulta que

$$\frac{d}{dt}||u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} + K\alpha||\nabla u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq$$
$$C_2||u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big(||v(t)||_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||_{L^\infty(\Omega)}||\varphi_t(t)||_{L^\infty(\Omega)}+$$
$$||v(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||\nabla v(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||v(t)||^4_{L^\infty(\Omega)}||\nabla v(t)||^4_{L^\infty(\Omega)}\Big).$$

Usando a desigualdade de Gronwall, obtemos

$$||u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq$$
$$||u_0^-||^2_{L^2(\Omega)} \exp\Big(\int_0^T C_3\Big(||v(t)||_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||_{L^\infty(\Omega)}||\varphi_t(t)||_{L^\infty(\Omega)}+$$
$$||v(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||\nabla v(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||v(t)||^4_{L^\infty(\Omega)}||\nabla v(t)||^4_{L^\infty(\Omega)}\Big)\Big).$$

Portanto,

$$||u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||u_0^-||^2_{L^2(\Omega)}e^{\overline{C}T} \leq C_4||u_0^-||^2_{L^2(\Omega)},$$

com C_4 dependendo de $||v||_{L^\infty(Q)}, ||\psi||_{L^\infty(Q)}, ||\varphi_t||_{L^\infty(Q)}$. Mas, por hipótese, $u_0 \geq \min_\Omega u_0(x) = m_0 > 0$ e, logo, $u_0^- = 0$. Portanto,

$$||u^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq 0 \Longrightarrow u^-(t) = 0$$

em Q, o que implica $u(x,t) > 0$ em Q.

Agora, considere $b = a\,v\psi\varphi_t$ e $w = ue^{-\lambda t}$ com $\lambda = -(||b||_{L^\infty(Q)} + 1)$. Como $b \in C(\bar{Q})$ tem-se $b \leq ||b||_{\infty,Q} = \max\limits_{(x,t)\in\bar{Q}} |b(x,t)|$. Logo, $b < ||b||_{L^\infty} + 1 = -\lambda$. Portanto

$$b + \lambda < 0, \quad \text{em} \quad Q. \tag{2.83}$$

Por outro lado, substituindo $u = we^{\lambda t}$ na equação (2.80) obtemos

$$w_t - Kv^2\Delta w + (b+\lambda)w = 0.$$

Deste modo, $w(x,t)$ satisfaz o seguinte problema:

$$\begin{aligned} w_t - Kv^2\Delta w + (b+\lambda)w &= 0 \quad \text{em } Q, \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} &= 0 \quad \text{em } S, \\ w(x,0) &= u_0 \quad \text{em } \Omega. \end{aligned}$$

Como $u(x,t) > 0$ em Q então $w(x,t) > 0$ em Q. Além disso, usando (2.83) podemos aplicar o *princípio do mínimo* e concluir que o mínimo de $w(x,t)$ é atingido em $t = 0$ e $x \in \Omega$, ou seja,

$$\min_{\Omega} w(x,0) = u_0(x).$$

Observe que o mínimo de $w(x,t)$ não pode ser atingido em pontos da fronteira, pois $\dfrac{\partial w}{\partial \eta} = 0$ em S.

Portanto,

$$\min_{Q} u(x,t) \geq \min_{Q} w(x,t)e^{\lambda t} = u_0(x)e^{\lambda t} \geq m_0 e^{\lambda t},$$

com $m_0 = \min_{\Omega} u_0$. Assim, escolhendo $T_0 = \dfrac{\ln 2}{||b||_{\infty,Q} + 1}$, temos que

$$\min_{Q} u(x,t) \geq m_0 e^{\lambda t} > \frac{m_0}{2} = m$$

E a prova do Lema 2.1 está completa. ■

Para finalizar, devemos escolher $R > 0$ e impor algumas restrições em T para mostrar que: $\Phi(\psi, v) = (\varphi, u) \in X$ para $(\psi, v) \in X$. Este procedimento é análogo ao adotado na resolução da equação de Allen-Cahn não isotérmica, porém com maior grau de complexidade e é obtido usando a teoria clássica das equações parabólicas lineares. Omitiremos os detalhes nestas notas e assumiremos que existe um T^* tal que $R > 0$ está bem determinado (para mais detalhes, consulte [60, 69, 70]).

Agora vamos provar que Φ é uma contração.

Sejam $(\psi_i, v_i) \in X,\ i = 1, 2,,\ \psi = \psi_1 - \psi_2, \varphi = \varphi_1 - \varphi_2, u = u_1 - u_2$ e $v = v_1 - v_2$. Queremos mostrar que existe $k \in (0,1)$ tal que

$$||\Phi(\psi_1, v_1) - \Phi(\psi_2, v_2)||_X \leq k||(\psi_1, v_1) - (\psi_2, v_2)||_X.$$

Assim, pela definição de Φ, temos o seguinte problema:

$$\varphi_t - \xi^2\Delta\varphi = (\psi_1 - \psi_1^3) - (\psi_2 - \psi_2^3) + a(v_1\psi_1 - v_2\psi_2) \quad \text{em} \quad Q, \tag{2.84}$$

$$u_t - Kv_1^2\Delta u_1 + Kv_2^2\Delta u_2 + av_1(\varphi_1)_t\psi_1 u_1 - av_2(\varphi_2)_t\psi_2 u_2 = 0 \quad \text{em} \quad Q, \tag{2.85}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial\eta} = 0 \quad \text{em} \quad S, \tag{2.86}$$

$$\varphi(x,0) = 0,\ u(x,0) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{2.87}$$

Fazendo $d(\psi_1,\psi_2) = 1 - (\psi_1^2 + \psi_1\psi_2 + \psi_2^2) \in L^\infty(Q)$, obtemos que

$$\begin{aligned}
&(\psi_1 - \psi_1^3) - (\psi_2 - \psi_2^3) + a(v_1\psi_1 - v_2\psi_2) = d(\psi_1,\psi_2)\psi + a(v_1\psi_1 - v_2\psi_2)\\
&= d(\psi_1,\psi_2)\psi + a(v_1\psi_1 - v_1\psi_2 + v_1\psi_2 - v_2\psi_2)\\
&= d(\psi_1,\psi_2)\psi + a(v_1\psi + v\psi_2)\\
&= (d(\psi_1,\psi_2) + av_2)\psi + a\psi_1 v\\
&= \overline{d}(\psi_1,\psi_2)\psi + a\psi_1 v,
\end{aligned} \tag{2.88}$$

com $\overline{d}(\psi_1,\psi_2) = d(\psi_1,\psi_2) + av_2 \in C([0,T];H^2(\Omega)) \subset L^\infty(Q)$.

Além disso, observemos que

$$\begin{aligned}
-Kv_1^2\Delta u_1 + Kv_2^2\Delta u_2 &= -Kv_1\Delta u_1 + K(v_1^2\Delta u_2 - v_1^2\Delta u_2) + Kv_2^2\Delta u_2\\
&= -Kv_1^2\Delta u - K(v_1^2 - v_2^2)\Delta u_2.
\end{aligned} \tag{2.89}$$

Lembrando que $v_1^2 - v_2^2 = (v_1 + v_2)v$ e fazendo $\beta = (K(v_1 + v_2)\Delta u_2 - a(\varphi_1)_t\psi_1 u_2)$, temos que o segundo de (2.89) torna-se

$$\begin{aligned}
&K(v_1^2 - v_2^2)\Delta u_2 - av(\varphi_1)_t\psi_1 u_2 - a\varphi_t\psi_1 v_2 u_2 - a(\varphi_2)_t\psi v_2 u_2 =\\
&(K(v_1 + v_2)\Delta u_2 - a(\varphi_1)_t\psi_1 u_2)v - a(\varphi_t\psi_1 + (\varphi_2)_t\psi)v_2 u_2 =\\
&\qquad\qquad \beta v - a\Big(\varphi_t\psi_1 + (\varphi_2)_t\psi\Big)v_2 u_2.
\end{aligned} \tag{2.90}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&v_1(\varphi_1)_t\psi_1 u_1 - v_2(\varphi_2)_t\psi_2 u_2 = v_1(\varphi_1)_t\psi_1 u_1 - v_1(\varphi_1)_t\psi_1 u_2 + v_1(\varphi_1)_t\psi_1 u_2 - v_2(\varphi_2)_t\psi_2 u_2\\
&= v_1(\varphi_1)_t\psi_1 u + \Big(v_1(\varphi_1)_t\psi_1 - v_2(\varphi_2)_t\psi_2\Big)u_2\\
&= v_1(\varphi_1)_t\psi_1 u + \Big(v_1(\varphi_1)_t\psi_1 - v_2(\varphi_1)_t\psi_1 + v_2(\varphi_1)_t\psi_1 - v_2(\varphi_2)_t\psi_2\Big)u_2\\
&= v_1(\varphi_1)_t\psi_1 u + \Big(v(\varphi_1)_t\psi_1 + \Big((\varphi_1)_t\psi_1 - (\varphi_2)_t\psi_2\Big)v_2\Big)u_2\\
&= v_1(\varphi_1)_t\psi_1 u + v(\varphi_1)_t\psi_1 u_2 + \Big((\varphi_1)_t\psi_1 - (\varphi_2)_t\psi_1 + (\varphi_2)_t\psi_1 - (\varphi_2)_t\psi_2\Big)v_2 u_2\\
&= v_1(\varphi_1)_t\psi_1 u + v(\varphi_1)_t\psi_1 u_2 + \varphi_t\psi_1 v_2 u_2 + (\varphi_2)_t\psi v_2 u_2.
\end{aligned} \tag{2.91}$$

Desta forma, usando (2.88), (2.90) e (2.91) em (2.84)-(2.87), obtem-se:

$$\varphi_t - \xi^2\Delta\varphi = \overline{d}(\psi_1,\psi_2)\psi + a\psi_1 v \quad \text{em} \quad Q, \tag{2.92}$$

$$u_t - Kv_1^2\Delta u + av_1(\varphi_1)_t\psi_1 u = \beta v - a(\varphi_t\psi_1 + (\varphi_2)_t\psi)v_2u_2 \quad \text{em} \quad Q, \tag{2.93}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0, \frac{\partial u}{\partial\eta} = 0 \quad \text{em} \quad S, \tag{2.94}$$

$$\varphi(x,0) = 0, u(x,0) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{2.95}$$

com $\beta \in C([0,T];L^2(\Omega))$.

Além disso, notemos que $\overline{d}(\psi_1,\psi_2)\psi + a\psi_1 v \in C([0,T];H^2(\Omega))$, $\overline{d_t}(\psi_1,\psi_2) = d_t + a(v_2)_t \in C([0,T];H^1(\Omega))$, e ainda $(\overline{d}(\psi_1,\psi_2)\psi + a\psi_1 v)_t = \overline{d_t}(\psi_1,\psi_2)\psi + \overline{d}(\psi_1,\psi_2)\psi_t + a(\psi_1)_t v + a\psi_1 v_t \in \overline{d}(\psi_1,\psi_2)\psi + a\psi_1 v_t$ e portanto $(\overline{d}(\psi_1,\psi_2)\psi + a\psi_1 v)_t \in C([0,T];H^1(\Omega))$.

Assim, pela teoria das equações parabólicas lineares, concluímos que existe uma única solução φ tal que $\varphi \in C([0,T];H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^3(\Omega))$, $\varphi_t \in C([0,T];H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^3(\Omega))$, $\varphi_{tt} \in L^2(0,T;H^2(\Omega))$.

Agora, multiplicando a equação (2.92) por φ, integrando em Ω, usando a fórmula de Green e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + 2\xi^2||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \overline{d}(\psi_1,\psi_2)\psi(t)\varphi(t) + a\int_\Omega \psi_1(t)v(t)\varphi(t) \\
&\leq ||\overline{d}(\psi_1,\psi_2)||_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||_{L^2(\Omega)}||\varphi(t)||_{L^2(\Omega)} + \\
&+ a||\psi_1(t)||_{L^\infty(\Omega)}||v(t)||_{L^2(\Omega)}||\varphi(t)||_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + 2\xi^2||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$\frac{1}{2}\Big(||\overline{d}(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + a^2||\psi_1(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big) + \frac{1}{2}||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.96}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall e lembrando que $\varphi(0) = 0$, temos que

$$||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$e^t\Big(\int_0^t \Big(||\overline{d}(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi(\tau)||^2_{L^2(\Omega)} + a^2||\psi_1(\tau)||^2_{L^\infty(\Omega)}||v(\tau)||^2_{L^2(\Omega)}\Big)\,d\tau\Big). \tag{2.97}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\max_{t\in[0,T^*]}||\overline{d}(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^\infty(\Omega)} &\leq C(||d(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^\infty(Q)} + a^2||v_2||^2_{L^\infty(Q)}) \\
&\leq C(1 + ||\psi_1||^4_{L^\infty(Q)} + ||\psi_1\,\psi_2||^2_{L^\infty(Q)} \\
&+ ||\psi_2||^4_{L^\infty(Q)} + ||v_2||^2_{L^\infty(Q)}).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\max_{t\in[0,T^*]} ||\overline{d}(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^\infty(\Omega)} \leq C(1+3R^4+R^2). \tag{2.98}$$

Usando (2.97) e (2.98), obtemos

$$\max_{t\in[0,T^*]} ||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1 e^{T^*}T^*\left(\max_{t\in[0,T^*]} ||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \max_{t\in[0,T^*]} ||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right) \tag{2.99}$$

com C_1 dependendo de a, R^2, R^4.

Integrando (2.96) em $(0,t)$ com $t\in[0,T^*]$, temos

$$\begin{aligned} 2\xi^2||\nabla\varphi||^2_{L^2(Q)} &\leq \int_0^{T^*} ||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt + \int_0^{T^*}\Big(||\overline{d}(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \\ &+ a^2||\psi_1(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big)\,dt \end{aligned} \tag{2.100}$$

Usando o resultado de (2.99), obtemos

$$||\nabla\varphi||^2_{L^2(Q)} \leq C_2 e^{T^*}T^*(\max_{t\in[0,T^*]} ||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \max_{t\in[0,T^*]} ||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}). \tag{2.101}$$

com C_2 dependendo de a, R^2, R^4.

Agora, multiplicando a equação (2.92) por $-\Delta\varphi$ e integrando em Ω, tem-se

$$-\int_\Omega \varphi_t(t)\Delta\varphi(t) - \xi^2\int_\Omega |\Delta\varphi(t)|^2 = -\int_\Omega \overline{d}\psi(t)\Delta\varphi(t) + a\int_\Omega \psi_1(t)v(t)\Delta\varphi(t).$$

Usando a fórmula de Green e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_\Omega \nabla\varphi_t(t)\nabla\varphi(t) + \xi^2||\Delta\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$||\overline{d}||_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||_{L^2(\Omega)}||\Delta\varphi(t)||_{L^2(\Omega)} + a||\psi_1(t)||_{L^\infty(\Omega)} + ||v(t)||_{L^2(\Omega)}||\Delta\varphi(t)||_{L^2(\Omega)}.$$

Usando a desigualdade de Young, tem-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\xi^2}{2}||\Delta\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$\frac{1}{2}\Big(||\overline{d}||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + a^2||\psi_1(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big).$$

Integrando em $(0,t)$ com $t\in[0,T^*]$, temos

$$||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2||\Delta\varphi||^2_{L^2(Q)} \leq ||\overline{d}||^2_{L^\infty(Q)}\int_0^{T^*} ||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt +$$

$$a^2||\psi_1||^2_{L^\infty(Q)}\int_0^{T^*} ||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt.$$

Portanto,

$$\max_{t\in[0,T^*]} ||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2||\Delta\varphi||^2_{L^2(Q)} \leq$$

$$C_3T^*\Big(\max_{t\in[0,T^*]} ||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \max_{t\in[0,T^*]} ||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big), \tag{2.102}$$

com C_3 dependendo de a, R^2, R^4.

Agora, vamos multiplicar a equação (2.92) por φ_t, integrar em Ω, usar a fórmula de Green e a desigualdade de Hölder para obter

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi_t(t)\varphi_t(t) - \xi^2\int_\Omega \Delta\varphi(t)\varphi_t(t) &= \int_\Omega \overline{d}\psi(t)\varphi_t(t) + a\int_\Omega \psi_1(t)v(t)\varphi_t(t)\\ &\leq ||\overline{d}||_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||_{L^2(\Omega)}||\varphi_t(t)||_{L^2(\Omega)} +\\ &+ a||\psi_1(t)||_{L^\infty(\Omega)}||v(t)||_{L^2(\Omega)}||\varphi_t(t)||_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Usando desigualdade de Young,

$$||\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2\int_\Omega \nabla\varphi(t)\nabla\varphi_t(t) \leq$$

$$\frac{1}{2}\Big(||\overline{d}||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + a^2||\psi_1(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big) + \frac{1}{2}||\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)},$$

assim, temos

$$||\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \xi^2\frac{d}{dt}||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$||\overline{d}||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + a^2||\psi_1(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Integrando em $(0,t)$ com $t\in[0,T^*]$, temos

$$\int_0^{T^*} ||\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_0^{T^*} ||\overline{d}||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^{T^*} a^2||\psi_1(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||v(t)||^2_{L^2(\Omega)},$$

que resulta,

$$||\varphi_t||^2_{L^2(Q)} \leq C_4T^*\left(\max_{t\in[0,T^*]} ||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \max_{t\in[0,T^*]} ||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right), \tag{2.103}$$

com C_4 dependendo de a, R^2, R^4.

Agora, multiplicando a equação (2.92) por $\Delta(\Delta\varphi) = \Delta^2\varphi$, integrando em Ω e aplicando a fórmula de Green, temos

$$\int_\Omega \varphi_t\Delta^2\varphi - \xi^2\int_\Omega (\Delta\varphi)(\Delta^2\varphi) = \int_\Omega (\overline{d}\psi + a\psi_1 v)(\Delta^2\varphi) = -\int_\Omega \nabla(\overline{d}\psi + a\psi_1 v)(\nabla(\Delta\varphi)).$$

Usando as desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\Delta\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\xi^2}{2}||\nabla(\Delta\varphi(t))||^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{4\xi^2}(||\nabla\overline{d}||^2_{L^2(\Omega)}||\psi(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}+$$
$$||\overline{d}||^2_{L^\infty(\Omega)}||\nabla\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\psi_1(t)||^2_{L^2(\Omega)}||v(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}+$$
$$||\psi_1(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||\nabla v(t)||^2_{L^2(\Omega)}).$$

Usando desigualdade de Gronwall, temos

$$\max_{t\in[0,T^*]}||\Delta\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{T^*}C_5T^*\Big(||\psi||^2_{L^\infty(Q)} + ||v||^2_{L^\infty(Q)}+$$
$$\max_{t\in[0,T^*]}\Big(||\nabla\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla v(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big)\Big), \tag{2.104}$$

com C_5 dependendo de a, R^2, R^4.

As estimativas acimas garantem que $\varphi \in C([0,T^*]; H^2(\Omega))$.

Dando prosseguimento, vamos derivar a equação (2.92) em t, o que resulta

$$\varphi_{tt} - \xi^2\Delta\varphi_t = (\overline{d}\psi + a\psi_1 v)_t = \overline{d_t}\psi + \overline{d}\psi_t + a(\psi_1)_t v + a\psi_1 v_t.$$

Lembrando que $\varphi(x,0) = 0 \Rightarrow \Delta\varphi(x,0) = 0$, a condição inicial fica

$$\varphi_t(0) = \overline{d}(0)\psi(0) + a\psi_1(0)v(0) = w_0,$$

que está bem definida, pois $\overline{d}, \psi, \psi_1, v \in C([0,T]; H^2(\Omega))$.
E como $\varphi_0, u_0 \in H^3(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, então $\varphi_t(0) \in L^\infty(\Omega)$. Fazendo $\varphi_t = w$, temos o sistema

$$\begin{cases} w_t - \xi^2\Delta w &= \overline{d_t}\psi + \overline{d}\psi_t + a(\psi_1)_t v + a\psi_1 v_t \quad \text{em } Q, \\ \dfrac{\partial w}{\partial\eta} &= 0 \quad \text{em } S, \\ w(x,0) &= w_0(x) \quad \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{2.105}$$

Multiplicando (2.105) por w, integrando em Ω, usando a fórmula de Green e as desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega w_t w - \xi^2\int_\Omega w\Delta w &= \int_\Omega \overline{d_t}\psi w + \int_\Omega \overline{d}\psi_t w + a\int_\Omega (\psi_1)_t v w + a\int_\Omega \psi_1 v_t w \\ &\leq ||\overline{d_t}||_{L^2(\Omega)}||\psi(t)||_{L^\infty(\Omega)}||w(t)||_{L^2(\Omega)} \\ &+ ||\overline{d}||_{L^\infty(\Omega)}||\psi_t(t)||_{L^2(\Omega)}||w(t)||_{L^2(\Omega)} \\ &+ a||(\psi_1)_t(t)||_{L^2(\Omega)}||v(t)||_{L^\infty(\Omega)}||w(t)||_{L^2(\Omega)} \\ &+ a||\psi_1(t)||_{L^\infty(\Omega)}||v_t(t)||_{L^2}||w(t)||_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

o que resulta,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w(t)||^2_{L^2(\Omega)}+\xi^2||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\Big(||\overline{d_t}||^2_{L^2(\Omega)}||\psi(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}+||\overline{d}||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}+$$

$$a^2||(\psi_1)_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}||v(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}+a^2||\psi_1(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big)+\frac{1}{2}||w(t)||^2_{L^2(\Omega)}. \quad (2.106)$$

Usando a desigualdade de Gronwall, temos

$$||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{T^*}\Big(||w_0||^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^{T^*}\Big(||\overline{d_t}||^2_{L^2(\Omega)}||\psi(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}+||\overline{d}||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}+$$

$$+||(\psi_1)_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}||v(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}+||\psi_1(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big)\,dt\Big). \quad (2.107)$$

Notemos que

$$\begin{aligned}||\overline{d}_t(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^2(\Omega)} &\leq ||d_t(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^2(\Omega)}+a^2||(v_2)_t||^2_{L^2(\Omega)}\\ &\leq ||2\psi_1(\psi_1)_t+(\psi_1)_t\psi_2+\psi_1(\psi_2)_t+2\psi_2(\psi_2)_t||^2_{L^2(\Omega)}+a^2||(v_2)_t||^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

logo,

$$||\overline{d}_t(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^2(\Omega)} \leq 10R^4+a^2R^2. \quad (2.108)$$

Usando (2.98) e (2.108) em (2.107) e lembrando que $\varphi_t = w$, temos

$$||\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_6e^{T^*}T^*\left(||\psi||^2_{L^\infty(Q)}+||v||^2_{L^\infty(Q)}+\max_{t\in[0,T^*]}(||\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}+||v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)})\right), \quad (2.109)$$

com C_6 dependendo de a, R^2, R^4.

Integrando em $(0,t)$ a expressão (2.106) e usando (2.109), temos

$$\xi^2||\nabla\varphi_t||^2_{L^2(Q)} \leq C_7e^{T^*}T^*\left(||\psi||^2_{L^\infty(Q)}+||v||^2_{L^\infty(Q)}+\max_{t\in[0,T^*]}(||\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}+||v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)})\right). \quad (2.110)$$

Portanto, obtemos $\varphi_t \in C([0,T^*];L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T^*;H^1(\Omega))$.

Agora, multiplicando a equação (2.105) por $-\Delta w$,

$$-\int_\Omega w_t\Delta w+\xi^2\int_\Omega|\Delta w|^2 = -\int_\Omega(\overline{d_t}\psi+\overline{d}\psi_t+a(\psi_1)_tv+a\psi_1v_t)\Delta w.$$

Aplicando a fórmula de Green e as desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$\frac{d}{dt}||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)}+4\xi^2||\Delta w(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$||\nabla w||^2_{L^2(\Omega)} + \Big(||\nabla \overline{d_t}||^2_{L^2(\Omega)}||\psi||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||\overline{d_t}||^2_{L^6(\Omega)}||\nabla\psi||^2_{L^3(\Omega)} +$$
$$||\nabla\overline{d}||^2_{L^6(\Omega)}||\psi_t||^2_{L^3(\Omega)} + ||\nabla(\psi_1)_t||^2_{L^2(\Omega)}||v||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||\overline{d}||^2_{L^\infty(\Omega)}||\nabla\psi_t||^2_{L^2(\Omega)} +$$
$$||(\psi_1)_t||^2_{L^6(\Omega)}||\nabla v||^2_{L^3(\Omega)} + ||\nabla\psi_1||^2_{L^6(\Omega)}||v_t||^2_{L^3(\Omega)} + ||\psi_1||^2_{L^\infty(\Omega)}||\nabla v_t||^2_{L^2(\Omega)}\Big). \quad (2.111)$$

Notemos que

$$||\nabla\overline{d}(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^6(\Omega)} \leq ||\nabla d(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^6(\Omega)} + a^2||\nabla v_2||^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq ||2\psi_1\nabla(\psi_1) + \nabla(\psi_1)\psi_2 + \psi_1\nabla(\psi_2) + 2\psi_2\nabla(\psi_2)||^2_{L^6(\Omega)} + a^2||\nabla(v_2)||^2_{L^6(\Omega)},$$

logo,

$$||\nabla\overline{d}(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^6(\Omega)} \leq 10R^4 + a^2R^2. \quad (2.112)$$

e também,

$$\begin{aligned} ||\nabla\overline{d}_t(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^2(\Omega)} &\leq ||\nabla d_t(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^2(\Omega)} + a^2||\nabla(v_2)_t||^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq ||2\nabla\psi_1(\psi_1)_t + 2\psi_1\nabla(\psi_1)_t + \nabla\psi_1(\psi_2)_t + \psi_1(\psi_2)_t \\ &+ \nabla(\psi_1)t\psi_2 + (\psi_1)_t\nabla\psi_2 + 2\nabla\psi_2(\psi_2)_t + 2\psi_2\nabla(\psi_2)_t||^2_{L^2(\Omega)} \\ &+ a^2||\nabla(v_2)_t||^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$||\nabla\overline{d}_t(\psi_1,\psi_2)||^2_{L^2(\Omega)} \leq 20R^4 + a^2R^2. \quad (2.113)$$

Assim, usando (2.98), (2.108), (2.112), (2.113) e a desigualdade de Gronwall em (2.111), temos

$$||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{T^*}C_8\int_0^{T^*}\Big(||\psi(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||\nabla\psi(t)||^2_{L^3(\Omega)} + ||\psi_t(t)||^2_{L^3(\Omega)} + ||v(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} +$$
$$||\nabla\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla v(t)||^2_{L^3(\Omega)} + ||v_t(t)||^2_{L^3(\Omega)} + ||\nabla v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big)\,dt, \quad (2.114)$$

com C_8 dependendo de a, R^2, R^4.

Usaremos as interpolações

$$\begin{aligned} ||\nabla\psi||^2_{L^3(\Omega)} &\leq C(||\nabla\psi||_{L^2(\Omega)}||\Delta\psi||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\psi||^2_{L^2(\Omega)}), \\ ||\psi_t||^2_{L^3(\Omega)} &\leq C(||\psi_t||_{L^2(\Omega)}||\nabla\psi_t||_{L^2(\Omega)} + ||\psi_t||^2_{L^2(\Omega)}), \\ ||v_t||^2_{L^3(\Omega)} &\leq C(||v_t||_{L^2(\Omega)}||\nabla v_t||_{L^2(\Omega)} + ||v_t||^2_{L^2(\Omega)}), \\ ||\nabla v||^2_{L^3(\Omega)} &\leq C(||\nabla v||_{L^2(\Omega)}||\Delta v||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)}). \end{aligned}$$

Portanto, aplicando-as na desigualdade (2.114), obtemos

$$||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{T^*} C_8 \int_0^{T^*} \Big(||\psi||^2_{L^\infty(\Omega)} + (||\nabla\psi||_{L^2(\Omega)}||\Delta\psi||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\psi||^2_{L^2(\Omega)}) +$$
$$(||\psi_t||_{L^2(\Omega)}||\nabla\psi_t||_{L^2(\Omega)} + ||\psi_t||^2_{L^2(\Omega)}) + ||v||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||\nabla\psi_t||^2_{L^2(\Omega)} +$$
$$(||\nabla v||_{L^2(\Omega)}||\Delta v||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)}) + (||v_t||_{L^2(\Omega)}||\nabla v_t||_{L^2(\Omega)} + ||v_t||^2_{L^2(\Omega)}) +$$
$$+ ||\nabla v_t||^2_{L^2(\Omega)} \Big) dt,$$

e portanto, para $w = \varphi_t$, obtemos a estimativa

$$\begin{aligned} ||\nabla\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} &\leq e^{T^*} C_8 T^* \Big(||\psi||^2_{L^\infty(Q)} + ||v||^2_{L^\infty(Q)} + \max_{t\in[0,T^*]} (||\nabla\psi(t)||_{L^2(\Omega)} \\ &+ ||\nabla v(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\Delta v(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\Delta\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \\ &+ ||\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}) \Big). \end{aligned} \tag{2.115}$$

Logo, as estimativas acima garantem que $\varphi_t \in C([0,T^*]; H^1(\Omega))$.

Vamos agora multiplicar a equação (2.105) por w_t para obter

$$\int_\Omega w_t w_t - \xi^2 \int_\Omega \Delta w w_t = \int_\Omega (\overline{d_t}\psi + \overline{d}\psi_t + a(\psi_1)_t v + a\psi_1 v_t) w_t$$

Usando a fórmula de Green e as desigualdades de Hölder e Young, temos

$$\begin{aligned} ||w_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\xi^2}{2}\frac{d}{dt}||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{1}{2}\Big(||\overline{d_t}||^2_{L^2(\Omega)}||\psi||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||\overline{d}||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi_t||^2_{L^2(\Omega)} + \\ &+ a^2||(\psi_1)_t||^2_{L^2(\Omega)}||v||^2_{L^\infty(\Omega)} + a^2||\psi_1||^2_{L^\infty(\Omega)}||v_t||^2_{L^2(\Omega)} \Big) + \\ &+ \frac{1}{2}||w_t||^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Integrando em $(0,t)$ com $t \in [0,\overline{T}]$, para $w_t = \varphi_{tt}$, concluímos que

$$||\varphi_{tt}||^2_{L^2(Q)} \leq C_9 T^* (||\psi||^2_{L^\infty(Q)} + ||v||^2_{L^\infty(Q)} +$$
$$\max_{t\in[0,T^*]} (||\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)})), \tag{2.116}$$

com C_9 dependendo de a, R^2, R^4.

Assim, temos que $\varphi_{tt} \in L^2(Q_{T^*})$.

Precisamos agora obter algumas estimativas para $u(x,t)$. Para isto usaremos a equação (2.93) e o fato de que, para $v_1 \in X$, tem-se $K\, v_1^2 \geq K\, m^2 = \alpha > 0$. Considere $J = Kv_1^2 \geq \alpha > 0$ e $b = av_1(\varphi_1)_t\psi_1$.

Multiplicando a equação (2.93) por u e integrando em Ω, tem-se

$$\int_\Omega u_t u - \int_\Omega J(\Delta u)u + \int_\Omega buu = \int_\Omega (\beta v - a(\varphi_t\psi_1 + (\varphi_2)_t\psi)v_2u_2)u.$$

Usando a fórmula de Green, observe que

$$\begin{aligned} -\int_\Omega J(\Delta u)u = \int_\Omega \nabla u \nabla(Ju) &= \int_\Omega \nabla u((\nabla J)u + J(\nabla u)) \\ &= \int_\Omega \nabla J(\nabla u)u + \int_\Omega J|\nabla u|^2. \end{aligned}$$

Desta forma, lembrando que $J \geq \alpha > 0$, e usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega J(t)|\nabla u(t)|^2 \leq$$

$$||\nabla J(t)||_{L^6(\Omega)}||\nabla u(t)||_{L^2(\Omega)}||u(t)||_{L^3(\Omega)} + ||b(t)||_{L^\infty(\Omega)}||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$\Big(||\beta(t)||_{L^2(\Omega)}||v(t)||_{L^\infty(\Omega)} + ||\varphi_t(t)||_{L^2(\Omega)}||\psi_1(t)||_{L^\infty(\Omega)} +$$

$$|(\varphi_2)_t(t)||_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||_{L^2(\Omega)}\Big)||u_2(t)||_{L^\infty(\Omega)}||v_2(t)||_{L^\infty(\Omega)}||u||_{L^2(\Omega)},$$

Logo, usando a desigualdade de Young, temos

$$\frac{d}{dt}||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$\frac{1}{\alpha}||\nabla J(t)||^2_{L^6(\Omega)}||u(t)||^2_{L^3(\Omega)} + ||b(t)||_{L^\infty(\Omega)}||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$\Big(||\beta(t)||^2_{L^2(\Omega)}||v(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}||\psi_1(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} +$$

$$||(\varphi_2)_t(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big)||u_2(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||v_2(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||u(t)||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Usando a desigualdade de interpolação (A.9), tem-se

$$||\nabla J(t)||^2_{L^6(\Omega)}||u||^2_{L^3(\Omega)} \leq$$

$$C\Big(||u||_{L^2(\Omega)}||\nabla u||_{L^2(\Omega)} + ||u||^2_{L^2(\Omega)}\Big)||\nabla J(t)||^2_{L^6(\Omega)} \leq$$

$$C\Big(||\nabla J(t)||^4_{L^6(\Omega)}||u||^2_{L^2(\Omega)} + \Big(||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} + ||u||^2_{L^2(\Omega)}\Big)||\nabla J(t)||^2_{L^6(\Omega)}\Big).$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C\Big(||\nabla J(t)||^4_{L^6(\Omega)} + ||\nabla J(t)||^2_{L^6(\Omega)} + ||b(t)||_{L^\infty(\Omega)} + 1\Big)||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+\Big(||\beta(t)||^2_{L^2(\Omega)}||v(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}||\psi_1(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}+$$
$$+||(\varphi_2)_t(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big)||u_2(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||v_2(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}. \tag{2.117}$$

Notemos que

$$||\nabla J(t)||^2_{L^6} = 4K^2||v_1\nabla v_1||^2_{L^6} \leq CR^4, \tag{2.118}$$

$$||b(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} = ||av_1\varphi_1\psi_1||^2_{L^\infty(\Omega)} \leq a^2\, R^6 \tag{2.119}$$

$$||\nabla b(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq a^2||\nabla v_1\varphi_1\psi_1 + v_1\nabla\varphi_1\psi_1 + v_1\varphi_1\nabla\psi_1||^2_{L^2(\Omega)} \leq 3a^2R^6 \tag{2.120}$$

e também,

$$\begin{aligned} ||\beta(t)||^2_{L^2(\Omega)} &\leq K^2(||v_1||^2_{L^2(\Omega)} + ||v_2||^2_{L^2(\Omega)})||\Delta u_2||^2_{L^2(\Omega)} + a^2||(\varphi_1)_t||^2_{L^2(\Omega)}\psi_1\, u_2||^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C(K,a)\,((R^2+R^2)R^2 + R^2R^2R^2), \end{aligned}$$

logo,

$$||\beta(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C(K,a)(2R^4 + R^6). \tag{2.121}$$

Usando (2.118), (2.119), (2.121) e a desigualdade de Gronwall em (2.117), temos

$$||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{\overline{C}T^*}C_{10}\left(||v||^2_{L^\infty(Q)}T^* + ||\varphi_t(t)||^2_{L^2(Q)} + T^*\max_{t\in[0,T^*]}||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right). \tag{2.122}$$

com C_{10} dependendo de K, R^2, R^4, R^6.

Usando (2.103) em (2.122) obtemos que

$$||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{\overline{C}T^*}C_{10}T^*\left(\max_{t\in[0,T^*]}(||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}) + ||\psi||^2_{L^\infty(Q)} + ||v||^2_{L^\infty(Q)}\right). \tag{2.123}$$

Vamos agora multiplicar a equação (2.93) por $-\Delta u$ e integrar em Ω:

$$-\int_\Omega u_t\Delta u + \int_\Omega J|\Delta u|^2 - \int_\Omega b\Delta uu = -\int_\Omega(\beta v - a(\varphi_t\psi_1 + (\varphi_2)_t\psi)v_2u_2)\Delta u.$$

Lembrando que $J \geq \alpha > 0$ e usando a desigualdade de Hölder, temos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha||\Delta u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||b(t)||_{L^\infty(\Omega)}||\Delta u(t)||_{L^2(\Omega)}||u(t)||_{L^2(\Omega)}+$$
$$+\Big(||\beta(t)||_{L^2(\Omega)}||v(t)||_{L^\infty(\Omega)} + \Big(||\varphi_t(t)||_{L^2(\Omega)}||\psi_1(t)||_{L^\infty(\Omega)}+$$
$$+||(\varphi_2)_t(t)||_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||_{L^2(\Omega)}\Big)||u_2(t)||_{L^\infty(\Omega)}||v_2(t)||_{L^\infty(\Omega)}\Big)||\Delta u(t)||_{L^2(\Omega)}.$$

Usando a desigualdade de Young,

$$\frac{d}{dt}||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha||\Delta u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$\frac{1}{\alpha}(||b(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||u(t)||^2_{L^2(\Omega)}) + \Big(||\beta(t)||^2_{L^2(\Omega)}||v(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}\Big) + (||\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}||\psi_1(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} +$$

$$||(\varphi_2)_t(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)})||u_2(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||v_2(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}.$$

Integrando em $(0,t)$, para $t \in [0,T^*]$, e usando (2.119), (2.121), obtemos

$$||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_{11}T^* \max_{t\in[0,T^*]}(||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||v(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}) +$$

$$C_{11}(\max_{t\in[0,T^*]}||u(t)||^2_{L^2(\Omega)}\overline{T} + ||\varphi_t||^2_{L^\infty(Q)}), \tag{2.124}$$

com C_8 dependendo de K, a, R^2, R^4, R^6. Usando (2.103), (2.123) em (2.124), temos

$$\begin{aligned} ||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\Delta u||^2_{L^2(Q)} &\leq C_{11}T^*(||\psi||^2_{L^\infty(Q)} + ||v||^2_{L^\infty(Q)} + \\ &+ \max_{t\in[0,T^*]}(||\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)})). \end{aligned} \tag{2.125}$$

Vamos multiplicar a equação (2.93) por $\Delta^2 u$ e integrar em Ω:

$$\int_\Omega u_t\Delta^2 u - \int_\Omega J\Delta u\Delta^2 u + \int_\Omega bu\Delta^2 u = \int_\Omega \Big(\beta v - a\left(\varphi_t\psi_1 + (\varphi_2)_t\psi\right)v_2u_2\Big)\Delta^2 u.$$

Usando a fórmula de Green, tem-se que:

$$\begin{aligned} -\int_\Omega J\Delta u\Delta^2 u &= \int_\Omega \nabla J\Delta u(\nabla(\Delta u)) + \int_\Omega J|\nabla(\Delta u)|^2, \\ \int_\Omega bu\Delta^2 u &= \int_\Omega (\nabla b)u(\nabla(\Delta u)) + \int_\Omega b\nabla u\nabla(\Delta u). \end{aligned}$$

Fazendo $F(t) = \Big(\beta v - a\Big(\varphi_t\psi_1 + (\varphi_2)_t\psi\Big)v_2u_2\Big)$ e usando as desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$\frac{d}{dt}||\Delta u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha||\nabla(\Delta u(t))||^2_{L^2(\Omega)} \leq \Big(||\nabla J(t)||^2_{L^6(\Omega)}||\Delta u(t)||^2_{L^3(\Omega)} +$$

$$||\nabla b(t)||^2_{L^2(\Omega)}||u(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||b(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$||\nabla F(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big) + ||\nabla(\Delta u(t))||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Usando a interpolação,

$$||\Delta u||^2_{L^3(\Omega)} \leq C(||\Delta u||_{L^2(\Omega)}||\nabla(\Delta u)||_{L^2(\Omega)} + ||\Delta u||^2_{L^2(\Omega)}),$$

obtemos,

$$\frac{d}{dt}||\Delta u(t)||^2_{L^2(\Omega)}+\alpha||\nabla(\Delta u(t))||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||\nabla J(t)||^2_{L^6(\Omega)}\Big(||\Delta u(t)||_{L^2(\Omega)}||\nabla(\Delta u(t))||_{L^2(\Omega)}+$$
$$+||\Delta u(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big) + ||\nabla b(t)||^2_{L^2(\Omega)}||u(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}+$$
$$+||b(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla F(t)||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}||\Delta u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha||\nabla(\Delta u(t))||^2_{L^2(\Omega)} \leq$$
$$||\nabla J(t)||^2_{L^6(\Omega)}||\Delta u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla J(t)||^4_{L^6(\Omega)}||\Delta u(t)||^2_{L^2(\Omega)}+$$
$$||\nabla b(t)||^2_{L^2(\Omega)}||u(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||b(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla F(t)||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.126}$$

Portanto, usando (2.118), (2.119), (2.120) e a desigualdade de Gronwall em (2.126), obtemos

$$||\Delta u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha||\nabla(\Delta u)||^2_{L^2(Q)} \leq$$
$$e^{\overline{C}T^*}C_{11}\left(\int_0^{\overline{T}} ||u(t)||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla F(t)||^2_{L^2(\Omega)}\ dt\right), \tag{2.127}$$

com C_{11} dependendo de K, a, R^2, R^4, R^6.

Agora, vamos estimar a norma $||\nabla F(t)||^2_{L^2(\Omega)}$. Observe que:

$$||\nabla F(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||\nabla\beta||^2_{L^2(\Omega)}||v||^2_{L^2(\Omega)} + ||\beta||^2_{L^2(\Omega)}||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)}+$$
$$\begin{aligned}
+ \quad & ||u_2||^2_{L^\infty(\Omega)}||v_2||^2_{L^\infty(\Omega)}\Big(||\nabla\varphi_t||^2_{L^2(\Omega)}||\psi_1||^2_{L^\infty(\Omega)}+\\
+ \quad & ||\varphi_t||^2_{L^2(\Omega)}||\nabla\psi_1||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla(\varphi_2)_t||^2_{L^2(\Omega)}||\psi||^2_{L^2(\Omega)} + ||(\varphi_2)_t||^2_{L^2(\Omega)}||\nabla\psi||^2_{L^2(\Omega)}\Big)+\\
+ \quad & ||\varphi_t||^2_{L^2(\Omega)}||\psi_1||^2_{L^\infty(\Omega)}||\nabla u_2||^2_{L^2(\Omega)}||v_2||^2_{L^\infty(\Omega)}+\\
+ \quad & ||\varphi_t||^2_{L^2(\Omega)}||\psi_1||^2_{L^\infty(\Omega)}||u_2||^2_{L^\infty(\Omega)}||\nabla v_2||^2_{L^2(\Omega)}\\
+ \quad & ||(\varphi_2)_t||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi||^2_{L^2(\Omega)}||\nabla u_2||^2_{L^2(\Omega)}||v_2||^2_{L^\infty(\Omega)}\\
+ \quad & ||(\varphi_2)_t||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi||^2_{L^2(\Omega)}||u_2||^2_{L^\infty(\Omega)}||\nabla v_2||^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
||\nabla\beta(t)||^2_{L^2(\Omega)} \quad \leq \quad & ||K(\nabla v_1 + \nabla v_2)\Delta u_2 + K(v_1+v_2)\Delta u_2 +\\
+ \quad & a\nabla(\varphi_1)_t\psi_1 u_2 + a(\varphi)_t(\nabla\psi_1 u_2 + \psi_1\nabla u_2)||^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

e, logo,

$$||\nabla\beta(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq (4K^2R^4 + 3a^2R^6). \tag{2.128}$$

Usando (2.121), (2.128), podemos concluir que

$$\begin{aligned}\int_0^{T^*} ||\nabla F(t)||^2_{L^2(\Omega)} &\leq \widehat{C}\int_0^{T^*}\Big(||v(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla v(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \\ &+ ||\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big), \qquad (2.129)\end{aligned}$$

com $\widehat{C}$ dependendo de K, a, R^2, R^4, R^6.

Logo, substituindo a expressão (2.129) em (2.127) e usando as estimativas (2.109), (2.115), e (2.125), resulta que

$$\begin{aligned}||\Delta u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla(\Delta u)||^2_{L^2(Q)} &\leq e^{\overline{C}T^*}C_{12}T^*\Big(||u||^2_{L^\infty(Q)} + ||\psi||^2_{L^\infty(Q)} + ||v||^2_{L^\infty(Q)} + \\ &+ \max_{t\in[0,T^*]}(||v(t)||^2_{H^2(\Omega)} + ||\psi(t)||^2_{H^2(\Omega)} + ||\psi_t(t)||^2_{H^1(\Omega)} + \\ &+ ||v_t(t)||^2_{H^1(\Omega)})\Big) \qquad (2.130)\end{aligned}$$

com C_{12} dependendo de K, a, R^2, R^4, R^6.

Portanto, $u \in C([0,T^*]; H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T^*; H^3(\Omega))$.

Vamos agora derivar a equação (2.93) em relação a t,

$$u_{tt} - J\Delta u_t - J_t\Delta u + bu_t + b_t u = \Big(\beta v - a\Big(\varphi_t\psi_1 + (\varphi_2)_t\psi\Big)u_2v_2\Big)_t.$$

Desenvolvendo o segundo membro, temos

$$\begin{aligned}(\beta v - a(\varphi_t\psi_1 + (\varphi_2)_t\psi)u_2v_2)_t &= \beta_t v + \beta v_t - a(\varphi_t\psi_1 + (\varphi_2)_t\psi)_t\, u_2v_2 - a(\varphi_t\psi_1 + (\varphi_2)_t\psi)(u_2v_2)_t \\ &= \beta_t v + \beta v_t - a(\varphi_{tt}\psi_1 + \varphi_t(\psi_1)_t + (\varphi_2)_{tt}\psi + (\varphi_2)_t\,\psi_t)u_2v_2 - \\ &- a(\varphi_t\psi_1(u_2)_tv_2 + \varphi_t\psi_1u_2(v_2)_t + (\varphi_2)_t\,\psi(u_2)_t\,v_2 + (\varphi_2)_t\,\psi u_2(v_2)_t) \\ &= G(t).\end{aligned}$$

Uma vez que $u(0) = 0 \Rightarrow \Delta u(0) = 0$ e $\beta(0) = K(v_1(0)+v_2(0))\Delta u_2(0) - a(\varphi_1)_t(0)u_2(0)$ então $u_t(0)$ está bem definido, tal que

$$u_t(0) = \beta(0)v(0) - a(\varphi_t(0)\psi_1(0) + (\varphi_2)_t(0)\psi(0))u_2(0)v_2(0) = \overline{w_0}$$

Portanto, fazendo $u_t = w$, temos o sistema

$$\begin{aligned} w_t - J\Delta w - J_t\Delta u + bw + b_t u &= G(t) \quad \text{em } Q, \\ \frac{\partial w}{\partial\eta} &= 0 \quad \text{em } S, \qquad (2.131) \\ w(x,0) &= \overline{w_0} \quad \text{em } \Omega.\end{aligned}$$

Agora multiplicando a equação (2.131) por w e integrar em Ω:

$$\int_\Omega w_t w - \int_\Omega J(\Delta w)w - \int_\Omega J_t(\Delta u)w + \int_\Omega bw^2 + \int_\Omega b_t uw = \int_\Omega G(t)w.$$

Usando fórmula de Green, observe que

$$-\int_\Omega Jw\Delta w = \int_\Omega (\nabla J)w\nabla w + \int_\Omega J|\nabla w|^2.$$

Desta forma, temos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega J(t)|\nabla w(t)|^2 \leq$$

$$\int_\Omega J_t(t)(\Delta u(t))w(t) - \int_\Omega (\nabla J(t))w(t)\nabla w(t) - \int_\Omega b(t)w^2(t) -$$

$$-\int_\Omega b_t(t)u(t)w(t) + \int_\Omega G(t)w(t),$$

e usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||J_t||_{L^6(\Omega)}||\Delta u(t)||_{L^2(\Omega)}||w(t)||_{L^3(\Omega)} +$$

$$+||\nabla J(t)||_{L^6(\Omega)}||w(t)||_{L^3(\Omega)}||\nabla w(t)||_{L^2(\Omega)} + ||b(t)||_{L^\infty(\Omega)}||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+||b_t||_{L^2(\Omega)}||u(t)||_{L^\infty(\Omega)}||w(t)||_{L^2(\Omega)} + ||G(t)||_{L^2(\Omega)}||w(t)||_{L^2(\Omega)}.$$

Aplicando a desigualdade de Young e usando a interpolação (**??**), resulta que

$$\frac{d}{dt}||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_0(t)||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \Big(||G(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\Delta u(t)||^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+||b_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}||u(t)|^2_{L^2(\Omega)} + +||w(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}\Big), \tag{2.132}$$

em que $C_0(t) = (2 + ||b||_{L^\infty(\Omega)} + ||J_t||^2_{L^6(\Omega)} + ||\nabla J||^2_{L^6(\Omega)} + ||J_t||^4_{L^6(\Omega)} + ||\nabla J||^4_{L^6(\Omega)})$.
Notemos que

$$||J_t(t)||^2_{L^6(\Omega)} \leq 4||K(v_1)_t||^2_{L^6(\Omega)} \leq 4K^2R^2, \tag{2.133}$$

e também,

$$||\beta_t||^2_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$||K((v_1)_t\Delta u_2 + (v_2)_t\Delta u_2 + v_1\Delta(u_2)_t + v_2(\Delta u_2)_t) - a((\varphi_1)_t t - (\varphi_1)_t(u_2)_t)||^2_{L^2(\Omega)},$$

e logo,

$$||\beta_t||^2_{L^2(\Omega)} \leq 4K^2R^4 + 2a^2R^4. \tag{2.134}$$

Assim, usando (2.118), (2.119), (2.133) e a desigualdade de Gronwall em (2.132), temos

$$||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{\overline{C_0}T^*}\left(||\overline{w_0}||^2_{L^2(\Omega)} + ||\Delta u||_{L^2(Q)} + \int_0^{T^*} ||G(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt\right), \tag{2.135}$$

com $\overline{C_0}$ dependendo de K, a, R^2, R^4.

Analisando o termo $||G||^2_{L^2(\Omega)}$, temos

$$\begin{aligned}
||G(t)||^2_{L^2(\Omega)} &\leq ||\beta_t||^2_{L^2(\Omega)}||v||^2_{L^2(\Omega)} + ||\beta||^2_{L^2(\Omega)}||v_t||^2_{L^2(\Omega)} + a^2\Big(||\varphi_{tt}||^2_{L^2(\Omega)}||\psi_1||^2_{L^\infty(\Omega)}+\\
&+ ||\varphi_t||^2_{L^2(\Omega)}||(\psi_1)_t||^2_{L^\infty(\Omega)} + ||(\varphi_2)_{tt}||^2_{L^2(\Omega)}||\psi||^2_{L^2(\Omega)}+\\
&+ ||(\varphi_2)_t||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi_t||^2_{L^2(\Omega)}\Big)||u_2||^2_{L^\infty(\Omega)}||v_2||^2_{L^\infty(\Omega)}-\\
&- a^2\Big(||\varphi_t||^2_{L^2(\Omega)}||\psi_1||^2_{L^\infty(\Omega)}||(u_2)_t||^2_{L^2(\Omega)}||v_2||^2_{L^\infty(\Omega)}+\\
&+ ||\varphi_t||^2_{L^2(\Omega)}||\psi_1||^2_{L^\infty(\Omega)}||u_2||^2_{L^\infty(\Omega)}||(v_2)_t||^2_{L^2(\Omega)}+\\
&+ ||(\varphi_2)_t||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi||^2_{L^2(\Omega)}||(u_2)_t||^2_{L^2(\Omega)}||v_2||^2_{L^\infty(\Omega)}+\\
&+||(\varphi_2)_t||^2_{L^\infty(\Omega)}||\psi||^2_{L^2(\Omega)}||u_2||^2_{L^\infty(\Omega)}||(v_2)_t||^2_{L^2(\Omega)}\Big).
\end{aligned} \tag{2.136}$$

Usando (2.121), (2.134) e integrando (2.136) em $(0,t)$ com $t \in [0,T^*]$, temos que

$$\int_0^{T^*} ||G(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$C_{13}\int_0^{T^*}\Big(||v||^2_{L^2(\Omega)} + ||v_t||^2_{L^2(\Omega)} + ||\varphi_{tt}||^2_{L^2(\Omega)} + ||\varphi_t||^2_{L^2(\Omega)} + ||\psi||^2_{L^2(\Omega)} + ||\psi_t||^2_{L^2(\Omega)}\Big)\,dt, \tag{2.137}$$

com C_{13} dependendo de K, a, R^2, R^4, R^6.

Logo, usando a estimativa obtida em (2.125), (2.116), (2.109) e a expressão (2.137), e aplicando em (2.135), obtemos

$$\begin{aligned}
||u_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} &\leq C_{13}T^*\Big(||\psi||^2_{L^\infty(Q)} + ||v||^2_{L^\infty(Q)} +\\
&+ \max_{t\in[0,T^*]}\Big(||v(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big)\Big).
\end{aligned} \tag{2.138}$$

com C_{13} dependendo de $||\overline{w_0}||^2_{L^2(\Omega)}, K, a, R^2, R^4, R^6$.

Vamos multiplicar a equação (2.131) por $-\Delta w$ e integrar em Ω:

$$-\int_\Omega w_t\Delta w - \int_\Omega J|\Delta w|^2 + \int_\Omega J_t\Delta u\Delta w - \int_\Omega bw\Delta w - \int_\Omega b_t u\Delta w = -\int_\Omega G\Delta w.$$

Usando que $J \geq \alpha > 0$ e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha||\Delta w(t)||^2_{L^2(\Omega)} &\leq ||J_t||_{L^6(\Omega)}||\Delta u(t)||_{L^3(\Omega)}||\Delta w(t)||_{L^2(\Omega)} + \\ &+ ||b(t)||_{L^\infty(\Omega)}||w(t)||_{L^2(\Omega)}||\Delta w(t)||_{L^2(\Omega)} + \\ &+ ||b_t||_{L^2(\Omega)}||u(t)||_{L^\infty(\Omega)}||\Delta w(t)||_{L^2(\Omega)} + \\ &+ ||G(t)||_{L^2(\Omega)}||\Delta w(t)||_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Young, tem-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2}||\Delta w(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$\frac{1}{2}\Big(||J_t||^2_{L^6(\Omega)}||\Delta u(t)||^2_{L^3(\Omega)} + ||b(t)||^2_{L^\infty(\Omega)}||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$||b_t||^2_{L^\infty(\Omega)}||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||G(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big). \tag{2.139}$$

Usando (2.133), (2.134), (2.119) e integrando (2.139) em $(0,t)$ com $t \in [0,T]$, temos

$$||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha||\Delta w||^2_{L^2(Q)} \leq$$

$$C_{14}\Big(\int_0^{T^*}(||u||^2_{L^2(\Omega)} + ||\Delta u||^2_{L^3(\Omega)} + ||w||^2_{L^2(\Omega)} + ||G||^2_{L^2(\Omega)})dt\Big),$$

em que C_{14} depende de K, a, R^2, R^4, R^6.

Usando o resultado de interpolação, observemos que

$$\begin{aligned}\int_0^{T^*}||\Delta u||^2_{L^3(\Omega)} &\leq C\int_0^{T^*}\Big(||\Delta u||_{L^2(\Omega)}||\nabla(\Delta u)||_{L^2(\Omega)} + ||\Delta u||^2_{L^2(\Omega)}\Big) \\ &\leq C\int_0^{T^*}\Big(||\Delta u||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla(\Delta u)||^2_{L^2(\Omega)}\Big),\end{aligned}$$

e assim, usando os resultados já obtido em (2.137), (2.130) e (2.125), resulta que

$$||\nabla u_t(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \alpha||\Delta u_t||^2_{L^2(Q)} \leq$$

$$C_{14}T^*\Big(||\psi||^2_{L^\infty(Q)} + ||v||^2_{L^\infty(Q)} +$$

$$\max_{t\in[0,T^*]}(||v(t)||^2_{H^2(\Omega)}+||\psi(t)||^2_{H^2(\Omega)}+||\psi_t(t)||^2_{H^1(\Omega)}+||v_t(t)||^2_{H^1(\Omega)})\Big). \tag{2.140}$$

Com as estimativas obtidas, estamos em condições de provar que o operador Φ é uma contração em X.

Vamos considerar a seguinte norma em X:

$$||(\varphi,u)||^2_X=||\varphi||^2_{X_\varphi}+||u||^2_{X_u}$$

com

$$||\varphi||^2_{X_\varphi}=\max_{t\in[0,T]}\Big(||\varphi||^2_{L^2(\Omega)}+||\nabla\varphi||^2_{L^2(\Omega)}+||\Delta\varphi||^2_{L^2(\Omega)}\Big)+\max_{t\in[0,T]}\Big(||\varphi_t||^2_{L^2(\Omega)}+||\nabla\varphi_t||^2_{L^2(\Omega)}\Big),$$

$$||u||^2_{X_u}=\max_{t\in[0,T]}\Big(||u||^2_{L^2(\Omega)}+||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)}+||\Delta u||^2_{L^2(\Omega)}\Big)+\max_{t\in[0,T]}\Big(||u_t||^2_{L^2(\Omega)}+||\nabla u_t||^2_{L^2(\Omega)}\Big).$$

Das estimativas em (2.99), (2.102), (2.104), (2.109) e (2.115) tem-se

$$\max_{t\in[0,T^*]}||\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\le C_1e^{T^*}T^*\left(\max_{t\in[0,T^*]}||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)}+\max_{t\in[0,T^*]}||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right),$$

$$\max_{t\in[0,T^*]}||\nabla\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\le C_3T^*\left(\max_{t\in[0,T^*]}||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)}+\max_{t\in[0,T^*]}||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right),$$

$$\max_{t\in[0,T^*]}||\Delta\varphi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\le C_5e^{T^*}T^*\Big(||\psi||^2_{L^\infty(Q)}+||v||^2_{L^\infty(Q)}+$$
$$\max_{t\in[0,T^*]}(||\nabla\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)}+||\nabla v(t)||^2_{L^2(\Omega)})\Big),$$

$$\max_{t\in[0,T^*]}||\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}\le C_6e^{T^*}T^*\Big(||\psi||^2_{L^\infty(Q)}+||v||^2_{L^\infty(Q)}+$$
$$\max_{t\in[0,T^*]}(||\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}+||v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)})\Big),$$

$$\max_{t\in[0,T^*]}||\nabla\varphi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}\le C_8e^{T^*}T^*\Big(||\psi||^2_{L^\infty(Q)}+||v||^2_{L^\infty(Q)}+$$
$$\max_{t\in[0,T^*]}(||\nabla\psi(t)||_{L^2(\Omega)}+||\nabla v(t)||^2_{L^2(\Omega)}+$$
$$||\Delta v(t)||^2_{L^2(\Omega)}+||\nabla v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}+||\Delta\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)}+||\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}+$$
$$||\nabla\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}+||v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)})\Big).$$

Fazendo $\widehat{C}=C_1+C_3+C_5+C_6+C_8$ e tomando $T_1^*=\ln 2$, obtemos que

$$\begin{aligned}||\varphi||^2_{X_\varphi} &\le \widehat{C}T^*\Big(\max_{t\in[0,T^*]}\Big(||\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)}+||\nabla\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)}+||\Delta\psi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big)+\\ &+\max_{t\in[0,T^*]}\Big(||\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}+||\nabla\psi_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big)+\\ &+\max_{t\in[0,T^*]}\Big(||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}+||\nabla v(t)||^2_{L^2(\Omega)}+||\Delta v(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big)+\\ &+\max_{t\in[0,T^*]}\Big(||v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}+||\nabla v_t(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big)\Big).\end{aligned}$$

Isto é,

$$||\varphi||^2_{X_\varphi} \leq \widehat{C}_1 T^* ||(\psi, v)||^2_X. \tag{2.141}$$

Analogamente, considerando as estimativas (2.123), (2.125), (2.130), (2.138) e (2.140), obtemos

$$||u||^2_{X_u} \leq \widehat{C}_2 T^* ||(\psi, v)||^2_X. \tag{2.142}$$

Combinando (2.141) e (2.142), resulta que

$$||(\varphi, u)||^2_X = ||\varphi||^2_{X_\varphi} + ||u||^2_{X_u} \leq \widehat{C_0} T^* ||(\psi, v)||^2_X.$$

Escolhendo $T_2^* = \dfrac{1}{4\widehat{C}_0}$ e $T^{**} = \min\{T_0, T_1^*, T_2^*, T^*\}$ com T_0 dado no Lema 2.1 e lembrando que $R > 0$ foi escolhido tal que $0 < T^* < T$ temos, para todo $0 < t < T^{**}$,

$$||\Phi(\psi, v)||^2_X = ||(\varphi, v)||^2_X \leq \frac{1}{2} ||(\psi, v)||^2_X,$$

e concluímos que o operador Φ é uma contração sobre X.

Portanto, pelo Teorema da contração, existe um único ponto fixo (φ, u) de Φ em X, ou seja, $(\varphi, u) = \Phi(\varphi, u)$ é a única solução local do problema Penrose-Fife (2.77) em $[0, T^{**}]$.

E a prova do teorema 2.5 está completa. ■

CAPÍTULO 3

Análise matemática de alguns modelos com convecção

Neste capítulo apresentaremos a análise matemática de alguns modelos com convecção. Especialmente, trataremos um modelo quase newtoniano e um modelo de campo de fase do tipo Carman-Kozeny. Para melhor compreensão dos resultados provaremos os principais os resultados da teoria clássica das equações de Navier-Stokes.

Essencialmente, as demonstrações apresentadas neste capítulo podem ser encontradas em [11, 36, 43, 62].

3.1 Espaços funcionais

Os seguinte espaços funcionais são usados no tratamento matemático das equações de Navier-Stokes[1].

Sejam $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}\,;\, \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n),\, v_i \in \mathcal{D}(\Omega),\, \operatorname{div}\mathbf{v} = 0\}$, H o fecho de $\mathcal{V}$ em $(L^2(\Omega))^n$ e V o fecho de $\mathcal{V}$ em $(H_0^1(\Omega))^n$.

Os espaços H e V são caracterizados seguinte modo:

Teorema 3.1 *Seja Ω um conjunto aberto, limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ Lipschitz.*

[1] para mais detalhes, consulte, por exemplo, [48, 43, 62].

Então,

$$H = \{\boldsymbol{v} \in (L^2(\Omega))^n \,;\, \gamma_\eta \boldsymbol{v} = 0\},$$

$$V = \{\boldsymbol{v} \in (H_0^1(\Omega))^n \,;\, \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0\}$$

com $\vec{\eta}$ a normal exterior à $\partial\Omega$ e $\gamma_\eta \boldsymbol{v}$ a restrição de $\boldsymbol{v}.\eta$ à $\partial\Omega$ (no sentido do traço).

Seja $H^s(\Omega)$, $s \geq 0$ inteiro ou não define-se V_s o fecho de $\mathcal{V}$ em $(H^s(\Omega))^n$ com $s = n/2$. Em particular, $V_1 = V$[2].

Definimos

$$L_0^2(\Omega) = L^2(\Omega)/\mathbb{R} = \left\{ p \in L^2(\Omega) \,;\, \int_\Omega p(x)\, dx = 0 \right\}.$$

3.2 As equações de Navier-Stokes

Equações de Stokes estacionárias

Dada $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, queremos encontrar $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ e $p : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{em } \Omega, \tag{3.1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \Omega, \tag{3.2}$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \tag{3.3}$$

Formulação variacional

Considere a forma linear $a : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\nu \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega D_{ij}(\mathbf{u})\, D_{ij}(\mathbf{v})\, dx.$$

Como o operador $\mathbf{D}$ é simétrico com relação a i e j temos

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\nu \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega D_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, dx.$$

[2] se n=2 tem-se $V_1 = V$. Para mais detalhes consulte [44, capítulo 1]

Integrando por partes, com $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, podemos escrever $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ da seguinte forma:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nu \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx = \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}). \tag{3.4}$$

Observe que $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) = \nu ||\mathbf{u}|_V^2$.

Estes resultados motivam a seguinte formulação variacional do problema (3.1)-(3.3):

Formulação Variacional 3.1 *Dada* $\boldsymbol{f} \in (H^{-1}(\Omega))^n$, *encontrar* $\boldsymbol{u} \in V$ *tal que*

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle \,, \quad \forall \boldsymbol{v} \in V. \tag{3.5}$$

Definição 3.1 *Para* $\boldsymbol{f} \in (H^{-1}(\Omega))^n$, *dizemos que* $\boldsymbol{u} \in V$ *é solução fraca do problema* (3.1)-(3.3) *se* $\boldsymbol{u}$ *satisfaz* (3.5).

Por outro lado, podemos associar a forma "a" o operador $A : V \to V'$ dado por

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Observe que,

$$|\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = |a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq C||\mathbf{u}||_V \, ||\mathbf{v}||_V \Rightarrow$$

$$\frac{|\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|}{||\mathbf{v}||_V} \leq C||\mathbf{u}||_V \Rightarrow ||A\mathbf{u}||_{V'} \leq C||\mathbf{u}||_V.$$

Logo, $A\mathbf{u} \in V'$ e $A \in \mathcal{L}(V, V')$.

Assim, temos a seguinte formulação equivalente do problema (3.1)-(3.3):

Formulação Equivalente 3.1 *Para* $\boldsymbol{f} \in (H^{-1}(\Omega))^n$, *encontrar* $\boldsymbol{u} \in V$ *tal que*

$$A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \quad em \quad V'. \tag{3.6}$$

Existência e unicidade

No seguinte resultado provamos existência e unicidade da solução fraca do problema (3.1)-(3.3).

Teorema 3.2 *Para* $\boldsymbol{f} \in (H^{-1}(\Omega))^n$, *o problema* (3.1)-(3.3) *tem uma única solução fraca.*

Demonstração: Primeiro provaremos a unicidade. Para isto, sejam $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ soluções fracas do problema (3.1)-(3.3) e $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$. Então,

$$a(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = 0 \Rightarrow a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Tomando $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ tem-se

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \nu \left\|\mathbf{u}\right\|_V^2 = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

E a prova da unicidade está completa.

Para provarmos a existência de solução fraca usaremos o *método de Galerkin*.[3]

Como V é um espaço de Hilbert separável podemos tomar $(\mathbf{v}_j)_{j=1}^{\infty}$ uma base de V. Seja V_m o subespaço gerado por $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ e o seguinte problema aproximado: encontrar $\mathbf{u}_m \in V_m$ tal que

$$\mathbf{u}_m = \sum_{i=1}^{m} \xi_{im} \mathbf{v}_i, \qquad \xi_{i,m} \in \mathbb{R}, \tag{3.7}$$

$$a(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_j) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_j \rangle, \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{3.8}$$

Primeiro mostraremos que, para m fixo, o problema aproximado (3.7)-(3.8) tem uma única solução. Para isto, observe que a equação (3.8) é equivalente ao seguinte sistema linear de m equações nas variáveis ξ_{im}:

$$K\xi = b \tag{3.9}$$

com $\xi = \xi_{im}$, $k_{ij} = a(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$, $b_j = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_j \rangle$ e $1 \leq i, j \leq m$.

Para mostrarmos existência e unicidade de solução do sistema (3.9) é suficiente provarmos que o sistema linear homogêneo associado tem somente a solução trivial. Portanto, seja $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ uma solução de

$$K\xi = 0. \tag{3.10}$$

Então, multiplicando cada equação de (3.10) pelo correspondente ξ_{jm} e somando as equações de $j = 1, 2, \ldots, m$ obtemos

$$\sum_{i,j=1}^{m} \xi_i \xi_j (\nabla \mathbf{v}_i, \nabla \mathbf{v}_j) = 0 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i \nabla \mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^{m} \xi_j \nabla \mathbf{v}_j \right) = 0. \tag{3.11}$$

[3]veja seção D.3 do Apêndice D

Fazendo $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \mathbf{v}_i$ em (3.11) temos $(\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{w}) = 0$, o que implica

$$||\mathbf{w}||_V = 0 \Rightarrow \mathbf{w} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \xi_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}.$$

Mas, os vetores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ são linearmente independentes, e portanto, $\xi_1 = \cdots = \xi_m = 0$.

Agora, obteremos uma estimativa *a priori* da solução do problema (3.7)-(3.8). Para isto, multiplique (3.8) por ξ_{jm} e some para $j = 1, \ldots, m$ para obter

$$a(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_m \rangle \Rightarrow \nu ||\mathbf{u}_m||_V^2 = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_m \rangle \leq ||\mathbf{f}||_{V'} ||\mathbf{u}_m||_V.$$

Logo,

$$||\mathbf{u}_m||_V \leq \frac{||\mathbf{f}||_{V'}}{\nu}.$$

Portanto, $(\mathbf{u}_m)$ é uniformemente limitada com relação a m. Como V é um espaço de Hilbert reflexivo isto implica que existem $\mathbf{u} \in V$ e uma subsequência $(\mathbf{u}_k)$ de $(\mathbf{u}_m)$ tais que

$$\mathbf{u}_k \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{em} \quad V.$$

Como $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_j)$ é uma forma linear contínua em V podemos concluir que

$$\lim_{k \to \infty} a(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_j) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_j).$$

Tomando $m = k$ em (3.8) e passando ao limite obtemos

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_j) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_j \rangle, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Além disso, por linearidade tem-se

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m. \tag{3.12}$$

Mas $\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$ é denso em V então existe uma sequência $(\mathbf{v}_n)$ em $\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$ tal que $\mathbf{v}_n \to \mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in V$. Pela continuidade de $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ e $\mathbf{f}$ concluímos que (3.12) vale para $\mathbf{v} \in V$.

E a prova do Teorema 3.2 está completa. ■

Agora vamos recuperar a pressão $p(x)$. De (3.6), deduzimos que $A\mathbf{u} - \mathbf{f} \in V'$ tal que

$$\langle A\mathbf{u} - \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Logo, pelo Teorema C.1, existe uma única $p \in L^2_0(\Omega)$ tal que

$$\langle A\mathbf{u} - \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle = (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) = -\langle \nabla p, \mathbf{v}\rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Portanto,

$$A\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{em} \quad V'.$$

Regularidade

O seguinte resultado de regularidade para a solução fraca do problema de Stokes pode ser encontrado em [36, 62]

Proposição 3.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe $\mathcal{C}^r$ com $r = \max(m+2, 2)$, $m \in \mathbb{Z}$ e $m > 0$. Se $\boldsymbol{f} \in (W^{m,q}(\Omega))^n$ e $(\boldsymbol{u}, p)$ é a solução do problema de Stokes* (3.1)-(3.3) *então*

$$\boldsymbol{u} \in W_1 = (W^{m+2,q}(\Omega))^n, \quad p \in W_2 = W^{m+1,q}(\Omega)$$

e existe uma constante C que depende de q, ν, m e Ω tal que

$$\|\boldsymbol{u}\|_{W_1} + \|p\|_{W_2/\mathbb{R}} \leq C(\|\boldsymbol{f}\|_{W_1} + \alpha \|\boldsymbol{u}\|_{(L^q(\Omega))^n})$$

com $\alpha = 0$ se $q \geq 2$ e $\alpha = 1$ se $1 < q < 2$.

Equações de Navier-Stokes estacionárias

Dada $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, queremos encontrar $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ e $p : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{3.13}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{3.14}$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \tag{3.15}$$

Formulação variacional

Considere a forma linear $a(\mathbf{u},\mathbf{v})$ definida em (3.40) e a forma trilinear $b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ definida por

$$b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \sum_{i,k=1}^{n} \int_\Omega u_k(x) D_k v_i(x) w_i(x)\, dx$$

com $D_k v_i = \dfrac{\partial v_i}{\partial x_k}$.

Lema 3.1 *Para $n \leq 4$ a forma trilinear $b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ é contínua em $V \times V \times V$.*

Demonstração: Pelas imersões de Sobolev[4] temos que $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$, para $n \leq 4$. Então, pela desigualdade de Hölder tem-se $u_k D_k v_i w_i \in L^1(\Omega)$ e

$$\begin{aligned}
|b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})| &\leq \sum_{i,k=1}^{n} \int_\Omega |u_k D_k v_i\, w_i|\, dx \\
&\leq \sum_{i,k=1}^{n} \left(\int_\Omega |u_k|^4\right)^{1/4} \left(\int_\Omega |D_k v_i|^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |w_i|^4\right)^{1/4} \\
&\leq C\, \|\mathbf{u}\|_{(L^4(\Omega))^n}\, \|\nabla \mathbf{v}\|_{(L^2(\Omega))^n}\, \|\mathbf{w}\|_{(L^4(\Omega))^n} \\
&\leq C\, \|\mathbf{u}\|_V\, \|\mathbf{v}\|_V\, \|\mathbf{w}\|_V\,.
\end{aligned}$$

E a prova do Lema 3.1 está completa. ■

Lema 3.2 *Se $\boldsymbol{u} \in (H^1(\Omega))^n$ com $div\, \boldsymbol{u} = 0$ e $\gamma_\eta \boldsymbol{u} = 0$ e $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in (H^1(\Omega))^n$ então*

$$b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = 0, \tag{3.16}$$

$$b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = -b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}). \tag{3.17}$$

Demonstração: Vamos provar (3.17). Para isto, sejam $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ e $\mathbf{v},\mathbf{w} \in (\mathcal{D}(\Omega))^n$. Então,

$$\int_\Omega u_k(w_i\, D_k v_i + v_i D_k w_i)\, dx = \int_\Omega u_k\, D_k(v_i\, w_i)\, dx = -\int_\Omega D_k u_k\, v_i\, w_i\, dx.$$

Logo,

$$b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) + b(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v}) = 0.$$

[4]veja Teorema B.4

E por densidade obtemos (3.17).

Agora provaremos (3.16). Por (3.17) tem-se

$$b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v}) + b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v}) = 0 \Rightarrow b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v}) = 0.$$

E a prova do Lema 3.2 está completa. ■

Assim, o problema (3.13)-(3.15) tem a seguinte formulação variacional:

Formulação Variacional 3.2 *Dada* $\boldsymbol{f} \in (H^{-1}(\Omega))^n$*, queremos encontrar* $\boldsymbol{u} \in V$ *tal que*

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle, \quad \forall \boldsymbol{v} \in V. \tag{3.18}$$

Definição 3.2 *Para* $\boldsymbol{f} \in (H^{-1}(\Omega))^n$*, dizemos que* $\boldsymbol{u} \in V$ *é solução fraca do problema* (3.13)-(3.15) *se* $\boldsymbol{u}$ *satisfaz* (3.18).

Por outro lado, podemos associar a forma "b" o operador $B\mathbf{u}$ definido por

$$\langle B\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = b(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V. \tag{3.19}$$

Assim, para $n \leq 4$ e $\mathbf{u} \in V$ temos que $B\mathbf{u} \in V'$. De fato, aplicando o Lema 3.1 obtemos

$$|\langle B\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| = |b(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v})| \leq C||\mathbf{u}||_V^2\,||\mathbf{v}||_V \Rightarrow$$

$$\frac{|\langle B\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle|}{||\mathbf{v}||_V} \leq C||\mathbf{u}||_V^2 \Rightarrow ||B\mathbf{u}||_{V'} \leq C||\mathbf{u}||_V^2.$$

Logo, $B\mathbf{u} \in V'$.

Assim, temos a seguinte formulação equivalente do problema (3.13)-(3.15)

Formulação Equivalente 3.2 *Para* $\boldsymbol{f} \in (H^{-1}(\Omega))^n$*, queremos encontrar uma função* $\boldsymbol{u} \in V$ *tal que*

$$A\boldsymbol{u} + B\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \quad em \quad V'. \tag{3.20}$$

No seguinte teorema mostraremos que o problema de Navier-Stokes estacionário (3.13)-(3.15) tem uma solução fraca.

Teorema 3.3 *Se* $\boldsymbol{f} \in (H^{-1}(\Omega))^n$ *então existe uma solução fraca* $\boldsymbol{u}$ *do problema* (3.13)-(3.15).

Demonstração: Para provarmos a existência de solução fraca usaremos *método de Galerkin* e argumento de ponto fixo.[5]

Como V é um subespaço separável de $(H_0^1(\Omega))^n$ podemos considerar uma base $(\mathbf{v}_j)_{j=1}^{\infty}$ de V. Seja V_m o subespaço gerado por $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ e o seguinte problema aproximado: encontrar $\mathbf{u}_m \in V_m$ tal que

$$\mathbf{u}_m = \sum_{i=1}^{m} \xi_{im}\mathbf{v}_i, \qquad \xi_{im} \in \mathbb{R}, \tag{3.21}$$

$$a(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_j) + b(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_j) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_j \rangle, \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{3.22}$$

Primeiro provaremos que, para cada m fixo, o problema (3.21)-(3.22) tem solução. Por simplicidade de notação omitiremos, nesta prova, o índice m.

Considere, para cada $\mathbf{u} \in V_m$, a aplicação $F : V_m \to \mathbb{R}$ dada por

$$F_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle .$$

Logo, $F_{\mathbf{u}}$ é um funcional linear contínuo em $(V_m, ||\cdot||_V)$. Aplicando o Teorema da representação de Riesz temos que existe um único $\mathbf{z}_{\mathbf{u}} \in V_m$ tal que

$$F_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = ((\mathbf{z}_{\mathbf{u}}, \mathbf{v})), \quad \forall \mathbf{v} \in V_m$$

com $((\cdot,\cdot))$ o produto interno de V.

Deste modo, podemos considerar a aplicação $P_m : V_m \to V_m$ dada por $P_m(\mathbf{u}) = \mathbf{z}_{\mathbf{u}}$.

Afirmamos que P_m é contínua. De fato, seja $(\mathbf{u}_k)$ uma sequência tal que $\mathbf{u}_k \to \mathbf{u}$ em V_m. Então, $(\mathbf{u}_k)$ é limitada, ou seja, existe $C_1 > 0$ tal que $\|\mathbf{u}_k\|_V \leq C_1$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Usando a continuidade de $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ e $b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ obtemos

$$\begin{aligned}
|((P_m(\mathbf{u}_k) - P_m(\mathbf{u}), \mathbf{w}))| &= |F_{\mathbf{u}_k}(\mathbf{w}) - F_{\mathbf{u}}(\mathbf{w})|, \\
&\leq |a(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{w})|, \\
&\leq C(||\mathbf{u}_k - \mathbf{u}||_V + ||\mathbf{u}_k||_V^2 + ||\mathbf{u}||_V^2)\, \|\mathbf{w}\|_V, \\
&\leq C(||\mathbf{u}_k||_V + ||\mathbf{u}||_V + ||\mathbf{u}_k||_V^2 + ||\mathbf{u}||_V^2)\, \|\mathbf{w}\|_V, \\
&\leq C(||\mathbf{u}_k||_V + ||\mathbf{u}||_V)^2\, \|\mathbf{w}\|_V, \\
&\leq C(C_1 + ||\mathbf{u}||_V)^2\, \|\mathbf{w}\|_V .
\end{aligned}$$

[5] aplicaremos o Lema B.2

Tomando $\mathbf{w} = P_m(\mathbf{u}_k) - P_m(\mathbf{u})$ na desigualdade acima, tem-se

$$\|P_m(\mathbf{u}_k) - P_m(\mathbf{u})\|_V \leq C(C_1 + ||\mathbf{u}||_V)^2 \|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}\|_V .$$

Logo, a aplicação P_m é contínua.

Agora provaremos que $((P_m(\mathbf{u}), \mathbf{u})) > 0$. De fato, usando que $b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} ((P_m(\mathbf{u}), \mathbf{u})) &= \nu \|\mathbf{u}\|_V^2 + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle , \\ &= \nu \|\mathbf{u}\|_V^2 - \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle , \\ &\geq \nu \|\mathbf{u}\|_V^2 - \|\mathbf{f}\|_{V'} \|\mathbf{u}\|_V , \\ &\geq \|\mathbf{u}\|_V (\nu \|\mathbf{u}\|_V - \|\mathbf{f}\|_{V'}). \end{aligned}$$

Portanto, para $\|\mathbf{u}\|_V = C_2$ e $C_2 > \dfrac{\|\mathbf{f}\|_{V'}}{\nu}$ tem-se $((P_m(\mathbf{u}), \mathbf{u})) > 0$.

Deste modo, as hipóteses do Lema B.2 são satisfeitas e podemos concluir que existe $\mathbf{u} \in V_m$ tal que $P_m(\mathbf{u}) = \mathbf{z_u}$, ou seja, $\mathbf{u}$ é solução de (3.21)-(3.22).

No que segue, obteremos estimativas *a priori* da solução $\mathbf{u}_m$. Para isto, multiplique (3.22) por ξ_{jm}, some para $j = 1, \ldots, m$ e use que $b(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m) = 0$ para obter

$$\nu \|\mathbf{u}_m\|_V^2 = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_m \rangle \leq \|\mathbf{f}\|_{V'} \|\mathbf{u}_m\|_V .$$

Portanto,

$$\|\mathbf{u}_m\|_V \leq \frac{\|\mathbf{f}\|_{V'}}{\nu}. \tag{3.23}$$

Logo, a seqüência $(\mathbf{u}_m)$ é uniformemente limitada, com relação a m, em V. Como V é uma espaço de Banach reflexivo e a imersão de $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ é compacta temos que existem $\mathbf{u} \in V$ e uma subsequência $(\mathbf{u}_{m'})$ de $(\mathbf{u}_m)$ tais que

$$\mathbf{u}_{m'} \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{em} \quad V, \tag{3.24}$$

$$\mathbf{u}_{m'} \to \mathbf{u} \quad \text{em} \quad H. \tag{3.25}$$

Agora, para $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ tem-se

$$b(\mathbf{u}_{m'}, \mathbf{u}_{m'}, \mathbf{v}) = -b(\mathbf{u}_{m'}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_{m'}) = \sum_{i,k=1}^{n} \int_\Omega u_{m'k} D_k v_i u_{m'i} \, dx.$$

Mas, por (3.25), $u_{m'k}\, u_{m'i} \to u_k\, u_i$ em $L^1(\Omega)$ e como $D_k v_i \in L^\infty(\Omega)$ tem-se

$$\int_\Omega u_{m'k} D_k v_i u_{m'i}\, dx \to \int_\Omega u_k D_k v_i u_i\, dx.$$

Portanto,

$$b(\mathbf{u}_{m'}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_{m'}) \to b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) = -b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}). \tag{3.26}$$

Tomando $m = m'$ em (3.22), usando as convergências (3.24), (3.25) e (3.26) podemos passar o limite e obter

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_j) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_j) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_j \rangle\,, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{3.27}$$

Por linearidade (3.27) vale para toda $\mathbf{v} \in \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$ e por densidade vale para toda $\mathbf{v} \in V$.

E a prova do Teorema 3.3 está completa. ■

No seguinte teorema mostraremos que o problema de Navier-Stokes estacionário tem unicidade quando os dados satisfazem certas restrições.

Teorema 3.4 *Se ν é suficientemente grande tal que*

$$\nu^2 > C\, \|\boldsymbol{f}\|_{V'} \tag{3.28}$$

então a solução fraca do problema (3.13)-(3.15) *é única.*

Demonstração: Sejam $\mathbf{w}$ e $\mathbf{z}$ são duas soluções de (3.13)-(3.15) e $\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{z}$, então

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle\,, \qquad \forall \mathbf{v} \in V, \tag{3.29}$$

$$a(\mathbf{z}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{z}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle\,, \qquad \forall \mathbf{v} \in V. \tag{3.30}$$

Subtraindo (3.30) e (3.29) obtemos

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{z}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) = 0. \tag{3.31}$$

Mas,

$$b(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{z}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) = b(\mathbf{w} - \mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{z}, \mathbf{w} - \mathbf{z}, \mathbf{v}) = b(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}).$$

Portanto, (3.31) torna-se

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v}) + b(\mathbf{z},\mathbf{u},\mathbf{v}) + b(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v}) = 0.$$

Agora, tomando $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ e usando $b(\mathbf{z},\mathbf{u},\mathbf{u}) = 0$ tem-se

$$\nu \left\|\mathbf{u}\right\|_V^2 = -b(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{u}) = b(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{w}).$$

Pela continuidade de $b(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{w})$ tem-se

$$\nu \left\|\mathbf{u}\right\|_V^2 \leq C \left\|\mathbf{u}\right\|_V^2 \left\|\mathbf{w}\right\|_V . \tag{3.32}$$

Mas, por (3.23), a solução $\mathbf{w}$ satisfaz

$$||\mathbf{w}||_V \leq \frac{||\mathbf{f}||_{V'}}{\nu}$$

e (3.32) torna-se

$$\nu \left\|\mathbf{u}\right\|_V^2 \leq C\frac{\left\|\mathbf{f}\right\|_{V'}}{\nu} \left\|\mathbf{u}\right\|_V^2 .$$

Portanto,

$$\left(\nu - C\frac{\left\|\mathbf{f}\right\|_{V'}}{\nu}\right) \left\|\mathbf{u}\right\|_V^2 \leq 0 \Rightarrow \left(\nu^2 - C \left\|\mathbf{f}\right\|_{V'}\right) \left\|\mathbf{u}\right\|_V^2 \leq 0. \tag{3.33}$$

Mas, pela hipótese (3.28) temos que $\nu^2 - C \left\|\mathbf{f}\right\|_{V'} > 0$ e (3.33) implica $\left\|\mathbf{u}\right\|_V = 0$, ou seja, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

E a prova do Teorema 3.4 está completa. ■

Equações de Stokes de evolução

Dadas $\mathbf{f} : Q \to \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u}_0 : \Omega \to \mathbb{R}^n$, queremos encontrar $\mathbf{u} : Q \to \mathbb{R}^n$ e $p : Q \to \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \qquad \text{em } Q, \tag{3.34}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \qquad \text{em } Q, \tag{3.35}$$

$$\mathbf{u} = 0 \qquad \text{em } S, \tag{3.36}$$

$$\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0 \qquad \text{em } \Omega. \tag{3.37}$$

Formulação variacional

Para obtermos a formulação fraca do problema (3.34)-(3.37), sejam $(\mathbf{u}, p) \in \left(C^2(\overline{Q})\right)^n \times C^1(\overline{Q})$ a solução clássicas de (3.34)-(3.37). Fazendo o produto escalar de (3.34) com $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, integrando sobre Ω, integrando por partes e usando $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, obtemos

$$(\mathbf{u}'(t), \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

com "a" a forma bilinear contínua $a : V \times V \to \mathbb{R}$ dada por

$$a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = \nu(\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Por outro lado, sabemos que $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{u}'(t), \mathbf{v})$ e $a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = ||\mathbf{v}||_V^2$.

Estes resultados motivam a seguinte formulação fraca para o problema (3.34)-(3.37):

Formulação Variacional 3.3 *Para $\boldsymbol{f} \in L^2(0, T; V')$ e $\boldsymbol{u}_0 \in H$, queremos encontrar uma função $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$ tal que*

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) + a(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v} \rangle \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0, T), \quad \forall \boldsymbol{v} \in V, \tag{3.38}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0. \tag{3.39}$$

Definição 3.3 *Para $\boldsymbol{f} \in L^2(0, T; V')$ e $\boldsymbol{u}_0 \in H$, dizemos que $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$ é solução fraca do problema* (3.34)-(3.37) *se $\boldsymbol{u}$ satisfaz* (3.38)-(3.39).

No que segue obteremos uma formulação equivalente do problema (3.34)-(3.37). Para isto, considere $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V)$ fixa e a aplicação $t \longmapsto A\mathbf{u}(t)$ defindas q.s. em $[0, T]$ e dada por

$$\langle A\mathbf{u}(t), \mathbf{v} \rangle = a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V. \tag{3.40}$$

No seguinte resultado provaremos algumas propriedades do operador A:

Proposição 3.2 *Se $\boldsymbol{u} \in L^2(0, T; V)$ então $A\boldsymbol{u} \in L^2(0, T; V')$.*

Demonstração: Note que $t \longmapsto A\mathbf{u}(t)$ é mensurável q.s. em $[0, T]$. Além disso, como $a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v})$ é uma forma bilinear e contínua em V temos que

$$|\langle A\mathbf{u}(t), \mathbf{v} \rangle| = |a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v})| \leq C||\mathbf{u}(t)||_V ||\mathbf{v}||_V.$$

Logo,

$$\frac{|\langle A\mathbf{u}(t), \mathbf{v}\rangle|}{||\mathbf{v}||_V} \leq C||\mathbf{u}(t)||_V \Rightarrow ||A\mathbf{u}(t)||^2_{V'} \leq C||\mathbf{u}(t)||^2_V.$$

Portanto, $A\mathbf{u}(t) \in V'$ e

$$\int_0^T ||A\mathbf{u}(t)||^2_{V'}\, dt \leq \int_0^T ||\mathbf{u}(t)||^2_V\, dt \Rightarrow ||A\mathbf{u}||_{L^2(0,T;V')} \leq C||\mathbf{u}||_{L^2(0,T;V)},$$

ou seja, $A\mathbf{u} \in L^2(0,T;V')$ e $A \in \mathcal{L}(L^2(0,T;V), L^2(0,T;V'))$.

E prova da Proposição 3.2 está completa. ■

Teorema 3.5 *Se* $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ *é solução fraca do problema* (3.34)-(3.37) *então* $\boldsymbol{u}' \in L^2(0,T;V')$.

Demonstração: Pelo Lema A.1 a solução fraca $\mathbf{u}$ do problema (3.34)-(3.37) satisfaz

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{u}(t), \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{f}(t) - A\mathbf{u}(t), \mathbf{v}\rangle \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,T), \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Logo, $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t) - \nu A\mathbf{u}(t) \in V'$. Então, usando que $\mathbf{f} \in L^2(0,T;V')$ e aplicando a Proposição 3.2, o resultado segue. ■

Observe que, podemos aplicar o Lema **??** e obter $\mathbf{u} \in C([0,T];H)$, o que justifica a condição (3.39).

Deste modo, temos a seguinte formulação equivalente do problema (3.34)-(3.37):

Formulação Equivalente 3.3 *Para* $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;V')$ *e* $\boldsymbol{u}_0 \in H$, *queremos encontrar uma função* $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ *tal que*

$$\boldsymbol{u}' \in L^2(0,T;V'), \tag{3.41}$$

$$\boldsymbol{u}' + A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \quad \textit{em} \quad L^2(0,T;V'), \tag{3.42}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0. \tag{3.43}$$

Resta verificarmos a equivalência entre o problema (3.41)-(3.43) e o problema original (3.34)-(3.37). Como (3.42) é obtida essencialmente multiplicando-se (3.34) por uma função de $\mathcal{V}$, é suficiente recuperarmos a pressão p (perdida no processo). Para isto, considere o seguinte problema:

Para $\mathbf{f} \in L^2(0,T;V')$ e $\mathbf{u}_0 \in H$, queremos encontrar o par $(\mathbf{u}, p) \in X \times \mathcal{D}'(Q)$ tal que

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(Q), \tag{3.44}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \tag{3.45}$$

com $X = L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$.

Lema 3.3 *Os problemas* (3.41)-(3.43) *e* (3.44)-(3.45) *são equivalentes.*

Demonstração: ($\Leftarrow$) Claramente, se $(\mathbf{u}, p)$ é solução de (3.44)-(3.45) então $\mathbf{u}$ satisfaz (3.41)-(3.43).

($\Rightarrow$) Suponha que $\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ é solução de (3.41)-(3.43) e considere a aplicação $\boldsymbol{l} : (H_0^1(\Omega))^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\boldsymbol{l}(t;\mathbf{v}) = \int_0^t \Big(\langle \mathbf{f}(s), \mathbf{v} \rangle - a(\mathbf{u}(s), \mathbf{v}) \Big) \, ds - (\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}).$$

Para cada t, $\boldsymbol{l}(t;\mathbf{v})$ é um funcional linear em $(H_0^1(\Omega))^n$ que se anula em V. Então, pelo Lema C.1 temos que, para cada t, existe uma única função $P(t) \in L_0^2(\Omega)$ tal que $\boldsymbol{l}(t;\mathbf{v}) = -\langle \nabla P(t), \mathbf{v} \rangle, \forall \mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^n$. Então,

$$(P(t), \operatorname{div} \mathbf{v}) = \int_0^t \Big(\langle \mathbf{f}(s), \mathbf{v} \rangle - a(\mathbf{u}(s), \mathbf{v}) \Big) \, ds - (\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) \tag{3.46}$$

$\forall \mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^n$. Como $A\mathbf{u} \in L^2(0,T;V')$ podemos verificar que $P \in C([0,T], L_0^2(\Omega))$.

Agora, diferenciando (3.46) obtemos

$$(P'(t), \operatorname{div} \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} \rangle - a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - (\mathbf{u}'(t), \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^n.$$

Tomando $p = P'$ em $\mathcal{D}'(Q)$ obtemos (3.44) e a prova do Lema 3.5 está completa.

■

No seguinte teorema provaremos que o problema (3.34)-(3.37) tem uma única solução fraca.

Teorema 3.6 *Para* $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;V')$ *e* $\boldsymbol{u}_0 \in H$*, existe uma única solução fraca* $\boldsymbol{u}$ *do problema* (3.34)-(3.37).

Demonstração: Para provarmos a existência usaremos novamente o *método de Faedo-Galerkin*. Para isto, considere $(\mathbf{v}_j)_{j=1}^{\infty}$ uma base de V, V_m o espaço gerado por $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ e o seguinte problema aproximado: encontrar $\mathbf{u}_m \in V_m$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m(t) &= \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\mathbf{v}_i, \\ (\mathbf{u}_m'(t), \mathbf{v}_j) + a(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{v}_j) &= \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v}_j \rangle, \quad 1 \leq j \leq m, \qquad (3.47) \\ \mathbf{u}_m(0) &= \mathbf{u}_{0m} \qquad (3.48) \end{aligned}$$

com $\mathbf{u}_{0m} \in V_m$ escolhido tal que $\lim_{m\to\infty} \mathbf{u}_{0m} = \mathbf{u}_0$ em H. Por exemplo, $\mathbf{u}_{0m}$ pode ser a projeção ortogonal de $\mathbf{u}_0$ em V_m.

Primeiro provaremos que o problema aproximado (3.47)-(3.48) tem uma única solução para cada m fixo. Para isto, note que (3.47) é um sistema linear de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem dado por

$$\sum_{i=1}^{m} (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)\, g_{im}'(t) + \nu \sum_{i=1}^{m} (\nabla \mathbf{v}_i, \nabla \mathbf{v}_j)\, g_{im}(t) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v}_j \rangle, \quad j = 1, \ldots, m$$

ou na forma matricial

$$A\, G'(t) + B\, G(t) = F(t) \qquad (3.49)$$

com $a_{ij} = (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$, $G_i(t) = g_{im}(t)$, $b_{ij} = \nu(\nabla \mathbf{v}_i, \nabla \mathbf{v}_j)$ e $F_j(t) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v}_j \rangle$.

Como os vetores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ são linearmente independentes, a matriz A é inversível e (3.49) torna-se o seguinte sistema de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes:

$$\begin{cases} G'(t) + A^{-1}\, B\, G(t) = A^{-1}\, F(t) \\ G(0) = G_0 \end{cases} \qquad (3.50)$$

com G_{i0} a i-ésima componente de $\mathbf{u}_{0m}$.

Logo, pela teoria das equações diferenciais ordinárias[6] existe uma única absolutamente contínua $G(t)$ solução global de (3.50). Além disso, com a função $t \mapsto \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v}_j \rangle$ pertence a $L^2(0,T)$ temos que $g_{im}' \in L^2(0,T)$. Portanto, para cada m, existe uma única $\mathbf{u}_m$ solução de (3.47) tal que

$$\mathbf{u}_m \in \mathcal{C}([0,T]; V_m) \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_m' \in L^2(0,T; V_m).$$

[6]para mais detalhes consulte [22]

No que segue, obteremos estimativas *a priori* da solução $\mathbf{u}_m$ de (3.47)-(3.48). Para isto, multiplique a equação de (3.47) por $g_{jm}(t)$, some para $j = 1, \ldots, m$ para obter

$$(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{u}_m(t)) + \nu \left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|_V^2 = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{u}_m(t)\rangle .$$

Usando[7] $2(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{u}_m(t)) = \dfrac{d}{dt}||\mathbf{u}_m(t)||_H^2$ tem-se

$$\frac{d}{dt}||\mathbf{u}_m(t)||_H^2 + 2\nu \left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|_V^2 = 2\left\langle \mathbf{f}(t), \mathbf{u}_m(t)\right\rangle \leq 2\left\|\mathbf{f}(t)\right\|_{V'}\left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|_V . \tag{3.51}$$

Aplicando a desigualdade de Young $ab \leq \nu\, a^2 + \dfrac{1}{4\nu}\, b^2$ obtemos

$$2\left\|\mathbf{f}(t)\right\|_{V'}\left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|_V \leq \nu \left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|_V^2 + \frac{1}{2\nu}\left\|\mathbf{f}(t)\right\|_{V'}^2 \tag{3.52}$$

e (3.51) torna-se

$$\frac{d}{dt}||\mathbf{u}_m(t)||_H^2 + \nu \left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|_V^2 \leq \frac{1}{2\nu}\left\|\mathbf{f}(t)\right\|_{V'}^2 . \tag{3.53}$$

Integrando (3.53) em $(0, t)$ com $0 < t \leq t_m < T$ obtemos

$$\begin{aligned} ||\mathbf{u}_m(t)||_H^2 + \nu \int_0^t \left\|\mathbf{u}_m(s)\right\|_V^2 ds &\leq ||u_{0m}||_H^2 + \frac{1}{2\nu}\int_0^T \left\|\mathbf{f}(t)\right\|_{V'}^2 dt, \\ &\leq ||u_0||_H^2 + \frac{1}{2\nu}\int_0^T \left\|\mathbf{f}(t)\right\|_{V'}^2 dt. \end{aligned}$$

Logo, $||\mathbf{u}_m(t)||_H$ é limitada por uma constante que independe de t e m. Portanto, $t_m = T$ e

$$\sup_{0\leq t\leq T} ||\mathbf{u}_m(t)||_H^2 \leq ||u_0||_H^2 + \frac{1}{2\nu}\int_0^T \left\|\mathbf{f}(t)\right\|_{V'}^2 dt. \tag{3.54}$$

Integrando novamente (3.53) em $(0, T)$ obtemos

$$\begin{aligned} ||\mathbf{u}_m(T)||_H^2 + \nu \int_0^T \left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|_V^2 dt &\leq ||u_{0m}||_H^2 + \frac{1}{2\nu}\int_0^T \left\|\mathbf{f}(t)\right\|_{V'}^2 dt, \\ &\leq ||u_0||_H^2 + \frac{1}{2\nu}\int_0^T \left\|\mathbf{f}(t)\right\|_{V'}^2 dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^T \left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|_V^2 dt \leq \frac{1}{\nu}||u_0||_H^2 + \frac{1}{2\nu^2}\int_0^T \left\|\mathbf{f}(t)\right\|_{V'}^2 dt. \tag{3.55}$$

[7] Se $\mathbf{w} \in L^2(0, T; V)$, $\mathbf{w}' \in L^2(0, T; V')$ tem-se $\dfrac{d}{dt}||\mathbf{w}(t)||_H^2 = (\mathbf{w}(t), \mathbf{w}'(t))$ q.s.

Por (3.54) e (3.55) temos que $(\mathbf{u}_m)$ é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$. Portanto, existem $\mathbf{u}^* \in L^\infty(0,T;H)$, $\mathbf{u} \in L^2(0,T;V)$ e uma subsequência $(\mathbf{u}_{m'})$ de $(\mathbf{u}_m)$ tais que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{m'} &\overset{*}{\rightharpoonup} \mathbf{u}^* \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H), \\ \mathbf{u}_{m'} &\rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{em} \quad L^2(0,T;V). \end{aligned} \tag{3.56}$$

Podemos mostrar que $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}$ em $L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$[8].

Agora, sejam $m = m'$ e $\psi \in \mathcal{C}^1([0,T])$ tal que $\psi(T) = 0$. Multiplicando (3.47) por $\psi(t)$ e integrando em $(0,T)$ obtemos

$$\int_0^T (\mathbf{u}'_{m'}(t), \mathbf{v}_j)\psi(t)dt + \int_0^T a(\mathbf{u}_{m'}(t), \mathbf{v}_j)\psi(t)dt = \int_0^T \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v}_j \rangle \psi(t)dt.$$

Mas, por integração por partes, temos

$$\int_0^T (\mathbf{u}'_{m'}(t), \mathbf{v}_j)\psi(t)dt = -(\mathbf{u}_{m'}(0), \mathbf{v}_j)\psi(0) - \int_0^T (\mathbf{u}_{m'}(t), \mathbf{v}_j)\psi'(t)dt.$$

Logo,

$$\begin{aligned} -\int_0^T (\mathbf{u}_{m'}(t), \mathbf{v}_j)\psi'(t)\,dt \quad &+ \quad \int_0^T a(\mathbf{u}_{m'}(t), \mathbf{v}_j)\psi(t)\,dt \\ &= \quad (\mathbf{u}_{0m'}, \mathbf{v}_j)\psi(0) + \int_0^T \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v}_j \rangle \psi(t)dt. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Por outro lado, usando a convergência (3.56) temos que

$$\begin{aligned} \lim_{m'\to\infty} \int_0^T (\mathbf{u}_{m'}(t), \mathbf{v})\psi'(t)\,dt \quad &= \quad \int_0^T (\mathbf{u}(t), \mathbf{v})\psi'(t)\,dt, \\ \lim_{m'\to\infty} \int_0^T a(\mathbf{u}_{m'}(t), \mathbf{v})\psi(t)\,dt \quad &= \quad \int_0^T a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v})\psi(t)\,dt. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Usando (3.58) e $\mathbf{u}_{0m} \to \mathbf{u}_0$ em H, podemos passar o limite em (3.57) e obter

$$\begin{aligned} -\int_0^T (\mathbf{u}(t), \mathbf{v}_j)\psi'(t)\,dt \quad &+ \quad \int_0^T a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}_j)\psi(t)\,dt \\ &= \quad (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_j)\psi(0) + \int_0^T \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v}_j \rangle \psi(t)dt, \quad \forall j. \end{aligned} \tag{3.59}$$

[8] consulte Temam [62, p. 258]

Por linearidade, 3.59 torna-se

$$\begin{aligned} -\int_0^T (\mathbf{u}(t),\mathbf{v})\psi'(t)dt \quad &+ \quad \nu\int_0^T a(\mathbf{u}(t),\mathbf{v})\psi(t)dt \\ &= \quad (\mathbf{u}_0,\mathbf{v})\psi(0) + \int_0^T \langle \mathbf{f}(t),\mathbf{v}\rangle\,\psi(t)dt, \quad \forall \mathbf{v}\in\bigcup_{i=1}^{\infty} V_m. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Como $\bigcup_{i=1}^{\infty} V_m$ é denso em V temos que, para cada $\mathbf{v}\in V$, existe uma sequência $(\mathbf{v}_n)$ em $\bigcup_{i=1}^{\infty} V_m$ tal que $\mathbf{v}_n \to \mathbf{v}$ em V, mas os membros de (3.60) definem funcionais lineares contínuos na variável $\mathbf{v}$, e portanto, (3.60) vale para todo $\mathbf{v}\in V$.

Agora, tomando $\psi\in\mathcal{D}(0,T)$ em (3.60) obtemos

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t),\mathbf{v}) + a(\mathbf{u}(t),\mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}(t),\mathbf{v}\rangle \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,T), \quad \forall \mathbf{v}\in V. \tag{3.61}$$

Resta mostrarmos que $\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_0$. Para isto, multiplique (3.61) por $\psi\in C^1([0,T])$ tal que $\psi(T)=0$, integre em $(0,T)$ e integre por partes para obter

$$\begin{aligned} -\int_0^T (\mathbf{u}(t),\mathbf{v})\psi'(t)dt \quad &+ \quad \int_0^T a(\mathbf{u}(t),\mathbf{v})\psi(t)dt \\ &= \quad (\mathbf{u}(0),\mathbf{v})\psi(0) + \int_0^T \langle \mathbf{f}(t),\mathbf{v}\rangle\,\psi(t)dt. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Subtraindo (3.60) e (3.62) tem-se

$$(\mathbf{u}(0)-\mathbf{u}_0,\mathbf{v})\psi(0) = 0, \quad \forall \mathbf{v}\in V.$$

Mas, $\psi(0)\neq 0$ e concluímos que

$$\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_0.$$

Agora provaremos a unicidade da solução fraca. Para isto, sejam $\mathbf{v},\mathbf{w}\in L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)$ são soluções do problema (3.34)-(3.37) e $\mathbf{u}=\mathbf{v}-\mathbf{w}$ então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t),\mathbf{v}) + a(\mathbf{u}(t),\mathbf{v}) = 0 \quad &\text{em } \mathcal{D}'(0,T), \quad \forall \mathbf{v}\in V, \\ \mathbf{u}(0) = 0. \end{aligned}$$

Tomando $\mathbf{v}=\mathbf{u}(t)$ obtemos

$$\frac{d}{dt}||\mathbf{u}(t)||_H^2 + \nu\,\|\mathbf{u}(t)\|_V^2 = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}||\mathbf{u}(t)||_H^2 \leq 0.$$

Integrando em $(0,t)$ tem-se $||\mathbf{u}||^2_{L^\infty(0,T;H)} \leq ||\mathbf{u}(0)||^2_H = 0$, o que implica $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

E a prova do Teorema 3.6 está completa. ■

Na seguinte proposição provaremos um resultado de regularidade da solução fracado problema (3.34)-(3.37).

Proposição 3.3 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$, $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;H)$ e $\boldsymbol{u}_0 \in V$. Se $(\boldsymbol{u}, p)$ é a solução fraca do problema* (3.34)-(3.37) dada no Teorema 3.6 então

$$\mathbf{u} \in L^2(0,T,(H^2(\Omega))^n), \quad \mathbf{u}' \in L^2(0,T,H) \quad \text{e} \quad p \in L^2(0,T,H^1(\Omega)).$$

Demonstração: Multiplicando (3.47) por $g'_{jm}(t)$ e somando para $j = 1,\ldots,m$, obtemos

$$||\mathbf{u}'_m(t)||^2_H + a(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}'_m(t)) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}'_m(t)),$$

o que implica

$$||\mathbf{u}'_m(t)||^2_H + \frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}_m(t)\|^2_V = (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}'_m(t)).$$

Integrando em $(0,T)$ e usando as desigualdades de Hölder e Young tem-se

$$\begin{aligned}\int_0^T ||\mathbf{u}'_m(t)||^2_H dt + \frac{\nu}{2}\|\mathbf{u}_m(T)\|^2_V &= \frac{\nu}{2}\|\mathbf{u}_{0m}\|^2_V + \int_0^T (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}'_m(t))dt \\ &\leq \frac{\nu}{2}\|\mathbf{u}_{0m}\|^2_V + \frac{1}{2}\int_0^T ||\mathbf{f}(t)||^2_H dt + \frac{1}{2}\int_0^T ||\mathbf{u}'_m(t)||^2_H dt.\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^T ||\mathbf{u}'_m(t)||^2_H\, dt \leq \nu\|\mathbf{u}_{0m}\|^2_V + \int_0^T ||\mathbf{f}(t)||^2_H\, dt. \tag{3.63}$$

Usando que

$$\mathbf{u}_{0m} \to \mathbf{u}_0 \quad \text{em} \quad V \quad \text{tal que} \quad \|\mathbf{u}_{0m}\|_V \leq C\|\mathbf{u}_0\|, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

(3.63) torna-se

$$\int_0^T ||\mathbf{u}'_m(t)||^2_H\, dt \leq C\|\mathbf{u}_0\|^2_V + \int_0^T ||\mathbf{f}(t)||^2_H\, dt. \tag{3.64}$$

Assim, a sequência $(\mathbf{u}'_m)$ é uniformemente limitada em $L^2(0,T;H)$ e deduzimos que existe $\mathbf{u}' \in L^2(0,T;H)$.

Portanto, $\mathbf{f} - \mathbf{u}' \in L^2(0,T;H) \subset L^2(0,T;(L^2(\Omega))^n)$ e podemos considerar o seguinte problema estacionário:

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u}(t) + \nabla p(t) &= \mathbf{f}(t) - \mathbf{u}'(t) && \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div}\mathbf{u}(t) &= 0 && \text{em } \Omega, \\ \mathbf{u}(t) &= 0 && \text{em } \partial\Omega \end{aligned}$$

para q.s. $t \in [0,T]$. Aplicando a Proposição 3.1, obtemos $\mathbf{u}(t) \in (H^2(\Omega))^n$ e $p(t) \in H^1(\Omega)$ tais que

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{(H^2(\Omega))^n} + \|p(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq C\,\|\mathbf{f}(t) - \mathbf{u}'(t)\|_{(L^2(\Omega))^n}.$$

Portanto, $\mathbf{u} \in L^2(0,T,(H^2(\Omega))^n)$ e $p \in L^2(0,T,H^1(\Omega))$.

E a prova da proposição 3.3 está completa. ■

Equações de Navier-Stokes

Dadas $\mathbf{f} : Q \to \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u}_0 : \Omega \to \mathbb{R}^n$, queremos encontrar $\mathbf{u} : Q \to \mathbb{R}^n$ e $p : Q \to \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \qquad \text{em } Q, \tag{3.65}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \qquad \text{em } Q, \tag{3.66}$$

$$\mathbf{u} = 0 \qquad \text{em } S, \tag{3.67}$$

$$\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0 \qquad \text{em } \Omega. \tag{3.68}$$

Formulação fraca

Para obtermos a formulação fraca do problema (3.65)-(3.68), seja $(\mathbf{u},p) \in \left(C^2(\overline{Q})\right)^n \times C^1(\overline{Q})$ a solução clássica de (3.65)-(3.68). Fazendo o produto escalar de (3.65) com $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, integrando sobre Ω, integrando por partes e usando $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$, obtemos

$$(\mathbf{u}'(t),\mathbf{v}) + a(\mathbf{u}(t),\mathbf{v}) + b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t),\mathbf{v}),$$
$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0.$$

Assim, temos a seguinte formulação variacional do problema (3.65)-(3.68):

Formulação Variacional 3.4 *Para* $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;V')$ *e* $\boldsymbol{u}_0 \in H$*, queremos encontrar uma função* $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ *tal que*

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}) + a(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}\rangle\,, \tag{3.69}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0. \tag{3.70}$$

Definição 3.4 *Para* $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;V')$ *e* $\boldsymbol{u}_0 \in H$*, dizemos que* $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ *é solução fraca do problema* (3.65)-(3.68) *se* $\boldsymbol{u}$ *satisfaz* (3.69)-(3.70).

No que segue, obteremos uma formulação equivalente para o problema (3.65)-(3.68). Para isto, considere $\mathbf{u} \in L^2(0,T;V)$ fixa e as aplicações $t \longmapsto A\mathbf{u}(t)$, $t \longmapsto B(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t))$ defindas q.s. em $[0,T]$ e dadas por

$$\langle A(\mathbf{u}(t),\mathbf{v}\rangle = a(\mathbf{u}(t),\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V, \tag{3.71}$$

$$\langle B(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t)),\mathbf{v}\rangle = b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V. \tag{3.72}$$

Usaremos a notação $B\mathbf{u}(t)$ para $B(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t))$.

Nas seguintes proposições provaremos algumas propriedades do operador B. Para isto, precisamos dos seguintes resultados de interpolação:

Lema 3.4 *Para* $\boldsymbol{v} \in (H_0^1(\Omega))^n$ *temos que*

$$||\boldsymbol{v}||_{(L^4(\Omega))^2} \leq C\,||\boldsymbol{v}||^{1/2}_{(H^1(\Omega))^2}\,||\boldsymbol{v}||^{1/2}_{(L^2(\Omega))^2} \quad se \quad n=2, \tag{3.73}$$

$$||\boldsymbol{v}||_{(L^4(\Omega))^3} \leq C\,||\boldsymbol{v}||^{3/4}_{(H^1(\Omega))^3}||\boldsymbol{v}||^{1/4}_{(L^2(\Omega))^3} \quad se \quad n=3. \tag{3.74}$$

Demonstração: Para (3.73) tome $n=2$, $j=0$, $p=4$, $m=1$, $r=2$, $\alpha=1/2$ e $C_2=0$ em (A.9). Para (3.74) tome $n=3$, $j=0$, $p=4$, $m=1$, $r=2$, $\alpha=3/4$ e $C_2=0$ em (A.9). ■

Proposição 3.4 *Se* $n \leq 4$ *e* $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;V)$ *então* $B\boldsymbol{u} \in L^1(0,T;V')$.

Demonstração: Note que $t \longmapsto B\mathbf{u}(t)$ é mensurável q.s. em $[0,T]$. Aplicando o Lema 3.1 obtemos

$$|\,\langle B\mathbf{u}(t),\mathbf{v}\rangle\,| = |b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{v})| \leq C||\mathbf{u}(t)||_V^2\,||\mathbf{v}||_V.$$

Logo,

$$\frac{|\langle B\mathbf{u}(t), \mathbf{v}\rangle|}{||\mathbf{v}||_V} \leq C||\mathbf{u}(t)||_V^2 \Rightarrow ||B\mathbf{u}(t)||_{V'} \leq C||\mathbf{u}(t)||_V^2.$$

Portanto, $B\mathbf{u}(t) \in V'$ e

$$\int_0^T ||B\mathbf{u}(t)||_{V'}\, dt \leq C \int_0^T ||\mathbf{u}(t)||_V^2\, dt \Rightarrow ||B\mathbf{u}||_{L^1(0,T;V')} \leq C||\mathbf{u}||_{L^2(0,T;V)}. \tag{3.75}$$

Então, $B\mathbf{u} \in L^1(0,T;V')$ e $B : L^2(0,T;V) \to L^1(0,T;V')$.

E a prova da Proposição 3.4 está completa. ■

Proposição 3.5 *Se* $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ *então*

$$B\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;V') \quad se \quad n = 2, \tag{3.76}$$

$$B\boldsymbol{u} \in L^{4/3}(0,T;V') \quad se \quad n = 3. \tag{3.77}$$

Demonstração: Usando a propriedade $b(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v}) = -b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ e a imersão $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ para $n \leq 4$, obtemos

$$|b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{v})| = |-b(\mathbf{u}(t),\mathbf{v},\mathbf{u}(t))| \leq C||\mathbf{u}(t)||^2_{(L^4(\Omega))^n}\, ||\mathbf{v}||_V.$$

Portanto,

$$|\langle B\mathbf{u}(t), \mathbf{v}\rangle| = |b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{v})| \leq C||\mathbf{u}(t)||^2_{(L^4(\Omega))^n}\, ||\mathbf{v}||_V.$$

Logo,

$$\frac{|\langle B\mathbf{u}(t), \mathbf{v}\rangle|}{||\mathbf{v}||_V} \leq C||\mathbf{u}(t)||^2_{(L^4(\Omega))^n} \Rightarrow ||B\mathbf{u}(t)||_{V'} \leq C||\mathbf{u}(t)||^2_{(L^4(\Omega))^n}. \tag{3.78}$$

Agora, vamos considerar separadamente os casos $n = 2$ e $n = 3$.

Se $n = 2$, podemos combinar (3.73) e (3.78) e obter

$$||B\mathbf{u}(t)||_{V'} \leq C||\mathbf{u}(t)||^2_{(L^4(\Omega))^2} \leq C||\mathbf{u}(t)||_V||\mathbf{u}(t)||_H,$$

o que implica $\displaystyle\int_0^T ||B\mathbf{u}(t)||^2_{V'}\, dt \leq C \int_0^T ||\mathbf{u}(t)||^2_V||\mathbf{u}(t)||^2_H\, dt$, e logo,

$$||B\mathbf{u}||_{L^2(0,T;V')} \leq C||\mathbf{u}||_{L^2(0,T;V)}||\mathbf{u}||_{L^\infty(0,T;H)},$$

ou seja, $B\mathbf{u} \in L^2(0,T;V')$ se $n = 2$.

Se $n = 3$, podemos combinar (3.74) e (3.78) e obter

$$||B\mathbf{u}(t)||_{V'} \leq C||\mathbf{u}(t)||^2_{(L^4(\Omega))^3} \leq C||\mathbf{u}(t)||^{3/2}_V ||\mathbf{u}(t)||^{1/2}_H,$$

o que implica $\displaystyle\int_0^T ||B\mathbf{u}(t)||^{4/3}_{V'}\, dt \leq C \int_0^T ||\mathbf{u}(t)||^2_V ||\mathbf{u}(t)||^{2/3}_H\, dt$, e logo,

$$||B\mathbf{u}||_{L^{4/3}(0,T;V')} \leq C||\mathbf{u}||^{3/2}_{L^2(0,T;V)} ||\mathbf{u}||^{1/2}_{L^\infty(0,T;H)},$$

ou seja, $B\mathbf{u} \in L^{4/3}(0,T;V')$ se $n = 3$.

E prova da Proposição 3.5 está completa. ■

Teorema 3.7 *Se $n \leq 4$ e $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ é solução fraca do problema* (3.65)-(3.68) *então $\boldsymbol{u}' \in L^1(0,T;V')$. Em particular,*

$$\boldsymbol{u}' \in L^2(0,T;V') \quad se \quad n = 2, \tag{3.79}$$

$$\boldsymbol{u}' \in L^{4/3}(0,T;V') \quad se \quad n = 3. \tag{3.80}$$

Demonstração: Observe que

$$\langle A\mathbf{u}(t) - B\mathbf{u}(t), \mathbf{v}\rangle = a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Então, pelo Lema A.1 do Apêndice C, a solução $\mathbf{u}$ de (3.69) satisfaz

$$\langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{f}(t) - \nu A\mathbf{u}(t) - B\mathbf{u}(t), \mathbf{v}\rangle \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,T), \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Logo, $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t) - \nu A\mathbf{u}(t) - B\mathbf{u}(t) \in V'$. Então, aplicando as Proposições 3.4 e 3.5 e $\mathbf{f} \in L^2(0,T;V')$, o resultado segue.

E a prova do Teorema 3.7 está completa. ■

Pelos resultados do Teorema 3.7 tem-se $\mathbf{u} \in C([0,T];V')$, o que justifica a condição (3.70). Observe que, para $n = 2$ temos $\mathbf{u} \in C([0,T];H)$[9].

Portanto, temos a seguinte formulação do problema (3.65)-(3.68):

[9]veja Lema **??** do Apêndice C

Formulação Equivalente 3.4 *Para* $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;V')$ *e* $\boldsymbol{u}_0 \in H$*, queremos encontrar uma função* $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ *tal que*

$$\boldsymbol{u}' \in L^1(0,T;V') \quad se \quad n \leq 4,$$

$$\boldsymbol{u}' + A\boldsymbol{u} + B\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \quad em \quad L^1(0,T;V'), \tag{3.81}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0. \tag{3.82}$$

Em particular, $\boldsymbol{u}' \in L^{4/3}(0,T;V')$ *se* $n = 3$ *e* $\boldsymbol{u}' \in L^2(0,T;V')$ *se* $n = 2$.

Resta verificarmos a equivalência entre o problema (3.81)-(3.82) e o problema original (3.65)-(3.68). Como (3.81) é obtida essencialmente multiplicando-se (3.65) por uma função de $\mathcal{V}$, é suficiente recuperarmos a pressão p (eliminada no processo). Para isto, considere o seguinte problema:

Para $\mathbf{f} \in L^2(0,T;V')$ e $\mathbf{u}_0 \in H$, queremos encontrar o par $(\mathbf{u}, p) \in X \times \mathcal{D}'(Q)$ tal que

$$\mathbf{u}' - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(Q) \tag{3.83}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \tag{3.84}$$

com $X = L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$.

Lema 3.5 *Os problemas* (3.81)-(3.82) *e* (3.83)-(3.84) *são equivalentes.*

Demonstração: A prova é essencialmente a dada no Lema 3.5 da seção 3.6 deste capítulo, definindo-se o funcional linear $\boldsymbol{l} : (H_0^1(\Omega))^n \to \mathbb{R}$ por

$$\boldsymbol{l}(t;\mathbf{v}) = \int_0^t \Big(\langle \mathbf{f}(s), \mathbf{v} \rangle - a(\mathbf{u}(s), \mathbf{v}) - b(\mathbf{u}(s), \mathbf{u}(s), \mathbf{v}) \Big) ds - (\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}).$$

Para cada t, $\boldsymbol{l}$ é um funcional linear em $(H_0^1(\Omega))^n$ que se anula em V. Portanto, existe $p \in \mathcal{D}'(Q)$.

E a prova do Lema 3.5 está completa. ■

No seguinte resultado provaremos existência de solução fraca do problema (3.65)-(3.68).

Teorema 3.8 *Para* $n \leq 4$, $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;V')$ *e* $\boldsymbol{u}_0 \in H$*, existe uma solução fraca* $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ *do problema* (3.65)-(3.68).

Demonstração: Para mostrarmos a existência de solução fraca do problema (3.65)-(3.68) vamos aplicar o *método de Faedo-Galerkin*. Para isto, seja $(\mathbf{v}_j)_{j=1}^{\infty}$ uma base de V, V_m o espaço gerado por $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ e o seguinte problema aproximado: encontrar uma solução aproximada $\mathbf{u}_m \in V_m$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m(t) &= \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\mathbf{v}_i, \\ (\mathbf{u}_m'(t), \mathbf{v}_j) + a(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{v}_j) &+ b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{v}_j) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v}_j \rangle, \quad 1 \leq j \leq m, \quad (3.85) \\ \mathbf{u}_m(0) &= \mathbf{u}_{0m} \quad (3.86) \end{aligned}$$

com $\mathbf{u}_{0m} \in V_m$ escolhido tal que $\lim_{m\to\infty} \mathbf{u}_{0m} = \mathbf{u}_0$ em H. Por exemplo, $\mathbf{u}_{0m}$ pode ser a projeção ortogonal de $\mathbf{u}_0$ em V_m.

Observe que o problema (3.85)-(3.86) é equivalente ao seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias: para $1 \leq j \leq m$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)g_{im}'(t) + \nu \sum_{i=1}^{m}(\nabla \mathbf{v}_i, \nabla \mathbf{v}_j)g_{im}(t) &+ \sum_{i,k=1}^{m} b(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j)g_{im}(t)g_{km}(t) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v}_j \rangle, \\ g_{jm}(0) &= g_{jm}^0 \quad (3.87) \end{aligned}$$

com g_{jm}^0 os coeficientes de $\mathbf{u}_{0m}$.

Como a matriz com elementos $a_{ij} = (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ é inversível, pois $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_m\}$ são LI, temos que (3.87) é uma sistema do tipo

$$\begin{aligned} &g_{jm}'(t) = \Phi_j(t, g_{im}(t), g_{im}(t)\, g_{jm}(t)) \quad \text{para} \quad 1 \leq i, j \leq m, \\ &g_{jm}(0) = g_{jm}^0. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Agora, pelo Teorema de Carathéodory[10], o sistema (3.88) tem uma solução maximal local $\mathbf{u}_m(t)$ no intervalo $[0, t_m)$ para algum $t_m \leq T$. Se $t_m < T$ então necessariamente temos que

$$\lim_{t\to t_m^-} ||\mathbf{u}_m(t)||_H = \infty.$$

Portanto, se mostrarmos que $||\mathbf{u}_m(t)||_H$ é limitada independente de m e t então provaremos que $t_m = T$, $\forall m$, o que implica que $\mathbf{u}_m(t)$ é solução global. Além disso, não é complicado mostrarmos que a solução deste sistema é única.

[10] consulte [22]

Assim, multiplicando (3.85) por $g_{jm}(t)$ e somando para $j = 1, \ldots, m$ obtemos

$$(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{u}_m(t)) + \nu||\mathbf{u}_m(t)||_V^2 + b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{u}_m(t) \rangle .$$

Usando que $b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)) = 0$ tem-se

$$(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{u}_m(t)) + \nu||\mathbf{u}_m(t)||_V^2 = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{u}_m(t) \rangle ,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}||\mathbf{u}_m(t)||_H^2 + 2\nu \left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|_V^2 = 2 \left\langle \mathbf{f}(t), \mathbf{u}_m(t) \right\rangle \leq 2||\mathbf{f}(t)||_{V'}||\mathbf{u}_m(t)||_V. \tag{3.89}$$

Usando a desigualdade de Young $ab \leq \nu\, a^2 + \dfrac{1}{4\nu}\, b^2$ obtemos

$$\frac{d}{dt}||\mathbf{u}_m(t)||_H^2 + \nu \left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|_V^2 \leq \frac{1}{2\nu} \left\|\mathbf{f}(t)\right\|_{V'}^2 . \tag{3.90}$$

Integrando (3.90) em $(0, t)$ com $0 \leq t_m \leq T$ deduzimos que

$$\begin{aligned} ||\mathbf{u}_m(t)||_H^2 + \nu \int_0^t \left\|\mathbf{u}_m(s)\right\|_V^2 \, ds &\leq ||\mathbf{u}_{0m}||_H^2 + \frac{1}{2\nu} \int_0^t \left\|\mathbf{f}(s)\right\|_{V'}^2 \, ds, \\ &\leq ||\mathbf{u}_0||_H^2 + \frac{1}{2\nu} \int_0^T \left\|\mathbf{f}(s)\right\|_{V'}^2 \, dt. \end{aligned} \tag{3.91}$$

Logo, $||\mathbf{u}_m(t)||_H$ é limitada por uma constante que independe de m e t. Portanto, $t_m = T$ e $\mathbf{u}_m$ é uniformemente limitada em $L^\infty(0, T; H)$.

Além disso, fazendo $t = T$ em (3.91) obtemos

$$||\mathbf{u}_m(T)||_H^2 + \nu \int_0^T \left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|_V^2 \, dt \leq ||\mathbf{u}_0||_H^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^T \left\|\mathbf{f}(t)\right\|_{V'}^2 \, dt. \tag{3.92}$$

Logo, $\mathbf{u}_m$ é uniformemente limitada em $L^2(0, T; V)$. Em resumo,

$$||\mathbf{u}_m||_{L^\infty(0,T;H)} + ||\mathbf{u}_m||_{L^2(0,T;V)} \leq C(||\mathbf{u}_0||_H + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;V')}) \tag{3.93}$$

com C uma constante independente de m.

No que segue, obteremos uma estimativa de alguma derivada fracionada de $\mathbf{u}_m$. Pela definição do espaço $\mathcal{H}^\gamma(0, T; V, H)$[11], primeiro estenderemos $\mathbf{u}_m(t)$ por zero fora

[11] veja seção B.2 do Apêndice B

de $[0,T]$ e depois consideramos a transformada de Fourier da função estendida. Para isto, seja $\widetilde{\mathbf{u}}_m : \mathbb{R} \to V$ tal que

$$\widetilde{\mathbf{u}}_m(t) = \begin{cases} \mathbf{u}_m(t) & \text{se} \quad t \in [0,T], \\ 0 & \text{se} \quad t \in \mathbb{R} \setminus [0,T]. \end{cases}$$

e $\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)$ a transformada de Fourier de $\widetilde{\mathbf{u}}_m(t)$ dada por

$$\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi t\tau} \widetilde{\mathbf{u}}(\tau)\, d\tau.$$

Assim, o sistema (3.85) é estendido para $\mathbb{R}$ do seguinte modo:

$$\frac{d}{dt}(\widetilde{\mathbf{u}}_m(t), \mathbf{v}_j) + a(\widetilde{\mathbf{u}}_m(t), \mathbf{v}_j) + b(\widetilde{\mathbf{u}}_m(t), \widetilde{\mathbf{u}}_m(t), \mathbf{v}_j) = \left\langle \widetilde{\mathbf{f}}(t), \mathbf{v}_j \right\rangle +$$

$$(\mathbf{u}_{0m}, \mathbf{v}_j)\delta_0 - (\mathbf{u}(T), \mathbf{v}_j)\delta_T, \quad 1 \leq j \leq m, \tag{3.94}$$

com δ_0 e δ_T as distribuições de Dirac em $t = 0$ e $t = T$, respectivamente, e $\widetilde{\mathbf{f}}$ a extensão de $\mathbf{f}$ por zero.

Representaremos por $\widehat{\mathbf{f}}_m(\tau)$ a transformada de Fourier de $\widetilde{\mathbf{f}}(t)$ e $\widehat{B}_m(\tau)$ a transformada de Fourier de $B\widetilde{\mathbf{u}}_m(t)$.

Calculando a transformada de Fourier de (3.94) obtemos, para $1 \leq j \leq m$,

$$2i\pi\tau(\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau), \mathbf{v}_j) + a(\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau), \mathbf{v}_j) + \left\langle \widehat{B}_m(\tau), \mathbf{v}_j \right\rangle = \left\langle \widehat{\mathbf{f}}(\tau), \mathbf{v}_j \right\rangle +$$

$$(\mathbf{u}_{0m}, \mathbf{v}_j) - (\mathbf{u}(T), \mathbf{v}_j)e^{-2i\pi\tau T}.$$

Multiplicando por $\widehat{g}_{jm}(t)$ (transformada de Fourier de $\widetilde{g}_{jm}(t)$) e somando para $j = 1, \ldots, m$ tem-se

$$2i\pi\tau||\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_H^2 + \nu||\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_V^2 + \left\langle \widehat{B}_m(\tau), \widehat{\mathbf{u}}_m(t) \right\rangle = \left\langle \widehat{\mathbf{f}}(t), \widehat{\mathbf{u}}_m(t) \right\rangle +$$

$$(\mathbf{u}_{0m}, \widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)) - (\mathbf{u}(T), \widehat{\mathbf{u}}_m(\tau))e^{-2i\pi\tau T}.$$

Da parte imaginária da igualdade acima obtemos a seguinte cota superior:

$$2\,\pi\,|\tau|\,||\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_H^2 \leq \Big(||\widehat{B}_m(\tau)||_{V'} + ||\widehat{\mathbf{f}}(\tau)||_{V'}\Big)||\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_V +$$

$$\Big(||\mathbf{u}_{0m}||_H + ||\mathbf{u}_m(T)||_H\Big)||\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_H.$$

Mas,

$$||\widehat{\mathbf{f}}(\tau)||_{V'} \leq \int_{\infty}^{\infty} ||\widetilde{\mathbf{f}}(\tau)||_{V'} dt \leq C_1.$$

Além disso, por (3.75), temos

$$||\widehat{B}_m(\tau)||_{V'} \leq \int_{\infty}^{\infty} ||B(\widetilde{\mathbf{u}}_m(t), \widetilde{\mathbf{u}}_m(t))||_{V'} dt \leq C_2 \int_0^T ||\mathbf{u}_m(t)||_V^2 \, dt \Rightarrow ||\widehat{B}_m(\tau)||_{V'} \leq C_3.$$

Lembrando que $||\mathbf{u}_{0m}||_H \leq C$ e $||\mathbf{u}_m(T)||_H \leq C$ obtemos a seguinte estimativa para todo $\tau \in \mathbb{R}$:

$$|\tau| \, ||\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_H^2 \leq C_4 \Big(||\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_V + ||\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_H \Big). \tag{3.95}$$

Por outro lado,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{||\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_V}{1+|\tau|^\sigma} \, d\tau \leq ||\mathbf{u}_m||_{L^2(0,T;V)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{1+|\tau|^\sigma} \right)^{1/2}.$$

Mas, $\sigma > 1/2$, o que implica

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{||\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_V}{1+|\tau|^\sigma} \, d\tau \leq C_5 ||\mathbf{u}_m||_{L^2(0,T;V)}.$$

Analogamente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{||\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_H}{1+|\tau|^\sigma} \, d\tau \leq C_5 ||\mathbf{u}_m||_{L^2(0,T;H)}.$$

Assim, dividindo os dois lados de (3.95) por $(1+|\tau|^\sigma)$ para algum σ tal que $1/2 < \sigma < 1$, integrando em $\mathbb{R}$ e usando (3.93) concluímos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tau| \, ||\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_H^2}{1+|\tau|^\sigma} \, d\tau \leq C_6 \quad \text{para} \quad \frac{1}{2} < \sigma < 1, \quad \forall m. \tag{3.96}$$

Combinando (3.96) e (3.95) obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{2\gamma} ||\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_H^2 \, d\tau \leq C_7$$

para algum γ tal que $0 < \gamma < \dfrac{1}{4}$(por exemplo, $\gamma = (1-\sigma)/2$).

Logo, $\mathbf{u}_m$ é uniformemente limitada em $\mathcal{H}^\gamma(0,T,V,H)$ com $0 < \gamma < \dfrac{1}{4}$ e, portanto,

$$||\mathbf{u}_m||_{\mathcal{H}^\gamma(0,T,V,H)} \leq C_8. \tag{3.97}$$

Pelas estimativas (3.93)-(3.97) e o Teorema B.5 temos que existe $\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ e uma subsequência $(\mathbf{u}_{m'})$ de $(\mathbf{u}_m)$ tais que

$$\mathbf{u}_{m'} \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{em} \quad L^2(0,T;V), \tag{3.98}$$

$$\mathbf{u}_{m'} \overset{*}{\rightharpoonup} \mathbf{u} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H), \tag{3.99}$$

$$\mathbf{u}_{m'} \to \mathbf{u} \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H). \tag{3.100}$$

As convergências (3.98), (3.99) e (3.100) nos permitirão passar o limite no problema (3.85) com $m = m'$. Para isto, multiplique (3.85) por $\psi \in C^1([0,T])$ tal que $\psi(T) = 0$. e integre em $[0,T]$ para obter

$$\int_0^T (\mathbf{u}_m'(t), \mathbf{v}_j)\psi(t)\,dt + \int_0^T a(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{v}_j)\psi(t)\,dt + \int_0^T b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{v}_j)\psi(t)\,dt =$$

$$\int_0^T \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v}_j \rangle\, \psi(t)\,dt.$$

Por integração por partes temos

$$\int_0^T (\mathbf{u}_m'(t), \mathbf{v}_j)\psi(t)dt = -(\mathbf{u}_m(0), \mathbf{v}_j)\psi(0) - \int_0^T (\mathbf{u}_m(t), \mathbf{v}_j)\psi'(t)dt.$$

Logo, para $1 \le j \le m$,

$$-\int_0^T (\mathbf{u}_m(t), \mathbf{v}_j)\psi'(t)\,dt + \int_0^T a(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{v}_j)\psi(t)\,dt +$$

$$\int_0^T b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{v}_j)\psi(t)\,dt = (\mathbf{u}_{0m}, \mathbf{v}_j)\psi(0) + \int_0^T \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v}_j \rangle\, \psi(t)dt. \tag{3.101}$$

Fixando um inteiro arbitrário m_0 e tomando $\mathbf{v} \in V_{m_0}$, (3.101) implica que

$$-\int_0^T (\mathbf{u}_{m'}(t), \mathbf{v})\psi'(t)\,dt + \int_0^T a(\mathbf{u}_{m'}(t), \mathbf{v})\psi(t)\,dt +$$

$$\int_0^T b(\mathbf{u}_{m'}(t), \mathbf{u}_{m'}(t), \mathbf{v})\psi(t)\,dt = (\mathbf{u}_{0m'}, \mathbf{v})\psi(0) + \int_0^T \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} \rangle\, \psi(t)dt, \quad \forall\, m' > m_0. \tag{3.102}$$

Usando a convergência (3.98) temos que

$$\begin{aligned} \lim_{m'\to\infty} \int_0^T (\mathbf{u}_{m'}(t), \mathbf{v})\psi'(t)\,dt &= \int_0^T (\mathbf{u}(t), \mathbf{v})\psi'(t)\,dt, \\ \lim_{m'\to\infty} \int_0^T a(\mathbf{u}_{m'}(t), \mathbf{v})\psi(t)\,dt &= \int_0^T a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v})\psi(t)\,dt. \end{aligned} \tag{3.103}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\int_0^T b(\mathbf{u}_{m'}(t),\mathbf{u}_{m'}(t),\mathbf{v})\psi(t)\,dt &= -\int_0^T b(\mathbf{u}_{m'}(t),\mathbf{v},\mathbf{u}_{m'}(t))\psi(t)\,dt\\ &= \int_0^T\left(\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega u_{m'j}\,D_jv_i\,u_{m'i}\right)\psi(t)\,dx\,dt\end{aligned}$$

com $D_jv_i\in L^\infty(\Omega)$.

Usando (3.100) temos que o produto $u_{m'j}\,u_{m'i}$ converge forte para $u_j\,u_i$ em $L^1(Q)$, portanto

$$\lim_{m'\to\infty}\int_0^T b(\mathbf{u}_{m'}(t),\mathbf{u}_{m'}(t),\mathbf{v})\psi(t)\,dt=\int_0^T b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{v})\psi(t)\,dt. \tag{3.104}$$

Lembrando que, por hipótese, $\lim\limits_{m'\to\infty}\mathbf{u}_{0m'}=\mathbf{u}_0$ em H e usando as convergências (3.103) e (3.104) podemos passar o limite em (3.102) e obter

$$\begin{aligned}&-\int_0^T(\mathbf{u}(t),\mathbf{v})\psi'(t)\,dt+\int_0^T a(\mathbf{u}(t),\mathbf{v})\psi(t)\,dt\\ &+\int_0^T b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{v})\psi(t)\,dt=(\mathbf{u}_0,\mathbf{v})\psi(0)+\int_0^T\langle\mathbf{f}(t),\mathbf{v}\rangle\,\psi(t)\,dt\end{aligned} \tag{3.105}$$

$\forall\mathbf{v}\in V_{m_0}$ e $\forall\psi\in C^1([0,T])$ tal que $\psi(T)=0$.

Como m_0 é arbitrário e $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}V_m$ é denso em V, temos que (3.105) é válida para toda $\mathbf{v}\in V$.

Por outro lado, tomando ψ em $\mathcal{D}(0,T)$ em (3.105) obtemos

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t),\mathbf{v})+a(\mathbf{u}(t),\mathbf{v})+b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{v})=\langle\mathbf{f}(t),\mathbf{v}\rangle\quad\text{em}\quad\mathcal{D}'(0,T),\quad\forall\mathbf{v}\in V,$$

que é exatamente (3.69).

Resta mostrarmos que $\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_0$. Para isto, multipliquemos (3.69) por $\forall\psi\in C^1([0,T])$ tal que $\psi(T)=0$, integre em $(0,T)$, integre por partes para obter

$$\begin{aligned}&-\int_0^T(\mathbf{u}(t),\mathbf{v})\psi'(t)\,dt+\int_0^T a(\mathbf{u}(t),\mathbf{v})\psi(t)\,dt+\\ &\int_0^T b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{v})\psi(t)\,dt=(\mathbf{u}(0),\mathbf{v})\psi(0)+\int_0^T\langle\mathbf{f}(t),\mathbf{v}\rangle\,\psi(t)\,dt.\end{aligned} \tag{3.106}$$

Subtraindo (3.105) e (3.106) tem-se

$$(\mathbf{u}(0)-\mathbf{u}_0,\mathbf{v})\psi(0)=0,\quad\forall\mathbf{v}\in V.$$

Logo, para $\psi(0) \neq 0$ temos $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$.[12]

E a prova do Teorema 3.8 está completa. ■

Unicidade para o caso bidimensional

Só temos unicidade da solução fraca do problema (3.65)-(3.68) quando $n = 2$. De fato,

Teorema 3.9 *Para $n = 2$, o problema* (3.65)-(3.68) *tem uma única solução fraca.*

Demonstração: Sejam $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ duas soluções fracas do problema (3.65)-(3.68) e $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$. Então, por (3.81), $\mathbf{w}$ satisfaz

$$\begin{aligned} \mathbf{w}' - A\mathbf{w} + B\mathbf{u}_1 - B\mathbf{u}_2 &= 0 \quad \text{em} \quad L^2(0,T;V'), \\ \mathbf{w}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle \mathbf{w}'(t), \mathbf{w}(t)\rangle - \langle A\mathbf{w}(t), \mathbf{w}(t)\rangle + \langle B\mathbf{u}_1(t), \mathbf{w}(t)\rangle - \langle B\mathbf{u}_2(t), \mathbf{w}(t)\rangle = 0,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}||\mathbf{w}(t)||_H^2 + 2\nu \left\|\mathbf{w}(t)\right\|_V^2 + 2b(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_1(t), \mathbf{w}(t)) - 2b(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}_2(t), \mathbf{w}(t)) = 0.$$

Por outro lado,

$$b(\mathbf{w}(t), \mathbf{u}_2(t), \mathbf{w}(t)) = b(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), \mathbf{w}(t)) - b(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}_2(t), \mathbf{w}(t)) \ \text{ q.s em } (0,T).$$

Isto implica

$$-b(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}_2(t), \mathbf{w}(t)) = b(\mathbf{w}(t), \mathbf{u}_2(t), \mathbf{w}(t)) - b(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), \mathbf{w}(t)) \ \text{ q.s em } (0,T).$$

Assim,

$$\begin{aligned} &b(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_1(t), \mathbf{w}(t)) - b(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}_2(t), \mathbf{w}(t)) \\ &= b(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t), \mathbf{w}(t)) - b(\mathbf{w}(t), \mathbf{u}_2(t), \mathbf{w}(t)) = -b(\mathbf{w}(t), \mathbf{u}_2(t), \mathbf{w}(t)) \end{aligned}$$

[12] usa-se o Lema fundamental do Cálculo Variacional

Portanto,

$$\frac{d}{dt}||\mathbf{w}(t)||_H^2 + 2\nu\,\|\mathbf{w}(t)\|_V^2 - 2b(\mathbf{w}(t),\mathbf{u}_2(t),\mathbf{w}(t)) = 0.$$

Usando a continuidade de $b(\mathbf{w}(t),\mathbf{u}_2(t),\mathbf{w}(t))$ e a desigualdade de interpolação (3.73) para o caso $n = 2$ obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}||\mathbf{w}(t)||_H^2 + 2\nu\,\|\mathbf{w}(t)\|_V^2 &= 2\,b(\mathbf{w}(t),\mathbf{u}_2(t),\mathbf{w}(t))\\ &\leq C_1\,||\mathbf{u}_2(t)||_V||\mathbf{w}(t)||^2_{(L^4(\Omega))^2}\\ &\leq C_2\,||\mathbf{u}_2(t)||_V||\mathbf{w}(t)||_H||\mathbf{w}(t)||_V.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young $ab \leq \nu\,a^2 + \dfrac{1}{4\nu}\,b^2$ tem-se

$$\frac{d}{dt}||\mathbf{w}(t)||_H^2 + 2\nu\,\|\mathbf{w}(t)\|_V^2 \leq \nu||\mathbf{w}(t)||_V^2 + C_3||\mathbf{u}_2(t)||_V^2||\mathbf{w}(t)||_H^2.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}||\mathbf{w}(t)||_H^2 \leq C_3||\mathbf{u}_2(t)||_V^2||\mathbf{w}(t)||_H^2. \tag{3.107}$$

Mas, $\mathbf{w} \in C([0,T]\ H)$ o que implica que a função $t \to ||\mathbf{w}(t)||_H^2$ é contínua em $[0,T]$. Portanto, pela desigualdade de Gronwall obtemos[13]

$$||\mathbf{w}(t)||_H^2 \leq \exp\Big(C_3||\mathbf{u}_2||^2_{L^2(0,T;V)}\Big)||\mathbf{w}(0)||_H^2.$$

Usando que $\mathbf{w}(0) = 0$ tem-se $||\mathbf{w}||_{L^\infty(0,T;H)} = 0$.

E a prova o Teorema 3.9 está completa. ■

[13]representamos a exponencial e^x por exp(x).

3.3 Um modelo de fluido quase newtoniano

Nesta seção apresentaremos os resultados obtidos por J. P. Lions em [43, Teorema 5.1, p. 209] para o modelo (1.52) da seção 1.2 do capítulo 1. Para melhor compreensão dos resultados primeiro trataremos o problema parabólico fortemente não linear investigado por Lions em [43, Teorema 1.1, p. 156].

Problema parabólico fortemente não linear

Dadas as funções $f : Q \to \mathbb{R}$, $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$, queremos encontrar uma função $u : Q \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_p u = f \quad \text{em} \quad Q, \tag{3.108}$$

$$u = 0 \quad \text{em} \quad S, \tag{3.109}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega \tag{3.110}$$

com $p > 2$ e $\Delta_p u$ o operador p-Laplaciano dado por

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

Formulaçao variacional

Considere $H = L^2(\Omega)$, $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ com norma

$$||v|| = \left(\int_\Omega |\nabla v|^p \, dx\right)^{1/p}$$

e $V' = W^{-1,q}(\Omega)$ o dual de V com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então,

$$V \subset H \cong H' \subset V' \ \text{ imersões densas e contínuas.} \tag{3.111}$$

Para obtermos a formulação variacional do problema (3.108)-(3.110), seja $u \in C^2(\overline{Q})$ a solução clássica do problema (3.108)-(3.110) e $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Multiplicando (3.108) por v, integrando em Ω e integrando por partes temos

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + \int_\Omega |\nabla u(t)|^{p-2}\nabla u(t).\nabla v \, dx = \int_\Omega f(t)\, v \, dx.$$

Considere a forma $a : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por

$$a(w,v) = \int_\Omega |\nabla w|^{p-2} \nabla w . \nabla v \, dx.$$

Observe que $a(w,w) = ||w||_V^p$.

Lema 3.6 *A forma $(w,v) \to a(w,v)$ é contínua em $V \times V$.*

Demonstração: Usando a desigualdade de Hölder tem-se

$$|a(w,v)| \leq \int_\Omega |\nabla w|^{p-1} |\nabla v| \, dx \leq \left(\int_\Omega |\nabla w|^{(p-1)q} \, dx \right)^{1/q} \left(\int_\Omega |\nabla v|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Mas, $p^{-1} + q^{-1} = 1 \Rightarrow p = (p-1)q$ e, logo,

$$\begin{aligned} |a(w,v)| &\leq \int_\Omega |\nabla w|^{p-1} |\nabla v| \, dx \\ &\leq \left(\int_\Omega |\nabla w|^p \, dx \right)^{(p-1)/p} \left(\int_\Omega |\nabla v|^p \, dx \right)^{1/p} \\ &\leq ||w||_V^{p-1} ||v||_V. \end{aligned}$$

E a prova do Lema 3.6 está completa. ■

Assim, temos a seguinte formulação variacional do problema (3.108)-(3.110):

Formulação Variacional 3.5 *Sejam $f \in L^q(0,T;V')$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$. Queremos encontrar $u \in L^\infty(0,T;H) \cap L^p(0,T;V)$ tal que*

$$\frac{d}{dt}(u(t),v) + a(u(t),v) = \langle f(t), v \rangle \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,T), \quad \forall v \in V, \tag{3.112}$$

$$u(0) = u_0. \tag{3.113}$$

com $p > 2$ e $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Definição 3.5 *Para $f \in L^q(0,T;V')$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$, dizemos que $u \in L^\infty(0,T;H) \cap L^p(0,T;V)$ é solução fraca do problema* (3.108)-(3.110) *se u satisfaz* (3.112)-(3.113).

No que segue obteremos uma formulação equivalente do problema (3.108)-(3.110). Para isto, considere $u \in L^p(0,T;V)$ fixa e a aplicação $t \to Au(t)$ definida q.s em $[0,T]$ e dada por

$$\langle Au(t), v \rangle = a(u(t),v), \quad \forall v \in V. \tag{3.114}$$

Pelo Lema 3.6 tem-se

$$|\langle Au(t), v\rangle| = |a(u(t), v)| \leq \|u(t)\|_V^{p-1} \|v\|_V \Rightarrow$$

$$\frac{|\langle Au(t), v\rangle|}{||v||_V} \leq \|u(t)\|_V^{p-1} \Rightarrow \|Au(t)\|_{V'} \leq \|u(t)\|_V^{p-1}.$$

Logo, $Au(t) \in V'$ e

$$\int_0^T \|Au(t)\|_{V'}^q \, dt \leq \int_0^T \|u(t)\|_V^{(p-1)q} = \int_0^T \|u(t)\|_V^p. \tag{3.115}$$

Portanto, $A : L^p(0,T;V) \to L^q(0,T;V')$ e $A \in \mathcal{L}(L^p(0,T;V), L^q(0,T;V'))$.

Definição 3.6 **(i)** *Dizemos que um operador $T : V \to V'$ é hemicontínuo se $\forall u, v, w \in V$, a função $\lambda \to \langle T(u + \lambda v), w\rangle$ é contínua.*

(ii) *Dizemos que um operador $T : V \to V'$ é monótono se $\forall u, v \in V$ tem-se $\langle Tu - Tv, u - v\rangle \geq 0$.*

No que segue, provaremos que o operador $Au(t)$ é contínuo e monótono.

Lema 3.7 *Para $w \in V$, o operador $Aw : V \to V'$ definido em* (3.114) *é contínuo e monótono.*

Demonstração: Seja $w_n \to w$ em V então, pela desigualdade de Hölder temos

$$|\langle Aw_n - Aw, v\rangle| \leq \left(\int_\Omega \left(|\nabla w_n|^{p-2}\nabla w_n - |\nabla w|^{p-2}\nabla w\right)^q dx\right)^{1/q} \left(\int_\Omega |\nabla v|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

Portanto,

$$||Aw_n - Aw||_{V'} \leq \left(\int_\Omega \left(|\nabla w_n|^{p-2}\nabla w_n - |\nabla w|^{p-2}\nabla w\right)^q dx\right)^{1/q}.$$

Agora, considere o operador de Nemytrski[14]

$$\mathcal{F}(w(x)) = \varphi(\nabla w(x)) \quad \text{com} \quad \varphi(s) = |s|^{p-2}\, s, \quad \forall w \in V$$

e o funcional

$$\Phi(w) = \int_\Omega \mathcal{F}(w(x))\, dx.$$

[14]veja seção D.2

Então, pelo Teorema D.4 temos que Φ é contínuo e, logo,

$$||Aw_n - Aw||_{V'} \to 0 \quad \text{quando} \quad ||w_n - w||_V \to 0.$$

Em particular, Aw é hemicontínuo. De fato, sejam $\lambda_n \to \lambda$ e $z_n = w + \lambda_n v$ então $z_n \to z = w + \lambda v$. Então, pela continuidade de Aw tem-se

$$||Az_n - Az||_{V'} \to 0 \quad \text{quando} \quad |\lambda_n - \lambda| \to 0.$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\langle Aw - Av, w - v\rangle \geq \Big(||w||^{p-1} - ||v||^{p-1}\Big)(||w|| - ||v||).$$

Como a função $s \mapsto |s|^{p-1}$ é crescente para $p > 1$ tem-se

$$\langle Aw - Av, w - v\rangle \geq 0. \tag{3.116}$$

E a prova do Lema 3.7 está completa. ■

Os resultados acima motivam a seguinte uma formulação do problema (3.108)-(3.110):

Definição 3.7 *Dadas $f \in L^q(0,T;V')$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$. Diremos que $u \in L^p(0,T;V)$ é solução fraca de* (3.108)-(3.110) se $u' \in L^q(0,T;V')$ e

$$\begin{aligned} u' + Au &= f \quad \text{em} \quad L^q(0,T;V'), \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

com $p > 2$ e $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

No seguinte teorema provaremos a existência e a unicidade da solução fraca do problema (3.108)-(3.110) aplicando o método de *Faedo-Galerkin*.

Teorema 3.10 *Sejam $p > 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $f \in L^q(0,T;V')$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$. O problema* (3.108)-(3.110) tem uma única solução fraca.

Demonstração: Considere $(w_j)_{j=1}^{\infty}$ uma base de V, V_m o espaço gerado por $\{w_1, \ldots, w_m\}$ e o seguinte problema aproximado: para cada $m \in \mathbb{N}$, queremos encontrar uma

solução aproximada $u_m \in V_m$ tal que

$$\begin{aligned} u_m(t) &= \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i, \\ (u_m'(t), w_j) + a(u_m(t), w_j) &= \langle f(t), w_j \rangle, \quad 1 \leq j \leq m, \qquad (3.117) \\ u_m(0) &= u_{0m} \qquad (3.118) \end{aligned}$$

com $u_{0m} \in V_m$ e $u_{0m} \to u_0$ em H.

Não é complicado verificar que (3.117)-(3.118) é equivalente a um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares e que este sistema tem uma solução maximal local definida para algum intervalo $[0, t_m)$, $0 < t_m \leq T$. Portanto, se obtivermos estimativas uniformes desta solução, provaremos que é uma solução global. Também podemos verificar que esta solução é única.

Portanto, multiplicando (3.117) por $g_{jm}(t)$ e somando para $j = 1, \ldots, m$ obtemos

$$(u_m'(t), u_m(t)) + a(u_m(t), u_m(t)) = \langle f(t), u_m(t) \rangle . \qquad (3.119)$$

Assim,

$$\frac{d}{dt} ||u_m(t)||_H^2 + 2 \|u_m(t)\|^p = 2 \langle f(t), u_m(t) \rangle \leq 2 \|f(t)\|_{V'} \|u_m(t)\| . \qquad (3.120)$$

Aplicando a desigualdade de Young tem-se

$$\|f(t)\|_{V'} \|u_m(t)\|_V \leq C(q, \epsilon) \|f(t)\|_{V'}^q + \epsilon \|u_m(t)\|_V^p$$

e (3.120) torna-se

$$\frac{d}{dt} ||u_m(t)||_H^2 + \|u_m(t)\|_V^p \leq C_1 \|f(t)\|_{V'}^q . \qquad (3.121)$$

Integrando (3.121) em $(0, t)$, $0 < t \leq t_m < T$ obtemos

$$\begin{aligned} ||u_m(t)||_H^2 + \int_0^t \|u_m(\tau)\|^p \, d\tau &\leq ||u_{0m}||_H^2 + C_1 \int_0^t \|f(\tau)\|_{V'}^q \, d\tau, \\ &\leq ||u_0||_H^2 + C_1 \int_0^T \|f(\tau)\|_{V'}^q \, d\tau. \qquad (3.122) \end{aligned}$$

Portanto, $||u_m(t)||_H$ é limitada por uma constante que independe de t e m. Logo, $t_m = T$ e

$$\sup_{0 \leq t \leq T} ||u_m(t)||_H^2 \leq C_2(||u_0||_H^2 + ||f||_{L^q(0,T;V')}^q). \qquad (3.123)$$

Agora, integrando (3.121) em $(0,T)$ temos

$$||u_m(T)||_H^2 + \int_0^T \|u_m(t)\|^p \, dt \leq C_2(||u_0||_H^2 + ||f||_{L^q(0,T;V')}^q). \tag{3.124}$$

Além disso, por (3.115) deduzimos

$$\int_0^T \|Au_m(t)\|_{V'}^q \, dt \leq \int_0^T \|u_m(t)\|^p \, dt \leq C_2(||u_0||_H^2 + ||f||_{L^q(0,T;V')}^q). \tag{3.125}$$

Em resumo, $(u_m(T))$, (Au_m) e (u_m) são uniformemente limitadas em $L^2(\Omega)$, $L^q(0,T;V')$ e $L^p(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, respectivamente.

Logo, existem $\xi \in H$, $\chi \in L^q(0,T;V')$, $u \in L^\infty(0,T;H) \cap L^p(0,T;V)$ e uma subsequência $(u_{m'})$ de (u_m) tais que

$$u_{m'} \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H), \tag{3.126}$$

$$u_{m'} \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad L^p(0,T;V), \tag{3.127}$$

$$u_{m'}(T) \rightharpoonup \xi \quad \text{em} \quad H, \tag{3.128}$$

$$Au_{m'} \rightharpoonup \chi \quad \text{em} \quad L^q(0,T;V'). \tag{3.129}$$

Usando as convergências (3.126)-(3.129) passaremos o limite na equação (3.117). Para isto, multiplique (3.117) por $\psi(t) \in C^1([0,T])$ e integre em $[0,T]$ para obter

$$\int_0^T (u_m'(t), w_j)\psi(t)dt + \int_0^T a(u_m(t), w_j)\psi(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j \rangle \, \psi(t)dt. \tag{3.130}$$

Usando a integrando por partes

$$\int_0^T \langle u_m'(t), w_j \rangle \, \psi(t) \, dt = -\int_0^T \langle u_m(t), w_j \rangle \, \psi'(t) \, dt + (u_m(T), w_j)\psi(T) - (u_m(0), w_j)\psi(0).$$

(3.130) torna-se

$$-\int_0^T \langle u_m(t), w_j \rangle \, \psi'(t) \, dt + (u_m(T), w_j)\psi(T) - (u_m(0), w_j)\psi(0) + \int_0^T a(u_m(t), w_j)\psi(t) \, dt = \int_0^T \langle f(t), w_j \rangle \, \psi(t)dt. \tag{3.131}$$

Usando as convergências (3.126)-(3.129) podemos passar o limite em (3.131) e deduzir

$$-\int_0^T \langle u(t), w_j \rangle \, \psi'(t) \, dt + (\xi, w_j)\psi(T) - (u_0, w_j)\psi(0) + + \int_0^T \langle \chi(t), w_j \rangle \, \psi(t) \, dt = \int_0^T \langle f(t), w_j \rangle \, \psi(t)dt. \tag{3.132}$$

Por linearidade e densidade (3.132) vale para toda $v \in V$.

Assim, tomando $\psi \in \mathcal{D}([0,T])$ em (3.132) concluímos

$$-\int_0^T \langle u(t), v\rangle \, \psi'(t)\, dt + \int_0^T \langle \chi(t), v\rangle \, \psi(t)\, dt = \int_0^T \langle f(t), v\rangle \, \psi(t)\, dt.$$

Então,[15]

$$u' + \chi = f \quad \text{em} \quad L^q(0,T;V'). \tag{3.133}$$

Portanto, para quaisquer $\psi \in C^1([0,T])$ e $v \in V$ tem-se

$$\int_0^T \langle u'(t), v\rangle \, \psi(t)\, dt + \int_0^T \langle \chi(t), v\rangle \, \psi(t)\, dt = \int_0^T \langle f(t), v\rangle \, \psi(t)\, dt.$$

Integrando por partes obtemos

$$-\int_0^T \langle u(t), v\rangle \, \psi'(t)\, dt + (u(T), v)\psi(T) - (u(0), v)\psi(0) + \int_0^T \langle \chi(t), v\rangle \, \psi(t)\, dt =$$

$$\int_0^T \langle f(t), v\rangle \, \psi(t)\, dt. \tag{3.134}$$

Subtraindo (3.134) e (3.132) obtemos

$$(u(T) - \xi, v)\psi(T) - (u(0) - u_0, v)\psi(0) = 0, \ \ \forall v \in V.$$

Como $\psi \in C^1([0,T])$ é arbitrária, podemos escolher $\psi(0) = 0$ e $\psi(T) \neq 0$ e obter $\xi = u(T)$. Analogamente, para $\psi(0) \neq 0$ e $\psi(T) = 0$ temos que $u_0 = u(0)$.

Resta provarmos que

$$\chi = Au.$$

Para isto, usaremos o fato de Au ser um operador hemicontínuo e monótono.

Assim, por (3.116) temos

$$X_{m'} = \int_0^T \langle Au_{m'}(t) - Aw(t), u_{m'}(t) - w(t)\rangle \, dt \geq 0, \quad w \in L^p(0,T;V). \tag{3.135}$$

Por outro lado, por (3.119) temos

$$\int_0^T \langle Au_{m'}(t), u_{m'}(t)\rangle \, dt = \int_0^T \langle f(t), u_{m'}(t)\rangle \, dt + \frac{1}{2}||u_{0m'}||_H^2 - \frac{1}{2}||u_{m'}(T)||_H^2$$

[15] seja Lema A.4

e (3.135) torna-se

$$\begin{aligned} 0 \leq X_{m'} &= \int_0^T \langle f(t), u_{m'}(t)\rangle \, dt + \frac{1}{2}||u_{0m'}||_H^2 - \frac{1}{2}||u_{m'}(T)||_H^2 \\ &- \int_0^T \langle Au_{m'}(t), w(t)\rangle \, dt - \int_0^T \langle Av(t), u_{m'}(t) - w(t)\rangle \, dt. \end{aligned} \tag{3.136}$$

Mas, por (3.128) tem-se

$$||u(T)||_H^2 \leq \liminf_{m'\to\infty} ||u_{m'}(T)||_H^2. \tag{3.137}$$

Usando as convergências (3.126)-(3.129) e (3.137) podemos passar o limite em (3.136) e obter

$$\begin{aligned} 0 \leq \limsup_{m'\to\infty} X_{m'} &\leq \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle \, dt + \frac{1}{2}||u_0||_H^2 - \frac{1}{2}||u(T)||_H^2 \\ &- \int_0^T \langle \chi(t), w(t)\rangle \, dt - \int_0^T \langle Av(t), u(t) - w(t)\rangle \, dt. \end{aligned} \tag{3.138}$$

Aplicando $u \in L^p(0,T;V)$ em (3.133) e integrando por partes obtemos

$$\frac{1}{2}||u(T)||_H^2 - \frac{1}{2}||u_0||_H^2 + \int_0^T \langle \chi(t), u(t)\rangle \, dt = \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle \, dt.$$

Logo,

$$\int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle \, dt + \frac{1}{2}||u_0||_H^2 - \frac{1}{2}||u(T)||_H^2 = \int_0^T \langle \chi(t), u(t)\rangle \, dt. \tag{3.139}$$

Substituindo (3.139) em (3.138) tem-se

$$\int_0^T \langle \chi(t) - Av(t), u(t) - w(t)\rangle \, dt \geq 0. \tag{3.140}$$

Para concluírmos usaremos que A é hemicontínuo. De fato, como w é arbitrária em (3.140) podemos tomar $w(t) = u(t) - \lambda h(t)$ com $\lambda > 0$ e $h \in L^p(0,T;V)$ e obter

$$\lambda \int_0^T \langle \chi(t) - A(u(t) - \lambda h(t)), h(t)\rangle \, dt \geq 0,$$

ou seja,

$$\int_0^T \langle \chi(t) - A(u(t) - \lambda h(t)), h(t)\rangle \, dt \geq 0. \tag{3.141}$$

Então, usando que A é hemicontínuo e o Teorema da convergência dominada de Lebesgue obtemos

$$0 \leq \lim_{\lambda\to 0^+} \int_0^T \langle \chi(t) - A(u(t) - \lambda h(t)), h(t)\rangle \, dt = \int_0^T \langle \chi(t) - Au(t), h(t)\rangle \, .$$

Portanto,

$$\int_0^T \langle \chi(t) - Au(t), h(t) \rangle \geq 0, \qquad \forall h \in L^p(0,T;V). \tag{3.142}$$

Tomando $-h$ em (3.142) obtemos

$$\int_0^T \langle \chi(t) - Au(t), h(t) \rangle \, dt \leq 0.$$

Logo,

$$\int_0^T \langle \chi(t) - Au(t), h(t) \rangle = 0, \qquad \forall h \in L^p(0,T;V).$$

Portanto, $\chi = Au$ em $L^q(0,T;V')$.

Para provarmos a unicidade, considere u_1 e u_2 soluções de (3.108)-(3.110) e $w = u_1 - u_2$. Então

$$w' + Au_1 - Au_2 = 0 \quad \text{em} \quad L^q(0,T;V'),$$
$$w(0) = 0.$$

Logo,

$$\langle w'(t), w(t) \rangle + \langle Au_1(t) - Au_2(t), u_1(t) - u_2(t) \rangle = 0$$

o que implica[16]

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w(t)||_H^2 = -\langle Au_1(t) - Au_2(t), u_1(t) - u_2(t) \rangle .$$

Mas, $Au(t)$ é um operador monótono (veja (3.116)) e, logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w(t)||^2 \leq 0.$$

Integrando em $(0,T)$ e usando que $w(0) = 0$ obtemos $||w||^2_{L^\infty(0,T;H)} = 0$ e portanto $w = 0$.

E a prova do Teorema 3.10 está completa. ■

[16] $w \in L^p(0,T;V)$, $w' \in L^q(0,T;V') \Rightarrow \langle w'(t), w(t) \rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w(t)||_H^2$.

Um modelo de fluido quase newtoniano

Dadas as funções $\mathbf{f} : Q \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}_0 : \Omega \to \mathbb{R}^n$, queremos encontrar $\mathbf{u} : Q \to \mathbb{R}^n$ e $p : Q \to \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \mathrm{div}(|\nabla \mathbf{u}|^{p-2}\nabla \mathbf{u}) + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{em} \quad Q, \tag{3.143}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 \quad \text{em} \quad Q, \tag{3.144}$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{em} \quad S, \tag{3.145}$$

$$\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{em} \quad \Omega \tag{3.146}$$

com $\nu > 0$, $\mathrm{div}\,(|\nabla \mathbf{u}|^{p-2}\nabla \mathbf{u}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla \mathbf{u}|^{p-2}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}\right)$ e $|\nabla \mathbf{u}|^2 = \displaystyle\sum_{j,k=1}^{n}\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right|^2$.

Formulação variacional

Considere $V = \{\mathbf{v}\,;\, \mathbf{v} \in (W_0^{1,p}(\Omega))^n,\ \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0\}$ com a norma

$$||\mathbf{v}|| = \left(\int_\Omega |\nabla \mathbf{v}|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

e V' o dual de V com $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Se $v \in H^s(\Omega)$, para $s > 1 + \dfrac{n}{2}$, tem-se

$$D_i v \in H^{s-1}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega) \quad \text{se} \quad \frac{1}{2} - \frac{s-1}{n} < 0.$$

Em particular $D_i v \in L^p(\Omega)$ e valem as seguintes imersões:

$$V_s \subset V \subset H \cong H' \subset V' \subset V_s' \ \text{ imersões densas e contínuas.} \tag{3.147}$$

Para obtermos a formulação variacional do problema (3.143)-(3.146), seja $(\mathbf{u}, p)$ a solução clássica do problema (3.143)-(3.146), tomando o pruduto interno de (3.143) com $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, integrando em Ω, integrando por partes e usando que $\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0$ obtemos

$$\int_\Omega \frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial t}\,\mathbf{v}\,dx + \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}(t)|^{p-2}\nabla \mathbf{u}(t).\nabla \mathbf{v}\,dx + \int_\Omega (\mathbf{u}(t).\nabla)\mathbf{u}(t)\,\mathbf{v}\,dx = \int_\Omega \mathbf{f}(t)\,\mathbf{v}\,dx.$$

Considere as formas $a : V \times V \to \mathbb{R}$ e $b : V \times V \times V \to \mathbb{R}$ dadas por

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \nu \int_\Omega |\nabla \mathbf{w}|^{p-2}\nabla \mathbf{w}.\nabla \mathbf{v}\,dx, \quad b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = \int_\Omega (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{w}\,\mathbf{v}\,dx.$$

Observe que $a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \nu ||\mathbf{w}||_V^p$.

Lema 3.8 **(i)** *A forma* $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \to a(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$ *é contínua em* $V \times V$.

(ii) *A forma* $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \to b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$ *é contínua em* $V \times V \times V$.

Demonstração: A prova da continuidade da forma "a" é similar a demonstração do Lema 3.6. Para provarmos a continuidade da forma "b" usaremos a imersão de Sobolev[17]:

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^r(\Omega)$$

com

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \quad \text{se} \quad p < n \Rightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{n} > 0, , \tag{3.148}$$

$$\forall r < \infty \quad \text{se} \quad p \leq n \Rightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \leq 0. \tag{3.149}$$

Portanto, pela desigualdade de Hölder e

$$\frac{2}{r} + \frac{1}{p} \leq 1 \tag{3.150}$$

obtemos

$$\begin{aligned} |b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v})| &\leq \sum_{i,k=1}^{n} \int_{\Omega} |u_k| \, |D_k w_i| \, |v_i| \, dx \\ &\leq ||\mathbf{u}||_{(L^r(\Omega))^n} \, ||\nabla \mathbf{w}||_{(L^p(\Omega))^n} \, ||\mathbf{v}||_{(L^r(\Omega))^n} \\ &\leq C||\mathbf{u}||_V \, ||\mathbf{w}||_V \, ||\mathbf{v}||_V. \end{aligned}$$

E a prova do Lema 3.8 está completa. ■

Observe que, pela imersão $V_s \subset V$, em particular, as formas "a" e "b" são contínuas em $V_s \times V_s$ e $V_s \times V_s \times V_s$, respectivamente.

Vamos considerar o caso (3.148) (o caso (3.149) é mais simples) e deste modo (3.150) torna-se

$$\frac{2}{r} + \frac{1}{p} \leq 1 = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{p} \leq 1 \Rightarrow p \geq \frac{3n}{n+2}. \tag{3.151}$$

Assim, temos a seguinte formulação variacional do problema (3.143)-(3.146):

[17] veja Lema B.4

Formulação Variacional 3.6 *Sejam* $\boldsymbol{f} \in L^q(0,T;V')$ *e* $\boldsymbol{u}_0 \in H$. *Queremos encontrar* $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^p(0,T;V)$ *tal que*

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}) + a(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}\rangle \quad em \quad \mathcal{D}'(0,T), \ \ \forall \boldsymbol{v} \in V, \tag{3.152}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0. \tag{3.153}$$

com $p \geq \dfrac{3n}{n+2}$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Definição 3.8 *Para* $\boldsymbol{f} \in L^q(0,T;V')$ *e* $\boldsymbol{u}_0 \in H$, *dizemos que* $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^p(0,T;V)$ *é solução fraca do problema* (3.143)-(3.146) *se* $\boldsymbol{u}$ *satisfaz* (3.152)-(3.153).

No que segue obteremos uma formulação equivalente do problema (3.143)-(3.146). Para isto, considere $\mathbf{u} \in L^2(0,T;V)$ fixa e as aplicações $t \longmapsto A\mathbf{u}(t)$ e $t \longmapsto B(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t))$ defindas q.s. em $[0,T]$ e dadas por

$$\langle A(\mathbf{u}(t),\mathbf{v}\rangle = a(\mathbf{u}(t),\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V, \tag{3.154}$$

$$\langle B(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t)),\mathbf{v}\rangle = b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V. \tag{3.155}$$

Usaremos a notação $B\mathbf{u}(t)$ para $B(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t))$.

Pelo Lema 3.8**(i)** tem-se

$$|\,\langle A\mathbf{u}(t),\mathbf{v}\rangle\,| = |a(\mathbf{u}(t),\mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}(t)\|_V^{p-1}\,\|\mathbf{v}\|_V \Rightarrow$$

$$\frac{|\,\langle A\mathbf{u}(t),\mathbf{v}\rangle\,|}{||\mathbf{v}||_V} \leq \|\mathbf{u}(t)\|_V^{p-1} \Rightarrow \|A\mathbf{u}(t)\|_{V'} \leq \|\mathbf{u}(t)\|_V^{p-1}.$$

Logo, $A\mathbf{u}(t) \in V'$ e

$$\int_0^T \|A\mathbf{u}(t)\|_{V'}^q\,dt \leq \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_V^{(p-1)q}\,dt = \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_V^p\,dt. \tag{3.156}$$

Portanto, $A : L^p(0,T;V) \to L^q(0,T;V')$ e $A \in \mathcal{L}(L^p(0,T;V), L^q(0,T;V'))$.

Por outro lado, novamente pelo Lema 3.8**(ii)** tem-se

$$|\,\langle B\mathbf{u}(t),\mathbf{v}\rangle\,| = |b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{v})| \leq C||\mathbf{u}(t)||_V^2\,||\mathbf{v}||_V \Rightarrow$$

$$\frac{|\,\langle B\mathbf{u}(t),\mathbf{v}\rangle\,|}{||\mathbf{v}||_V} \leq C||\mathbf{u}(t)||_V^2 \Rightarrow ||B\mathbf{u}(t)||_{V'} \leq C||\mathbf{u}(t)||_V^2.$$

Logo, $B\mathbf{u}(t) \in V'$ e

$$\int_0^T \|B\mathbf{u}(t)\|_{V'}^{p/2}\,dt \leq \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_V^p\,dt. \tag{3.157}$$

Lema 3.9 *Para $\boldsymbol{w} \in V$, o operador $A\boldsymbol{w} : V \to V'$ definido em* (3.154) *é contínuo e monótono.*

Demonstração: A prova é similar a demonstração dada no Lema 3.7. ■

Os resultados acima motivam a seguinte uma formulação equivalente do problema (3.143)-(3.146):

Definição 3.9 *Dadas $\boldsymbol{f} \in L^q(0,T;V')$ e $\boldsymbol{u}_0 \in H$. Diremos que $\boldsymbol{u} \in L^p(0,T;V)$ é solução fraca de* (3.152)-(3.153) *se $\boldsymbol{u}' \in L^r(0,T;V')$ e*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}' + A\boldsymbol{u} + B\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{f} \quad em \quad L^r(0,T;V'), \\ \boldsymbol{u}(0) &= \boldsymbol{u}_0 \end{aligned}$$

com $r = \dfrac{p}{2}$ se $2 < p \leq 3$ e $r = q$ se $p > 3$ para $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Observe que, $\mathbf{u} \in L^r(0,T;V')$, $\mathbf{u}' \in L^r(0,T;V')$ implica $\mathbf{u} \in C([0,T];V')$ e (3.153) faz sentido.

No seguinte teorema provaremos a existência de solução fraca do problema (3.143)-(3.146) aplicando o método de *Faedo-Galerkin* com uma base especial. Para isto, vamos considerar o seguinte resultado:

Lema 3.10 ([43], Corolário 6.1, p. 74) *O problema espectral*

$$((\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}))_s = \lambda(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in V_s$$

têm soluções não nula $\boldsymbol{w}_j$ correspondentes aos autovalores λ_j:

$$((\boldsymbol{w}_j,\boldsymbol{v}))_s = \lambda_j(\boldsymbol{w}_j,\boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in V_s$$

com $((\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}))_s = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (w_i, v_i)_{H^s(\Omega)}$.

Teorema 3.11 *Se $\boldsymbol{f} \in L^q(0,T;V')$, $\boldsymbol{u}_0 \in H$ e*

$$p \geq 1 + \frac{2n}{n+2}. \tag{3.158}$$

então o problema (3.143)-(3.146) tem uma solução fraca.

Demonstração: Vamos aplicar o método de Faedo-Galerkin com a base $(\mathbf{w}_j)_{j=1}^{\infty}$ dada no Lema 3.10. Seja V_m o espaço gerado por $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ e o seguinte problema aproximado: para cada $m \in \mathbb{N}$, queremos encontrar $\mathbf{u}_m \in V_m$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m(t) &= \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\mathbf{w}_i, \\ (\mathbf{u}_m'(t), \mathbf{w}_j) + a(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j) &+ b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j \rangle, \quad 1 \leq j \leq m, \quad (3.159) \\ \mathbf{u}_m(0) &= \mathbf{u}_{0m} \quad (3.160) \end{aligned}$$

com $\mathbf{u}_{0m} \in V_m$ e $\mathbf{u}_{0m} \to \mathbf{u}_0$ em H.

Para cada m fixo, não é complicado verificar que (3.159)-(3.160) é equivalente à um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares e este sistema tem uma solução maximal local definida para algum intervalo $[0, t_m)$, $0 < t_m \leq T$. Também podemos mostrar que a solução é única. Além disso, se obtivermos estimativas uniformes desta solução, provaremos que é uma solução global. Para isto, multiplique (3.159) por $g_{jm}(t)$ e some para $j = 1, \ldots, m$ para obter

$$(\mathbf{u}_m'(t), \mathbf{u}_m(t)) + a(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)) + b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{u}_m(t) \rangle . \quad (3.161)$$

Usando que $b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)) = 0$ em V (em particular em V_s) tem-se

$$\frac{d}{dt}||\mathbf{u}_m(t)||_H^2 + 2\,\|\mathbf{u}_m(t)\|_V^p = 2\,\langle \mathbf{f}(t), \mathbf{u}_m(t) \rangle \leq 2\,\|\mathbf{f}(t)\|_{V'}\,\|\mathbf{u}_m(t)\|_V . \quad (3.162)$$

Aplicando a desigualdade de Young tem-se

$$\|\mathbf{f}(t)\|_{V'}\,\|\mathbf{u}_m(t)\|_V \leq C(q, \epsilon)\,\|\mathbf{f}(t)\|_{V'}^q + \epsilon\,\|\mathbf{u}_m(t)\|_V^p$$

e (3.162) torna-se

$$\frac{d}{dt}||\mathbf{u}_m(t)||_H^2 + \|\mathbf{u}_m(t)\|_V^p \leq C_1\,\|\mathbf{f}(t)\|_{V'}^q . \quad (3.163)$$

Integrando (3.163) em $(0, t)$, $0 < t \leq t_m \leq T$ obtemos

$$\begin{aligned} ||\mathbf{u}_m(t)||_H^2 + \int_0^t \|\mathbf{u}_m(\tau)\|_V^p\, d\tau &\leq ||\mathbf{u}_{0m}||_H^2 + C_1 \int_0^t \|\mathbf{f}(\tau)\|_{V'}^q\, d\tau, \\ &\leq ||\mathbf{u}_0||_H^2 + C_1 \int_0^T \|\mathbf{f}(\tau)\|_{V'}^q\, d\tau. \quad (3.164) \end{aligned}$$

Portanto, $||\mathbf{u}_m(t)||_H$ é limitada por uma constante que independe de t e m. Logo $t_m = T$ e

$$\sup_{0 \leq t \leq T} ||\mathbf{u}_m(t)||_H^2 \leq C_2(||\mathbf{u}_0||_H^2 + ||\mathbf{f}||_{L^q(0,T;V')}^q). \quad (3.165)$$

Integrando (3.163) em $(0,T)$ temos

$$||\mathbf{u}_m(T)||_H^2 + \int_0^T \|\mathbf{u}_m(t)\|_V^p \, dt \leq C_2(||\mathbf{u}_0||_H^2 + ||\mathbf{f}||_{L^q(0,T;V')}^q). \tag{3.166}$$

Além disso, por (3.156) deduzimos

$$\int_0^T \|A\mathbf{u}_m(t)\|_{V'}^q \, dt \leq \int_0^T \|\mathbf{u}_m(t)\|_V^p \, dt \leq C_2(||\mathbf{u}_0||_H^2 + ||\mathbf{f}||_{L^q(0,T;V')}^q). \tag{3.167}$$

Em resumo,

$$\begin{array}{rll} \mathbf{u}_m & \text{é limitada em} & L^p(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \\ A\mathbf{u}_m & \text{é limitada em} & L^q(0,T;V'). \end{array} \tag{3.168}$$

Neste ponto destacamos que, pela escolha da base $(\mathbf{w}_j)_{j=1}^\infty$ tem-se $D_i\mathbf{w}_j \in (L^\infty(\Omega))^n$, o que implica

$$\begin{aligned} |b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j)| &= |-b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j, \mathbf{u}_m(t))| \\ &\leq \sum_{i,k=1}^n \int_\Omega |u_{mk}(t) D_k w_{ji} u_{mi}(t)| \, dx \\ &\leq C||\mathbf{u}_m(t)||_H^2 \, \|\nabla \mathbf{w}_j\|_{(L^\infty(\Omega))^n} \\ &\leq C||\mathbf{u}_m(t)||_H^2 \, \|\mathbf{w}_j\|_{V_s} \end{aligned} \tag{3.169}$$

Seja $\langle\langle \ , \ \rangle\rangle$ o par de dualidade entre V_s e V_s', definindo

$$\langle\langle \beta_m(t), \mathbf{v} \rangle\rangle = b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V_s$$

e usando (3.169) obtemos

$$|\, \langle\langle \beta_m(t), \mathbf{w}_j \rangle\rangle \,| = |b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w})| \leq C||\mathbf{u}_m(t)||_H^2 ||\mathbf{w}_j||_{V_s}.$$

Logo,

$$\frac{|\, \langle\langle \beta_m(t), \mathbf{w}_j \rangle\rangle \,|}{||\mathbf{w}_j||_{V_s}} \leq C||\mathbf{u}_m(t)||_H^2 \Rightarrow ||\beta_m(t)||_{V_s'} \leq C||\mathbf{u}_m(t)||_H^2$$

o que implica $\beta_m \in L^\infty(0,T;V_s')$ tal que

$$||\beta_m||_{L^\infty(0,T;H)} \leq C||\mathbf{u}_m||_{L^\infty(0,T;H)}^2. \tag{3.170}$$

Seja $P_m : H \to V_m$ o operador projeção ortogonal. P_m é uniformemente limitado em $\mathcal{L}(H,H)$, $\mathcal{L}(V_s,V_s)$ e $\mathcal{L}(V_s',V_s')$[18]. Assim, por (3.159) deduzimos que

$$\mathbf{u}_m' + \nu P_m A\mathbf{u}_m + P_m\beta_m = P_m\mathbf{f}. \tag{3.171}$$

[18]consulte [43, p. 211]

Mas, pela estimativa (3.167), $A\mathbf{u}_m$ é uniformemente limitado em $L^q(0,T;V')$, em particular, em $L^q(0,T;V_s')$, e portanto $P_mA\mathbf{u}_m$ é uniformemente limitado em $L^q(0,T;V_s')$.

Pela estimativa (3.170), β_m é uniformemente limitado em $L^\infty(0,T;V_s')$, e logo, $P_m\beta_m$ é limitado em $L^\infty(0,T;V_s')$. Além disso, $P_m\mathbf{f}$ é limitado em $L^q(0,T;V_s')$. Estes resultados combinados com (3.171) implicam que

$$\mathbf{u}_m' \text{ é uniformemente limitada em } L^q(0,T;V_s'). \tag{3.172}$$

Usando as estimativas (3.168) e (3.172) e lembrando que a imersão $V \subset H$ é compacta podemos aplicar o Teorema B.4 com $B_0 = V$, $B = H$, $B_1 = V_s'$, $p_0 = p$ e $p_1 = q$ e concluir que existem $\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^p(0,T;V)$, $\chi \in L^q(0,T;V')$ e uma subsequência $(\mathbf{u}_{m'})$ de $(\mathbf{u}_m)$ tais que

$$\mathbf{u}_{m'} \overset{*}{\rightharpoonup} \mathbf{u} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H), \tag{3.173}$$

$$\mathbf{u}_{m'} \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{em} \quad L^p(0,T;V), \tag{3.174}$$

$$A\mathbf{u}_{m'} \rightharpoonup \chi \quad \text{em} \quad L^q(0,T;V'), \tag{3.175}$$

$$\mathbf{u}_{m'}' \rightharpoonup \mathbf{u}' \quad \text{em} \quad L^q(0,T;V_s'), \tag{3.176}$$

$$\mathbf{u}_{m'} \to \mathbf{u} \quad \text{em} \quad L^p(0,T;H). \tag{3.177}$$

Agora, usando as convergências (3.173)-(3.177) podemos passar o limite em (3.159)-(3.160). Para j fixo e $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$, observe que

$$\begin{aligned}\int_0^T b(\mathbf{u}_{m'}(t),\mathbf{u}_{m'}(t),\mathbf{w}_j)\psi(t)\,dt &= -\int_0^T b(\mathbf{u}_{m'}(t),\mathbf{w}_j,\mathbf{u}_{m'}(t))\psi(t)\,dt \\ &= \sum_{i,k=1}^n \int_Q u_{m'k}\, D_k w_{ji} u_{m'i}\,\psi(t)\,dx\,dt\end{aligned}$$

com $\nabla\mathbf{w} \in (L^\infty(\Omega))^n$.

Mas, por (3.177) temos $\mathbf{u}_{m'}\,\mathbf{u}_{m'} \to \mathbf{u}\,\mathbf{u}$ em $L^{p/2}(0,T;L^1(Q)) \subset (L^1(Q))^n$, pois $p > 2$. Portanto,

$$b(\mathbf{u}_{m'},\mathbf{u}_{m'},\mathbf{w}_j) \to b(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{w}_j) \text{ em } \mathcal{D}(0,T).$$

Assim, passando o limite em (3.159)-(3.160) obtemos

$$(\mathbf{u}'(t),\mathbf{w}_j) + \langle\chi,\mathbf{w}_j\rangle + b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{w}_j) = \langle\mathbf{f}(t),\mathbf{w}_j\rangle\,, \quad \forall j,$$

o que implica, por linearidade e densidade,

$$\langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{v}\rangle + \langle \chi, \mathbf{v}\rangle + b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v}\rangle\,, \quad \forall \mathbf{v} \in V_s. \tag{3.178}$$

Além disso, pelo Lema 3.8 **(ii)** temos que $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ é contínua em $V \times V \times V$ se $p \geq \dfrac{3n}{n+2}$, mas pela hipótese (3.158) esta condição é satisfeita e, logo, por prolongamento contínuo concluímos que (3.178) vale $\forall \mathbf{v} \in V$.

Resta provarmos que

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \tag{3.179}$$

$$A\mathbf{u} = \chi. \tag{3.180}$$

Observe que, por (3.147) e (3.174), (3.176) temos, em particular, $\mathbf{u}_{m'}, \mathbf{u} \in C([0,T]; V_s')$ e $\mathbf{u}_{m'}(0) \to \mathbf{u}(0)$ em V_s'. Por (3.177) deduzimos (3.179).

Para provarmos (3.180) precisamos do seguinte resultado:

Lema 3.11 *Se* (3.158) *é satsifeita e* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in L^p(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ *então a função* $t \to b(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t))$ *pertence a* $L^1(0,T)$.

Demonstração: Usando a imersão de Sobolev $W^{1,p}(\Omega) \subset L^r(\Omega)$ com $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n} > 0$ temos que

$$L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^p(0,T;L^r(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Usando a desiguladade de interpolação (A.9) com $j = m = 0$, $p = \rho$, $r = \infty$ e $q = p$ e depois $j = m = 0$, $p = \sigma$, $r = 2$ e $q = r$ obtemos

$$L^p(0,T;L^r(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^\rho(0,T;L^\sigma(\Omega))$$

com $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1-\alpha}{p}$, $\dfrac{1}{\sigma} = \dfrac{1-\alpha}{r} + \dfrac{\alpha}{2}\cdot$ Escolhendo $\rho = \sigma$ tem-se $\alpha = 2/(n+2)$ e, portanto,

$$L^p(0,T;L^r(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^\rho(Q)$$

com $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{n}{p(n+2)}$.

Logo, $u_k\, D_k u_i\, v_i \in L^1(Q)$ se $\dfrac{2}{\rho} + \dfrac{1}{p} \leq 1$. Mas, por (3.158) esta desigualdade é satisfeita.

E a prova do Lema 3.11 está completa. ■

No que segue, provaremos a seguinte desigualdade:

Lema 3.12

$$\frac{1}{2}||\boldsymbol{u}(\tau)||_H^2 + \int_0^\tau \langle \chi(t), \boldsymbol{u}(t)\rangle \, dt \geq \int_0^\tau \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(t)\rangle \, dt + \frac{1}{2}||\boldsymbol{u}_0||_H^2 \quad q.s. \tag{3.181}$$

Demonstração: Sejam $\tau_0, \tau \in (0,T)$, $\tau_0 < \tau$ e a função $\theta_k(t)$ contínua por partes em $[0,T]$ dada por

$$\theta_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \tau_0 + \dfrac{2}{k} < t < \tau - \dfrac{2}{k}, \\ 0 & \text{se} \quad t > \tau - \dfrac{1}{k} \ \text{ ou } \ t < \tau_0 + \dfrac{1}{k}. \end{cases}$$

Seja ρ_ϵ uma regularização em $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $\rho_\epsilon(t) = \rho_\epsilon(-t)$, ρ_ϵ suporte em $\left[-\dfrac{1}{\epsilon}, \dfrac{1}{\epsilon}\right]$ e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\epsilon(t)\, dt = 1.$$

Para $\epsilon > 2k$, considere

$$\mathbf{w}(t) = ((\theta_k \mathbf{u}(t)) * \rho_\epsilon * \rho_\epsilon)\theta_k(t). \tag{3.182}$$

Tomando $\mathbf{v} = \mathbf{w}(t)$ em (3.178) com $\mathbf{w}(t)$ dada em (3.182) e integrando, obtemos

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{w}(t)\rangle \, dt + \int_0^T \langle \chi(t), \mathbf{w}(t)\rangle \, dt + \int_0^T b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{w}(t)\, dt =$$

$$\int_0^T \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{w}(t)\rangle \, dt. \tag{3.183}$$

Observe que:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{w}(t)\rangle \, dt = \int_0^T \langle \theta_k \mathbf{u}'(t), (\theta_k \mathbf{u}(t)) * \rho_\epsilon * \rho_\epsilon\rangle \, dt \\ &= \int_0^T \langle (\theta_k \mathbf{u}(t))' * \rho_\epsilon, (\theta_k \mathbf{u}(t)) * \rho_\epsilon\rangle \, dt - \int_0^T \langle \theta_k' \mathbf{u}(t), (\theta_k \mathbf{u}(t)) * \rho_\epsilon * \rho_\epsilon\rangle \, dt \\ &= -\int_0^T \langle \theta_k' \mathbf{u}(t), (\theta_k \mathbf{u}(t)) * \rho_\epsilon * \rho_\epsilon\rangle \, dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{w}(t)\rangle \, dt \overset{\epsilon \to \infty}{\to} -\int_0^T \theta_k \theta_k' ||\mathbf{u}(t)||_H^2 \, dt.$$

Por outro lado, pelo Lema 3.11 temos que

$$\int_0^T b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{w}(t))\,dt \overset{\epsilon\to\infty}{\to} \int_0^T \theta_k^2\, b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t))\,dt = 0,$$

pois $b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t)) = 0, \quad \forall \mathbf{u}(t) \in V$.

Fazendo $\epsilon \to +\infty$ em (3.183) obtemos

$$-\int_0^T \theta_k\theta_k' ||\mathbf{u}(t)||_H^2\,dt + \int_0^T \theta_k^2 \left\langle \chi(t),\mathbf{u}(t)\right\rangle\,dt = \int_0^T \theta_k^2 \left\langle \mathbf{f}(t),\mathbf{u}(t)\right\rangle\,dt. \tag{3.184}$$

Observe que:

$$-\int_0^T \theta_k\theta_k' ||\mathbf{u}(t)||_H^2\,dt \overset{k\to\infty}{\to} \frac{1}{2}||\mathbf{u}(\tau)||_H^2 - \frac{1}{2}||\mathbf{u}(\tau_0)||_H^2, \quad \forall \tau,\tau_0.$$

Fazendo $k \to +\infty$ em (3.184) obtemos

$$\frac{1}{2}||\mathbf{u}(\tau)||_H^2 + \int_{\tau_0}^{\tau} \left\langle \chi(t),\mathbf{u}(t)\right\rangle\,dt = \frac{1}{2}||\mathbf{u}(\tau_0)||_H^2 + \int_{\tau_0}^{\tau} \left\langle \mathbf{f}(t),\mathbf{u}(t)\right\rangle\,dt, \quad \forall \tau,\tau_0. \tag{3.185}$$

Como $\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;H)$ existe uma sequência $\tau_{0\epsilon} \to 0$ tal que $\mathbf{u}_{\tau_{0\epsilon}} \rightharpoonup \xi_0$ em H. Como $\mathbf{u}(\tau) \to \mathbf{u}_0$ em V_1' temos que $\xi_0 = \mathbf{u}_0$ e

$$\mathbf{u}_{\tau_{0\epsilon}} \rightharpoonup \mathbf{u}_0 \quad \text{em} \quad H. \tag{3.186}$$

Então, para τ fixo (que satisfaz (3.185)), tomando $\tau_0 = \tau_{0\epsilon}$, usando $||\mathbf{u}_0||_H^2 \leq \liminf_{\epsilon\to\infty} ||\mathbf{u}_{\tau_{0\epsilon}}||_H^2$ e passando o limite em (3.185), quando $\epsilon \to \infty$ obtemos (3.181).

E a prova do Lema 3.12 está completa. ■

Finalmente provaremos que $\chi = A\mathbf{u}$. Para isto, usaremos a monotonicidade e hemicontinuidade do operador A.

Considere

$$X_{m'}^{\tau} = \int_0^{\tau} \left\langle A\mathbf{u}_{m'}(t) - A\mathbf{w}(t), \mathbf{u}_{m'}(t) - \mathbf{w}(t)\right\rangle\,dt + \frac{1}{2}||\mathbf{u}_{m'}(\tau)||_H^2$$

$\forall \mathbf{w} \in L^p(0,T;V)$ com τ é escolhido tal que (3.181) vale.

Pelas estimativas (3.174)-(3.176) existe uma subseqüência tal que

$$\mathbf{u}_{m'}(\tau) \rightharpoonup \mathbf{u}(\tau) \quad \text{em} \quad H.$$

Logo,

$$||\mathbf{u}(\tau)||_H^2 \leq \liminf_{m'\to\infty} ||\mathbf{u}_{m'}(\tau)||_H^2.$$

Portanto,

$$\liminf_{m'\to\infty} X^{\tau}_{m'} = \liminf_{m'\to\infty} \left(\int_0^{\tau} \langle A\mathbf{u}_{m'}(t) - A\mathbf{w}(t), \mathbf{u}_{m'}(t) - \mathbf{w}(t) \rangle \, dt \right) +$$

$$\frac{1}{2} \liminf_{m'\to\infty} ||\mathbf{u}_{m'}(\tau)||^2_H.$$

Como $A\mathbf{u}(t)$ é monótono tem-se

$$\int_0^{\tau} \langle A\mathbf{u}_{m'}(t) - A\mathbf{w}(t), \mathbf{u}_{m'}(t) - \mathbf{w}(t) \rangle \, dt \geq 0$$

o que implica

$$\liminf_{m'\to\infty} X^{\tau}_{m'} \geq \frac{1}{2} ||\mathbf{u}(\tau)||^2_H. \tag{3.187}$$

Fazendo $m = m'$ em (3.161) e integrando $(0, \tau)$ obtemos

$$\frac{1}{2}||\mathbf{u}_{m'}(\tau)||^2_H - \frac{1}{2}||\mathbf{u}_{m'}(0)||^2_H + \int_0^{\tau} \langle A\mathbf{u}_{m'}(t), \mathbf{u}_{m'}(t) \rangle \, dt = \int_0^{\tau} \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{u}_{m'}(t) \rangle \, dt.$$

Reescrevendo na forma

$$\frac{1}{2}||\mathbf{u}_{m'}(\tau)||^2_H + \int_0^{\tau} \langle A\mathbf{u}_{m'}(t) - A\mathbf{w}(t), \mathbf{u}_{m'}(t) - \mathbf{w}(t) \rangle \, dt + \int_0^{\tau} \langle A\mathbf{u}_{m'}(t), \mathbf{w}(t) \rangle \, dt +$$

$$\int_0^{\tau} \langle A\mathbf{w}(t), \mathbf{u}_{m'}(t) \rangle \, dt - \int_0^{\tau} \langle A\mathbf{w}(t), \mathbf{w}(t) \rangle \, dt - \frac{1}{2}||\mathbf{u}_{0m'}||^2_H = \int_0^{\tau} \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{u}_{m'}(t) \rangle \, dt$$

tem-se

$$X^{\tau}_{m'} = \int_0^{\tau} \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{u}(t)_{m'} \rangle \, dt + \frac{1}{2}||\mathbf{u}_{0m'}||^2_H - \int_0^{\tau} \langle A\mathbf{u}_{m'}(t), \mathbf{w}(t) \rangle \, dt -$$

$$\int_0^{\tau} \langle A\mathbf{w}(t), \mathbf{u}(t)_{m'} - \mathbf{w}(t) \rangle \, dt.$$

Passando o limite, concluímos $\lim_{m'\to\infty} X^{\tau}_{m'} \to X^{\tau}$ com

$$X^{\tau} = \int_0^{\tau} \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{u}(t) \rangle \, dt + \frac{1}{2}||\mathbf{u}_0||^2_H - \int_0^{\tau} \langle \chi(t), \mathbf{w}(t) \rangle \, dt - \int_0^{\tau} \langle \chi(t), \mathbf{u}(t) - \mathbf{w}(t) \rangle \, dt.$$

Por (3.187) temos que $X^{\tau} \geq \frac{1}{2}||\mathbf{u}(\tau)||^2_H$ o que implica

$$\int_0^{\tau} \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{u}(t) \rangle \, dt + \frac{1}{2}||\mathbf{u}_0||^2_H - \int_0^{\tau} \langle \chi(t), \mathbf{w}(t) \rangle \, dt -$$

$$\int_0^{\tau} \langle A\mathbf{w}(t), \mathbf{u}(t) - \mathbf{w}(t) \rangle \, dt \geq \frac{1}{2}||\mathbf{u}(\tau)||^2_H. \tag{3.188}$$

Comparando (3.181) e (3.188) deduzimos que

$$\int_0^\tau \langle \chi(t) - A\mathbf{w}(t), \mathbf{u}(t) - \mathbf{w}(t)\rangle \, dt \geq 0 \quad \text{q.s em} \quad (0,\tau).$$

Usando que o operador A é hemicontínuo e procedendo de modo análogo ao caso parabólico, concluímos que $\chi = A\mathbf{u}$.

E a prova do Teorema 3.11 está completa. ■

Observação 3.1 *A unicidade da solução dada no Teorema* 3.11 *é um problema em aberto.*

3.4 Um modelo do tipo Carman-Kozeny

Nesta seção investigaremos um modelo do tipo Carman-Kozeny dado pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} - \xi^2 \Delta\varphi + \mathbf{u}.\nabla\varphi = a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 + \theta & \text{em} \quad Q, \\
\dfrac{\partial}{\partial t}(\theta + \ell\varphi) - k\Delta\theta + \mathbf{u}.\nabla\theta = g & \text{em} \quad Q, \\
\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \nabla p + K(\varphi)\mathbf{u} = \vec{\sigma}\,\theta & \text{em} \quad Q_{ml}, \\
\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 & \text{em} \quad Q_{ml}, \\
\mathbf{u} = 0 & \text{em} \quad \overset{o}{Q}_s, \\
\varphi = 0, \quad \theta = 0 \quad \mathbf{u} = 0 & \text{em} \quad S_{ml}, \\
\varphi(x,0) = \varphi_0(x) \quad \theta(x,0) = \theta_0(x) & \text{em} \quad \Omega, \\
\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x) & \text{em} \quad \Omega_{ml}(0).
\end{array} \tag{3.189}$$

com

$$\begin{aligned}
&Q_s = \{(x,t) \in Q\,;\, \varphi(x,t) = 1\}, \\
&\Omega_s(t) = \{x \in \Omega\,;\, \varphi(x,t) = 1\}, \\
&Q_{ml} = Q \setminus \bar{Q}_s, \;\; \Omega_{ml}(0) = \Omega \setminus \bar{\Omega}_s(0).
\end{aligned}$$

Vamos considerar as seguintes hipóteses:

(H1) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, um domínio aberto e limitado com $\partial\Omega$ de classe C^1;

(H2) $a(x,t)$, $b(x,t)$ funções em $L^\infty(Q)$ conhecidas;

(H3) $H_{loc} = \{\mathbf{v} \in (L^2(\mathcal{K}))^n\,;\, \operatorname{div}\mathbf{v} = 0,\ \gamma_\eta \mathbf{v} = 0\}$; $V_{loc} = \{\mathbf{v} \in (H_0^1(\mathcal{K}))^n\,;\, \operatorname{div}\mathbf{v} = 0\}$ com $\mathcal{K}$ um compacto de Q_{ml} e γ_η o traço normal;

(H4) $K(y) \in C^0(-\infty, 1)$, $K(0) = 0$, $K(y) = 0$ in $\mathbb{R}^-$, $K(y)$ não negativa e $\lim\limits_{y\to 1} K(y) = +\infty$.

Vamos provar o seguinte resultado:

Teorema 3.12 *Suponha que as hipóteses* (H1), (H2), (H3) *são verdadeiras para o caso* $n = 2$. *Se* $g \in L^q(Q)$, $\boldsymbol{u}_0 \in (L^2(\Omega_{ml}(0)))^2$, $(\varphi_0, \theta_0) \in (W_q^{2-2/q}(\Omega))^2$ *com* $2 \le q < 4$, $\varphi_0 = \theta_0 = 0$ *em* $\partial\Omega$. *Então, existe uma solução* $(\varphi, \theta, \boldsymbol{u})$ *do problema* (3.189) *tal que* $\boldsymbol{u} = 0$ *em* $\overset{o}{Q}_s$, $(\varphi, \theta) \in (W_q^{2,1}(Q))^2$ *e* $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T; H_{loc}) \cap L^2(0,T,V_{loc})$.

Na prova da existência da solução do problema (3.189) usaremos uma técnica de regularização como em [10]. O objetivo desta regularização é trabalhar com as equações de Navier-Stokes no domínio Q e não em regiões desconhecidas. Para provarmos a existência da solução deste problema regularizado usaremos o método de Faedo-Galerkin acoplado com teoria do grau de Leray-Schauder.[19] Deste modo, obteremos uma sequência de soluções regularizadas e com a ajuda de estimativas *a priori* e argumentos de compacidade mostraremos que o limite de uma subsequência é solução do problema (3.189).

Na demonstração do Teorema 3.12 precisaremos do seguinte problema auxiliar:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \xi^2\Delta\varphi + \mathbf{u}.\nabla\varphi = a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 + \theta && \text{em} \quad Q,\\
&\frac{\partial}{\partial t}(\theta + \ell\varphi) - k\Delta\theta + \mathbf{u}.\nabla\theta = g && \text{em} \quad Q,\\
&\varphi = 0, \quad \theta = 0 && \text{em} \quad S,\\
&\varphi(x,0) = \varphi_0(x) \quad \theta(x,0) = \theta_0(x) && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned} \tag{3.190}$$

Proposição 3.6 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, *um domínio aberto e limitado com fronteira* $\partial\Omega$ *de classe* C^1. *Suponha que* $(\varphi_0, \theta_0) \in (L^2(\Omega))^2$, $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ *e*

[19] consulte [26]

$g \in L^2(Q)$. Então, existe uma única solução $(\varphi, \theta) \in (X \times W^{2,1}_{5/4}(Q))^2$ do problema (3.190) *tal que*

$$||(\varphi, \theta)||_{(X)^2} + ||\varphi||_{4,Q} \leq C(1 + ||(\varphi_0, \theta_0)||_{(L^2(\Omega))^2} + ||g||_{2,Q}). \tag{3.191}$$

com $X = L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T, H^1_0(\Omega))$ e a constante $C > 0$ que depende apenas de ξ, ℓ, k e Ω.

Para mais regularidade, consideraremos separadamento dos casos $n = 2$ e $n = 3$. Para $n = 3$, $g \in L^2(Q)$ e $(\varphi_0, \theta_0) \in (H^1_0(\Omega))^2$ temos a seguinte estimativa:

$$||\varphi||^{(2)}_{5/4} + ||\theta||^{(2)}_{5/4} \leq C(1 + ||(\varphi_0, \theta_0)||_{(H^1_0(\Omega))^2} + ||g||_{2,Q} + ||\boldsymbol{u}||_{10/3,Q}). \tag{3.192}$$

com $C > 0$ uma constante que depende ξ, ℓ, k, Ω, $||a||_{\infty,Q}$, $||b||_{\infty,Q}$, $||g||_{2,Q}$ e da norma dos dados iniciais.

Para o caso $n = 2$, $g \in L^q(Q)$ e $(\varphi_0, \theta_0) \in (W^m_q(\Omega))^2$ tal que $\varphi_0 = \theta_0 = 0$ em $\partial\Omega$ temos a seguinte estimativa:

$$||\varphi||^{(2)}_{q,Q} + ||\theta||^{(2)}_{q,Q} \leq C(1 + ||\varphi_0||_{m,q,\Omega} + ||\theta_0||_{m,q,\Omega} + ||g||_{q,Q}). \tag{3.193}$$

com $2 \leq q < 4$, $m = 2 - 2/q$ e $C > 0$ uma constante que depende ξ, ℓ, k, Ω, $||a||_{\infty,Q}$, $||b||_{\infty,Q}$, $||g||_{2,Q}$, da norma dos dados iniciais e da norma $||\boldsymbol{u}||_{4,Q}$.

Demonstração: Faremos um esboço da prova. Primeiro, regulariza-se o problema (3.190) substituindo a velocidade $\mathbf{u}$ nas equações de φ e θ. Esta regularização não é usual, pois precisamos uma regularização que preserve a condição de fronteira e a condição de divergente nulo. Para isto, considera-se $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$, $\overline{u}_\varepsilon$ um trucamento em Ω de $\mathbf{u}$ (estendido por zero em Ω) como definido em [46, Appendix A] e define-se ζ_ε by $\overline{u}_\varepsilon * \rho_{\varepsilon/2}$ com ρ_ε a regularização usual em $\mathbb{R}^{n+1}$. Assim, ζ_ε zera em $\partial\Omega$, é regular em x e satisfaz $\operatorname{div} \zeta_\varepsilon = 0$ em $\mathbb{R}^n$. Deste modo, tem-se o seguinte problema regularizado:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial t} - \xi^2 \Delta \varphi_\varepsilon + \zeta_\varepsilon . \nabla \varphi_\varepsilon = a\varphi_\varepsilon + b\varphi_\varepsilon^2 - \varphi_\varepsilon^3 + \theta_\varepsilon && \text{em} \quad Q, \\
&\frac{\partial}{\partial t}(\theta_\varepsilon + \ell\varphi_\varepsilon) - k\Delta\theta_\varepsilon + \zeta_\varepsilon . \nabla \theta_\varepsilon = g && \text{em} \quad Q, \\
&\varphi_\varepsilon = 0, \quad \theta_\varepsilon = 0 && \text{em} \quad S, \\
&\varphi_\varepsilon(x, 0) = \varphi_0(x) \quad \theta_\varepsilon(x, 0) = \theta_0(x) && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned} \tag{3.194}$$

De modo análogo a prova de solução fraca do modelo Allen-Cahn dada na seção 2.1 do capítulo 2, usando-se argumentos de ponto fixo e campacidade prova-se a existência e unicidade da solução do problema regularizado (3.194) em espaços bem regulares.

Em seguida, usa-se a técnica dos multiplicadores para obter a estimativa uniforme dada em (3.191) para o caso $n = 3$ e a seguinte estimativa para o caso $n = 2$,

$$||\varphi_\varepsilon||_{2,Q}^{(2)} \leq C(1 + ||\varphi_0||_{1,2,\Omega} + ||\theta_0||_{2,\Omega} + ||g||_{2,Q}) \tag{3.195}$$

com a constante $C > 0$ dependendo dos dados e da norma $||\mathbf{u}||_{4,Q}$.

Destacamos que, a principal diferença entre os casos $n = 2$ e $n = 3$ é que, para obtermos mais regularidade de φ, ou seja, a estimativa (3.195), precisamos usar a desigualdade de interpolação

$$||\nabla\varphi||_{4,\Omega}^2 \leq C(||\nabla\varphi||_{2,\Omega}\,||\Delta\varphi||_{2,\Omega} + ||\nabla\varphi||_{2,\Omega}) \quad \text{se} \quad n = 2.$$

As estimativas (3.192) e (3.193) são obtidas por argumento de *bootstrapping* e aplicação da teoria L_p das equações parabólicas lineares.

Para finalizar, passa-se o limite no problema regularizado (3.194) e mostra-se a existência, uniciadade e regularidade do problema (3.190).

Naturalmente, os resultados dados em (3.191) e (3.192) valem para $n = 2, 3$. ■

Observação 3.2 *No caso $n = 2$ podemos tratar um modelo mais realístico considerando na equação de θ o termo $\boldsymbol{u}.\nabla(\theta + \ell\varphi)$ no lugar do termo $\boldsymbol{u}.\nabla\theta$. Também neste caso podemos provar os resultados dados na Proposição* 3.6.

Problema regularizado

Vamos regularizar o problema (3.189) mudando o termo $K(\varphi)\mathbf{u}$ na equação da velocidade e a velocidade $\mathbf{u}$ nas equações de φ e θ. A regularização de $\mathbf{u}$ é a mesma descrita da prova da Proposição 3.6.

Provaremos o seguinte resultado de existência e regularidade do seguinte problema regularizado associado:

Teorema 3.13 *Seja $\varepsilon \in (0,1]$ fixo. Suponha que as hipóteses* (H1), (H2) *são verdadeiras. Se $g \in L^2(Q)$, $(\varphi_0, \theta_0) \in (H_0^1(\Omega))^2$, $\boldsymbol{u}_0 \in H$. Então, existe uma solução $(\varphi_\varepsilon, \theta_\varepsilon, \boldsymbol{u}_\varepsilon) \in X_{\varphi,\theta} \times X_{\varphi,\theta} \times X_{\boldsymbol{u}}$ do seguinte problema:*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial t} - \xi^2 \Delta \varphi_\varepsilon + \zeta_\varepsilon.\nabla \varphi_\varepsilon = a\varphi_\varepsilon + b\varphi_\varepsilon^2 - \varphi_\varepsilon^3 + \theta_\varepsilon && \text{em} \quad Q,\\
&\frac{\partial}{\partial t}(\theta_\varepsilon + \ell\varphi_\varepsilon) - k\Delta\theta_\varepsilon + \zeta_\varepsilon.\nabla\theta_\varepsilon = g && \text{em} \quad Q,\\
&\frac{\partial \boldsymbol{u}_\varepsilon}{\partial t} - \nu\Delta \boldsymbol{u}_\varepsilon + (\boldsymbol{u}_\varepsilon.\nabla)\boldsymbol{u}_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon + K(\varphi_\varepsilon - \varepsilon)\boldsymbol{u}_\varepsilon = \vec{\sigma}\theta_\varepsilon && \text{em} \quad Q,\\
&\operatorname{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon = 0 && \text{em} \quad Q,\\
&\varphi_\varepsilon = 0, \quad \theta_\varepsilon = 0, \quad \boldsymbol{u}_\varepsilon = 0 && \text{em} \quad S,\\
&\varphi_\varepsilon(x,0) = \varphi_0(x), \quad \theta_\varepsilon(x,0) = \theta_0(x), \quad \boldsymbol{u}_\varepsilon(x,0) = \boldsymbol{u}_0(x) && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned} \tag{3.196}$$

com $X_{\varphi,\theta} = L^\infty(0,T,L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T,H_0^1(\Omega))$ e $X_{\boldsymbol{u}} = L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$. Além disso, $(\varphi_\varepsilon, \theta_\varepsilon, \boldsymbol{u}_\varepsilon)$ é uniformemente limitada com relação a ε em $(X_{\varphi,\theta} \times W^{2,1}_{5/4}(Q))^2 \times X_{\boldsymbol{u}}$.

Demonstração: Por simplicidade, omitiremos o índice ε na primeira parte da demonstração. Vamos usar o método de Faedo-Galerkin aplicado apenas na equação da velocidade. Para isto, sejam $s = n/2$,

$$V_s \subset V \subset H \cong H' \subset V' \subset V_s' \ \text{ densas e contínuas}$$

e a base espectral $(\mathbf{w}_j)_{j=1}^\infty$ dada no Lema 3.10.

Considere V_m o espaço gerado por $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ e o seguinte problema aproximado: para cada $m \in \mathbb{N}$, queremos encontrar $\mathbf{u}_m \in V_m$ tal que

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_m(t) &= \sum_{i=1}^m g_{im}(t)\mathbf{w}_i,\\
(\mathbf{u}_m'(t), \mathbf{w}_j) + a(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j) &+ b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j) +\\
+(K(\varphi_m(t) - \varepsilon)\mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j) &= (\vec{\sigma}\theta_m(t), \mathbf{w}_j), \ \ 1 \le j \le m,
\end{aligned} \tag{3.197}$$

$$\mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_{0m}, \tag{3.198}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi_m}{\partial t} - \xi^2\Delta\varphi_m + \zeta.\nabla\varphi_m = a\varphi + b\varphi_m^2 - \varphi_m^3 + \theta_m && \text{em} \quad Q,\\
&\frac{\partial}{\partial t}(\theta_m + \ell\varphi_m) - k\Delta\theta_m + \zeta.\nabla\theta = g && \text{em} \quad Q,\\
&\varphi_m = 0, \quad \theta_m = 0 && \text{em} \quad S,\\
&\varphi_m(x,0) = \varphi_0(x) \quad \theta_m(x,0) = \theta_0(x) && \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned} \tag{3.199}$$

com $\mathbf{u}_{0m} \in V_m$ tal que $\mathbf{u}_{0m} \to \mathbf{u}_0$ em H.

Como na prova da Proposição 3.6 temos que o problema (3.199) tem uma única solução $(\varphi_m, \theta_m) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ para $n = 2, 3$ e $(\varphi_0, \theta_0) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$||(\varphi_m, \theta_m)||_{(X)^2} + ||\varphi_m||_{4,Q} \leq C(1 + ||(\varphi_0, \theta_0)||_{(L^2(\Omega))^2} + ||g||_{2,Q}), \tag{3.200}$$

$$||\varphi_m||_{5/4}^{(2)} + ||\theta_m||_{5/4}^{(2)} \leq C(1 + ||(\varphi_0, \theta_0)||_{(H_0^1(\Omega))^2} + ||g||_{2,Q} + ||\zeta||_{10/3,Q}). \tag{3.201}$$

com $X = L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ e a constante $C > 0$ dependendo de ξ, ℓ, k, Ω, $||a||_{\infty,Q}$, $||b||_{\infty,Q}$, $||g||_{2,Q}$ e da norma dos dados iniciais

Portanto, o sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares (3.197)-(3.198) tem uma única solução maximal local u_m definida para algum intervalo $[0, t_m)$, $0 < t_m \leq T$. Obteremos estimativas uniformes da solução u_m e provaremos que é uma solução global. Para isto, multiplique (3.197) por $g_{jm}(t)$ e some para $j = 1, \ldots, m$ para obter

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\mathbf{u}_m(t)||_H^2 + \nu||\nabla \mathbf{u}_m(t)||_{2,\Omega}^2 + \int_\Omega K(\varphi_m(t) - \varepsilon)\mathbf{u}_m^2(t)\, dx \leq \int_\Omega \vec{\sigma}\theta_m(t)\, u_m(t)\, dx.$$

Usando que $K(\varphi_m(t) - \varepsilon) \geq 0$, as desigualdades de Hölder, Poincaré e Young, obtemos

$$\frac{d}{dt}||\mathbf{u}_m(t)||_H^2 + \nu||\nabla \mathbf{u}_m(t)||_{2,\Omega}^2 \leq C_1||\theta_m(t)||_{2,\Omega}^2. \tag{3.202}$$

Integrando (3.202) em $(0, t)$ e usando (3.200) tem-se

$$||\mathbf{u}_m(t)||_H^2 + \nu \int_0^t ||\nabla \mathbf{u}_m(t)||_{2,\Omega}^2 \leq C_2(1 + ||(\varphi_0, \theta_0)||_{(L^2(\Omega))^2}^2 + ||\mathbf{u}_{m0}||_H^2 + ||g||_{2,Q}^2)$$

com C_2 dependendo de ξ, ℓ, ν, T, Ω, $||(\varphi_0, \theta_0)||_{(L^2(\Omega))^2}$ e $||g||_{2,Q}$.

Usando (3.198) concluímos que $t_m = T$ e

$$||\mathbf{u}_m||_{L^\infty(0,T;H)} + ||\mathbf{u}_m||_{L^2(0,T;V)} \leq C(1 + ||(\varphi_0, \theta_0)||_{(L^2(\Omega))^2} + ||\mathbf{u}_0||_H + ||g||_{2,Q}) \tag{3.203}$$

com C independente de m.

Agora, para cada $\mathbf{u}_m \in L^2(0, T; V)$ considere as aplicações $t \longmapsto A\mathbf{u}(t)$, $t \longmapsto$

$B\mathbf{u}_m(t)$ defindas q.s. em $[0,T]$ e dadas por

$$\begin{aligned}
&A\mathbf{u}_m(t) \in V', \quad B(\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m(t)) \in V_s',\\
&\langle A\mathbf{u}_m(t),\mathbf{v}\rangle = a(\mathbf{u}_m(t),\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V,\\
&\langle\langle B(\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m(t)),\mathbf{v}\rangle\rangle = b(\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m(t),\mathbf{v}) + (K(\varphi_m(t)-\varepsilon)\mathbf{u}_m(t),\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V_s.
\end{aligned}$$

com $\langle\langle\ \rangle\rangle$ o par de dualidade entre V_s e V_s'. Usaremos a notação $B\mathbf{u}_m(t)$ para $B(\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m(t))$.

Sabemos que $A\mathbf{u}_m \in L^2(0,T;V')$ (em particular $A\mathbf{u}_m \in L^2(0,T;V_s')$) tal que

$$||A\mathbf{u}_m||_{L^2(0,T;V')} \leq C||\mathbf{u}_m||_{L^2(0,T;V)}$$

e por (3.203) tem-se

$$||A\mathbf{u}_m||_{L^2(0,T;V')} \leq C(1+||(\varphi_0,\theta_0)||_{(L^2(\Omega))^2} + ||\mathbf{u}_0||_H + ||g||_{2,Q}). \tag{3.204}$$

Por outro lado, como $K(y-\varepsilon)$ é limitada tal que $\sup\limits_{y\in\mathbb{R}} K(y-\varepsilon) \leq C(\varepsilon)$ tem-se

$$|\,\langle\langle B\mathbf{u}_m(t),\mathbf{w}_j\rangle\rangle\,| \leq |b(\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m(t),\mathbf{w}_j)| + C(\varepsilon)||\mathbf{u}_m(t)||_H\,||\mathbf{w}_j||_V.$$

Além disso, $\nabla\mathbf{w}_j \in (H^{s-1}(\Omega))^n \subset (L^r(\Omega))^n$ com

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{s}{2} - \frac{1}{n}.$$

Para $s = n/2$ tem-se $1/r = 1/n$ e, logo,

$$|b(\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m(t),\mathbf{w}_j)| = |-b(\mathbf{u}_m(t),\mathbf{w}_j,\mathbf{u}_m(t))| \leq C||\mathbf{u}_m(t)||^2_{(L^p(\Omega))^n}\,||\nabla\mathbf{w}_j||_{(L^n(\Omega))^n}$$

com

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}. \tag{3.205}$$

Portanto,

$$||B\mathbf{u}_m(t)||_{V_s'} \leq C(\varepsilon)(||\mathbf{u}_m(t)||^2_{(L^p(\Omega))^n} + ||\mathbf{u}_m(t)||_H).$$

Mas, $\mathbf{u}_m \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V) \subset L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^n) \cap L^2(0,T;(H_0^1(\Omega))^n)$ e pela desigualdade de interpolação Lema A.9 com $m=1$, $r=2$, $q=2$, $j=0$, $\alpha=1/2$ e $C_2=2$ temos que $\mathbf{u}_m(t) \in (L^p(\Omega))^n$ tal que

$$||\mathbf{u}_m(t)||_{(L^p(\Omega))^n} \leq C(||\nabla\mathbf{u}(t)||^{1/2}_{(L^2(\Omega))^n}\,||\mathbf{u}(t)||^{1/2}_{(L^2(\Omega))^n}.$$

Portanto, $\mathbf{u}_m \in L^4(0,T;(L^p(\Omega))^n)$ e tem-se

$$||\mathbf{u}_m||_{L^4(0,T;(L^p(\Omega))^n)} \leq C||\mathbf{u}_m||^{1/2}_{L^\infty(0,T;H)}\,||\mathbf{u}_m||^{1/2}_{L^2(0,T;V)}.$$

Logo, para $n = 2, 3$ concluirmos que

$$\int_0^T ||B\mathbf{u}_m(t)||^2_{V_s'} \leq C(\varepsilon)(||\mathbf{u}_m||^4_{L^4(0,T;(L^p(\Omega))^n)} + ||\mathbf{u}_m||^2_{L^2(0,T;H)})$$

com p dado em (3.205). Faremos o caso $n = 3$ e, logo, $p = 3$ (pois $n = 2$ é mais simples).

Usando a estimativa (3.203) obtemos

$$||B\mathbf{u}_m||_{L^2(0,T;V_s')} \leq C(\varepsilon)(1 + ||(\varphi_0, \theta_0)||_{(L^2(\Omega))^2} + ||\mathbf{u}_0||_H + ||g||_{2,Q}) \tag{3.206}$$

com $C(\varepsilon)$ independente de m.

Agora, seja $P_m : H \to V_m$ a projeção ortogonal então deduzimos de (3.197)

$$\mathbf{u}_m' = P_m(\vec{\sigma}\theta_m) - \nu P_m(A\mathbf{u}_m) - P_m(B\mathbf{u}_m).$$

Usando que $||P_m||_{\mathcal{L}(V_s,V_s)} \leq 1$ (pela escolha da base $(\mathbf{w}_j)$), $||P_m||_{\mathcal{L}(V_s',V_s')} \leq 1$ e as estimativas (3.200), (3.204), (3.206) obtemos

$$||\mathbf{u}_m'||_{L^2(0,T;V_s')} \leq C(\varepsilon)(1 + ||(\varphi_0, \theta_0)||_{(L^2(\Omega))^2} + ||\mathbf{u}_0||_H + ||g||_{2,Q}) \tag{3.207}$$

com $C(\varepsilon)$ independente de m.

Passagem do limite

Pelas estimativas (3.200) e (3.201) temos que (φ_m, θ_m) é uniformemente limitada com relação a m em $W_1 = \{u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\,;\, u' \in L^{5/4}(Q)\}$. Aplicando o Teorema B.4 com $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 5/4$, $X = H_0^1(\Omega)$, $B = L^2(\Omega)$ e $Y = L^{5/4}(\Omega)$ temos que a imersão $W_1 \subset L^2(Q)$ é compacta.

Por outro lado, pelas estimativas (3.203) e (3.207) temos que u_m é uniformemente limitada com relação a m em $W_2 = \{\mathbf{v} \in L^2(0,T;V)\,;\, \mathbf{v}' \in L^2(0,T;V_s')\}$. Aplicando o Teorema B.4 com $\alpha_0 = \alpha_1 = 2$, $X = V$, $B = H$ e $Y = V_s'$ temos que a imersão $W_2 \subset L^2(0,T;H)$ é compacta.

Portanto, existem $(\varphi,\theta) \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap W^{2,1}_{5/4}(Q)$, $\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ e uma subsequência $(\varphi_l,\theta_l,\mathbf{u}_l)$ de $(\varphi_m,\theta_m,\mathbf{u}_m)$ tais que

$$(\varphi_l,\theta_l) \rightharpoonup (\varphi,\theta) \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{3.208}$$

$$(\varphi_l,\theta_l) \overset{*}{\rightharpoonup} (\varphi,\theta) \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.209}$$

$$(\varphi_l,\theta_l) \to (\varphi,\theta) \quad \text{em} \quad L^2(Q), \quad \text{q.s em } Q, \tag{3.210}$$

$$(\varphi_l',\theta_l') \rightharpoonup (\varphi',\theta') \quad \text{em} \quad L^{5/4}(Q), \tag{3.211}$$

$$(\varphi_l,\theta_l) \rightharpoonup (\varphi,\theta) \quad \text{em} \quad W^{2,1}_{5/4}(Q), \tag{3.212}$$

$$\mathbf{u}_l \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{em} \quad L^2(0,T;V), \tag{3.213}$$

$$\mathbf{u}_l \overset{*}{\rightharpoonup} \mathbf{u} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H), \tag{3.214}$$

$$\mathbf{u}_l \to \mathbf{u} \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H), \quad \text{q.s. em } Q, \tag{3.215}$$

$$\mathbf{u}_l' \rightharpoonup \mathbf{u}' \quad \text{em} \quad L^2(0,T;V_s'). \tag{3.216}$$

Por (3.213) e (3.216) temos $\mathbf{u} \in C([0,T];V_s')$ tal que $\mathbf{u}_l(0) \to \mathbf{u}(0)$ em V_s. Então, $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$.

A convergência dos termos

$$(\mathbf{u}_l'(t),\mathbf{w}_j) \to (\mathbf{u}'(t),\mathbf{w}_j) \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,T),$$

$$a(\mathbf{u}_l(t),\mathbf{w}_j) \to a(\mathbf{u}(t),\mathbf{w}_j) \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,T),$$

$$\int_0^T b(\mathbf{u}_l(t),\mathbf{u}_l(t),\mathbf{w}_j)\psi\,dt \to \int_0^T b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{w}_j)\psi\,dt, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(0,T)$$

são provadas de modo idêntico ao da seção 3.2 do capítulo 3.

Por outro lado, como $K(y-\varepsilon)$ é contínua e $\varphi_l \to \varphi$ q.s. em Q temos que

$$K(\varphi_l-\varepsilon) \to K(\varphi-\varepsilon) \ q.s.$$

Considere $|h_l| = |K(\varphi_l-\varepsilon) - K(\varphi-\varepsilon)|^k$ então $h_l \to 0$ e $|h_l| \le 2^k|K(\varphi-\varepsilon)|^k \le C(\varepsilon)$ com $2 \le k < \infty$. Logo, pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue tem-se $h_l \to 0$ em $L^1(Q)$, ou seja,

$$K(\varphi_l-\varepsilon) \to K(\varphi-\varepsilon) \quad \text{em} \quad L^k(Q), \quad 2 \le k < \infty. \tag{3.217}$$

Portanto, para $\phi \in C_0^\infty(Q)$

$$\int_Q (K(\varphi_l - \varepsilon)\mathbf{u}_m - K(\varphi - \varepsilon)\mathbf{u})\phi \, dx \, dt =$$
$$\int_Q (K(\varphi_l - \varepsilon) - K(\varphi - \varepsilon))\mathbf{u}_m \phi \, dx \, dt + \int_Q (K(\varphi - \varepsilon)(\mathbf{u}_m - \mathbf{u})\phi \, dx \, dt \leq$$
$$||K(\varphi_l - \varepsilon) - K(\varphi - \varepsilon)||_{2,Q} ||\mathbf{u}_m||_{L^2(0,T;H)} ||\phi||_{\infty,Q} +$$
$$||K(\varphi - \varepsilon)||_{2,Q} ||\mathbf{u}_m - \mathbf{u}||_{L^2(0,T;H)} ||\phi||_{\infty,Q}.$$

Usando as convergências (3.215) e (3.217) obtemos

$$K(\varphi_l - \varepsilon)\mathbf{u}_l \to K(\varphi - \varepsilon)\mathbf{u} \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(Q).$$

Assim, podemos passar o limite, quando $l \to \infty$, em (3.197) e obter

$$\langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{w}_j \rangle + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{w}_j) + b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{w}_j) + (K(\varphi(t) - \varepsilon)\mathbf{u}(t), \mathbf{w}_j) = (\vec{\sigma}\theta(t), \mathbf{w}_j), \quad \forall j.$$

Logo, por lineariadde e densidade,

$$\langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{v} \rangle + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + (K(\varphi(t) - \varepsilon)\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = (\vec{\sigma}\theta(t), \mathbf{v})$$

em $\mathcal{D}'(0,T)$, $\forall \mathbf{v} \in V \cap (L^3(\Omega))^3$.

Agora, passaremos o limite nas equações (3.199). Para isto, seja $\psi \in C_0^\infty(Q)$ então

$$\int_Q \Big((a\varphi_l + b\varphi_l^2 - \varphi_l^3) - (a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3) \Big) \psi \, dx \, dt = \int_Q (\varphi_l - \varphi) d_l \, \psi \; dx \, dt$$

com $d_l = a + b(\varphi_l + \varphi) + \varphi^2 + \varphi_l \varphi + \varphi_l^2 \in L^2(Q)$ tal que

$$||d_l||_{2,Q} \leq C(1 + ||\varphi_l||_{2,Q} + ||\varphi||_{2,Q} + ||\varphi||_{4,Q}^2 + ||\varphi_l||_{4,Q} ||\varphi||_{4,Q} + ||\varphi_l||_{4,Q}^2) \leq C.$$

Portanto,

$$\int_Q (\varphi_l - \varphi) d_l \, \psi \; dx \, dt \leq ||\varphi_l - \varphi||_{2,Q} \, ||d_l||_{2,Q} \, ||\psi||_{\infty,Q}.$$

Por (3.210) concluímos

$$a\varphi_l + b\varphi_l^2 - \varphi_l^3 \to a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(Q).$$

Estimativas uniformes

Para obtermos as estimativas uniforme usaremos o índice ε.

Pelas estimativas (3.200) e (3.203) tem-se

$$||(\varphi_\varepsilon, \theta_\varepsilon)||_{(X)^2} + ||\varphi_\varepsilon||_{4,Q} \leq C(1 + ||(\varphi_0, \theta_0)||_{(L^2(\Omega))^2} + ||g||_{2,Q}), \quad (3.218)$$

$$||\mathbf{u}_\varepsilon||_{L^\infty(0,T;H)} + ||\mathbf{u}_\varepsilon||_{L^2(0,T;V)} \leq C(1 + ||(\varphi_0, \theta_0)||_{(L^2(\Omega))^2} + ||\mathbf{u}_0||_H + ||g||_{2,Q}). \quad (3.219)$$

Por outro lado, pela imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$ temos que

$$L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^2(0,T;L^6(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Usando a desigualdade de interpolação (A.9) com $j = m = 0$, $p = \rho$, $r = \infty$ e $q = 2$ e depois $j = m = 0$, $p = \sigma$, $r = 2$ e $q = 6$ obtemos

$$L^2(0,T;L^6(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^\rho(0,T;L^\sigma(\Omega))$$

com $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1-\alpha}{2}$, $\dfrac{1}{\sigma} = \dfrac{1-\alpha}{6} + \dfrac{\alpha}{2}\cdot$ Escolhendo $n = 3$ e $\rho = \sigma$ tem-se $\alpha = 2/5$ e, portanto,

$$L^2(0,T;L^6(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^{10/3}(Q).$$

Logo, $\mathbf{u}_\varepsilon \in L^{10/3}(Q)$ tal que

$$||\mathbf{u}_\varepsilon||_{10/3,Q} \leq C||\mathbf{u}_\varepsilon||_{L^2(0,T;V)}||\mathbf{u}_\varepsilon||_{L^\infty(0,T;H)}.$$

Por (3.203) tem-se

$$||\mathbf{u}_\varepsilon||_{10/3,Q} \leq C(1 + ||(\varphi_0, \theta_0)||_{(L^2(\Omega))^2} + ||\mathbf{u}_0||_H + ||g||_{2,Q})^2. \quad (3.220)$$

Por outro lado, $||\zeta_\varepsilon||_{10/3,Q} \leq C||\mathbf{u}_\varepsilon||_{10/3,Q}$ e por (3.220), obtemos

$$||\zeta_\varepsilon||_{10/3,Q} \leq C(1 + ||(\varphi_0, \theta_0)||_{(L^2(\Omega))^2} + ||\mathbf{u}_0||_H + ||g||_{2,Q})^2$$

e a estimativa (3.201) torna-se

$$||\varphi_\varepsilon||_{5/4}^{(2)} + ||\theta_\varepsilon||_{5/4}^{(2)} \leq C(1 + ||(\varphi_0, \theta_0)||_{(H_0^1(\Omega))^2} + ||\mathbf{u}_0||_H + ||g||_{2,Q}). \quad (3.221)$$

com $C > 0$ uma constante que depende ξ, ℓ, k, Ω, $||a||_{\infty,Q}$, $||b||_{\infty,Q}$, $||g||_{2,Q}$ e da norma dos dados iniciais.

E prova do Teorema 3.13 está completa. ■

Agora, mostraremos que para o caso $n = 2$ a solução dada no Teorema 3.13 é única e mais regular:

Teorema 3.14 *Suponha que* $n = 2$, $2 \leq q < 4$, $g \in L^q(Q)$, $\boldsymbol{u}_0 \in H$, $(\varphi_0, \theta_0) \in (W_q^{2-2/q}(\Omega))^2$ *com* $\varphi_0 = \theta_0 = 0$ *em* $\partial\Omega$. *Então, a solução* $(\varphi_\varepsilon, \theta_\varepsilon, \boldsymbol{u}_\varepsilon)$ *dada no Teorema* 3.13 *é única e uniformemente limitada com relação a* ε *em* $(W_q^{2,1}(Q))^2 \times (L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V))$.

Demonstração: Por simplicidade omitiremos o índice ε.

Multiplicando a equação de φ em (3.196) por $-\Delta\varphi$, integrando em Ω, usando as desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$\frac{d}{dt}||\nabla\varphi(t)||_{2,\Omega}^2 + ||\Delta\varphi(t)||_{2,\Omega}^2 + \int_\Omega \varphi^2(t)|\nabla\varphi(t)|^2 \leq C_1(||\mathbf{u}(t)||_{4,\Omega}^2\, ||\nabla\varphi(t)||_{4,\Omega}^2 + ||\varphi(t)||_{2,\Omega}^2 + ||\varphi(t)||_{4,\Omega}^4 + ||\theta(t)||_{2,\Omega}^2). \tag{3.222}$$

com a constante $C_1 > 0$ dependendo de ξ, $||a||_{\infty,Q}$ e $||b||_{\infty,Q}$.

Usando a desigualdade de interpolação (A.9) com $u = \nabla\varphi$, $n = 2$, $j = 0$, $p = 4$, $m = 1$, $r = 2$, $q = 2$ e $\alpha = 1/2$ tem-se

$$||\nabla\varphi(t)||_{4,\Omega}^2 \leq \widehat{C}||\Delta\varphi(t)||_{2,\Omega}\, ||\nabla\varphi(t)||_{2,\Omega} + \widetilde{C}||\nabla\varphi(t)||_{2,\Omega}^2. \tag{3.223}$$

Substituindo (3.223) em (3.222) e usando novamente a desigualdade de Young tem-se

$$\frac{d}{dt}||\nabla\varphi(t)||_{2,\Omega}^2 + ||\Delta\varphi(t)||_{2,\Omega}^2 + \int_\Omega \varphi^2(t)|\nabla\varphi(t)|^2 \leq C_2(||\mathbf{u}(t)||_{4,\Omega}^4\, ||\nabla\varphi(t)||_{2,\Omega}^2 + ||\varphi(t)||_{2,\Omega}^2 + ||\varphi(t)||_{4,\Omega}^4 + ||\theta(t)||_{2,\Omega}^2).$$

Agora, aplicando a desigualdade de Gronwall (A.6) obtemos

$$||\nabla\varphi(t)||_{2,\Omega}^2 + ||\Delta\varphi||_{2,Q}^2 \leq C_3\, e^{\Upsilon}(||\nabla\varphi_0||_{2,\Omega}^2 + ||\varphi||_{2,Q}^2 + ||\varphi||_{4,Q}^4 + ||\theta||_{2,Q}^2). \tag{3.224}$$

com $\Upsilon = ||\mathbf{u}||_{(L^4(Q))^2}$.

Lembrando que $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e usando novamente a desigualdade de interpolação (A.9) com $u = u_i$, $n = 2$, $j = 0$, $p = 4$, $m = 1$, $r = 2$, $q = 2$, $C_2 = 0$ e $\alpha = 1/2$ tem-se

$$||\mathbf{u}(t)||^2_{(L^4(\Omega))^2} \leq \widehat{C}||\nabla \mathbf{u}(t)||_{(L^2(\Omega))^2} \, ||\mathbf{u}(t)||_{(L^2(\Omega))^2}.$$

Portanto,

$$||\mathbf{u}||_{(L^4(Q))^2} \leq C||\mathbf{u}||_{L^2(0,T;V)} \, ||\mathbf{u}||_{L^\infty(0,T;H)}. \tag{3.225}$$

Agora, usando as estimativas (3.218), (3.219) e (3.225) em (3.224) concluímos que

$$||\nabla\varphi||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + ||\Delta\varphi||_{2,Q} \leq C_4(1 + ||\varphi_0||_{1,2,\Omega} + ||\theta_0||_{2,\Omega} + ||g||_{2,Q}). \tag{3.226}$$

com a constante C_4 dependendo de ξ, $||a||_{\infty,Q}$, $||b||_{\infty,Q}$, $||\varphi_0||_{2,\Omega}$, $||\theta_0||_{2,\Omega}$ e $||\mathbf{u}_0||_H$.

Multiplicando a equação de φ em (3.196) por φ_t, integrando em Ω, usando as desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t)\right\|^2_{2,\Omega} + \frac{d}{dt}||\nabla\varphi(t)||^2_{2,\Omega} + \frac{d}{dt}||\varphi(t)||^4_{4,\Omega} \leq C_5(||\mathbf{u}(t)||^2_{4,\Omega} \, ||\nabla\varphi(t)||^2_{4,\Omega} + ||\varphi(t)||^2_{2,\Omega} +$$
$$||\varphi(t)||^4_{4,\Omega} + ||\theta(t)||^2_{2,\Omega}). \tag{3.227}$$

Substituindo (3.223) em (3.227) e usando novamente a desigualdade de Young tem-se

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t)\right\|^2_{2,\Omega} + \frac{d}{dt}||\nabla\varphi(t)||^2_{2,\Omega} + \frac{d}{dt}||\varphi(t)||^4_{4,\Omega} \leq C_6(||\mathbf{u}(t)||^4_{4,\Omega} \, ||\nabla\varphi(t)||^2_{2,\Omega} + ||\Delta\varphi(t)||^2_{2,\Omega} +$$
$$||\varphi(t)||^2_{2,\Omega} + ||\varphi(t)||^4_{4,\Omega} + ||\theta(t)||^2_{2,\Omega}). \tag{3.228}$$

Integrando (3.228) em $(0, T)$ obtemos

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2_{2,Q} + ||\nabla\varphi(T)||^2_{2,\Omega} + ||\varphi(T)||^4_{4,\Omega} \leq C_7(||\nabla\varphi_0||^2_{2,\Omega} + ||\varphi_0||^4_{4,\Omega} + ||\Delta\varphi||^2_{2,Q} +$$
$$||\mathbf{u}||^4_{4,Q} \, ||\nabla\varphi||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + ||\varphi||^2_{2,Q} + ||\varphi||^4_{4,Q} + ||\theta||^2_{2,Q}). \tag{3.229}$$

Agora, usando as estimativas (3.218), (3.219), (3.225) e (3.226) em (3.229) obtemos

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|_{2,Q} \leq C_8(1 + ||\varphi_0||_{1,2,\Omega} + ||\theta_0||_{2,\Omega} + ||\mathbf{u}_0||_H + ||g||_{2,Q}). \tag{3.230}$$

com a constante C_8 dependendo de ξ, $||a||_{\infty,Q}$, $||b||_{\infty,Q}$, $||\varphi_0||_{2,\Omega}$, $||\theta_0||_{2,\Omega}$ e $||\mathbf{u}_0||_H$.

Combinando as estimativas (3.218), (3.226) e (3.230) deduzimos que

$$||\varphi||_{2,Q}^{(2)} \leq C(1 + ||\varphi_0||_{1,2,\Omega} + ||\theta_0||_{2,\Omega} + ||\mathbf{u}_0||_H + ||g||_{2,Q})$$

e pelo Lema de imersão B.9 tem-se

$$||\varphi||_{k,Q} \leq C||\varphi||_{2,Q}^{(2)} \leq C(1 + ||\varphi_0||_{1,2,\Omega} + ||\theta_0||_{2,\Omega} + ||\mathbf{u}_0||_H + ||g||_{2,Q}) \tag{3.231}$$

com $2 \leq k < \infty$.

Agora, usaremos argumento de *bootstrapping* e a teoria L_p das equações parabólicas lineares (veja apêndice E) para mostrar a regularidade desejada.

Assim, aplicando o Lema E.2 com $n = 2$, $\theta_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\mathbf{u} \in (L^4(Q))^2$ e $\varphi_t + g \in L^2(Q)$ na equação de θ dada em (3.196) deduzimos que $\theta \in W_2^{2,1}(Q)$ e

$$||\theta||_{2,Q}^{(2)} \leq C(||\theta_0||_{1,2,\Omega} + ||\varphi_t||_{2,Q} + ||g||_{2,Q}.) \tag{3.232}$$

Pelo Lema de imersão B.9 e pela estimativa (3.231) tem-se

$$||\theta||_{k,Q} \leq C||\theta||_{2,Q}^{(2)} \leq C(1 + ||\varphi_0||_{1,2,\Omega} + ||\theta_0||_{1,2,\Omega} + ||\mathbf{u}_0||_H + ||g||_{2,Q}). \tag{3.233}$$

com $2 \leq k < \infty$.

Agora, usando o Lema de imersão B.9 e aplicando novamente o Lema E.2 com $n = 2$, $2 < q < 4$, $\varphi_0 \in W_q^{2-2q}(\Omega)$, $\mathbf{u} \in (L^4(Q))^2$ e $a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 + \theta \in L^q(Q)$ na equação de φ dada em (3.196) deduzimos que $\varphi \in W_q^{2,1}(Q)$ e

$$||\varphi||_{q,Q}^{(2)} \leq C^*(+||\varphi_0||_{m,q,\Omega} + ||\varphi||_{q,Q} + ||\varphi||_{2q,Q}^2 + ||\varphi||_{3q,Q}^3 + ||\theta||_{q,Q} + ||g||_{q,Q}.)$$

com $m = 2 - 2/q$ e a constante C^* dependendo, em particular, de $||\mathbf{u}||_{4,Q}$.

Pelas estimativas (3.231) e (3.233) concluímos que

$$||\varphi||_{q,Q}^{(2)} \leq C(1 + ||\varphi_0||_{m,q,\Omega} + ||\theta_0||_{1,2,\Omega} + ||\mathbf{u}_0||_H + ||g||_{q,Q}). \tag{3.234}$$

Aplicando novamente o Lema E.2 com $n = 2$, $2 < q < 4$, $\theta_0 \in W_q^{2-2q}(\Omega)$, $\mathbf{u} \in (L^4(Q))^2$ e $\varphi_t + g \in L^q(Q)$ na equação de θ dada em (3.196) deduzimos que $\theta \in W_q^{2,1}(Q)$ e

$$||\theta||_{q,Q}^{(2)} \leq C(||\theta_0||_{m,q,\Omega} + ||\varphi_t||_{q,Q} + ||g||_{q,Q}) \tag{3.235}$$

e pela estimativa (3.234) concluímos que

$$||\theta||_{q,Q}^{(2)} \leq C(1 + ||\varphi_0||_{m,q,\Omega} + ||\theta_0||_{m,q,\Omega} + ||\mathbf{u}_0||_H + ||g||_{q,Q}). \tag{3.236}$$

com $m = 2 - 2/q$ e $2 \leq q < \infty$.

Para unicidade aplicamos o argumento usual de contradição. Ressaltamos que para o caso bidimensional, a prova da unicidade para a velocidade é análoga à prova das equações de Navier-Stokes clássicas.

E a prova do Teorema 3.14 está completa. ■

Observação 3.3 *Para o modelo mais realístico com* $\boldsymbol{u}.\nabla(\theta + \ell\varphi)$ *no lugar de* $\boldsymbol{u}.\nabla\theta$ *podemos regularizar a solução* (φ, θ) *dada no Teorema* 3.14 *observando que a estimativa* (3.232) *terá um termo a mais dado pela norma de* $\boldsymbol{u}.\nabla\varphi$.

Mas, se $n = 2$ *e* $\varphi \in W_2^{2,1}(Q)$ *temos, pelo Lema* B.7 *e estimativa* (B.10), *que* $\nabla\varphi \in L^4(Q)$ *tal que* $||\nabla\varphi||_{4,Q} \leq C||\varphi||_{2,Q}^{(2)}$. *Logo,* $\boldsymbol{u}.\nabla\varphi \in L^2(Q)$ *tal que* $||\boldsymbol{u}||_{4,Q}\,||\nabla\varphi||_{4,Q} \leq C||\boldsymbol{u}||_{4,Q}\,||\varphi||_{2,Q}^{(2)}$ *e tem-se uma estimativa similar* (3.233) *com o termo a mais* $||\boldsymbol{u}||_{4,Q}$, *e logo, a estimativa* (3.233).

Repetindo o argumento, para $n = 2$ *e* $\varphi \in W_q^{2,1}(Q)$ *com* $2 \leq q < 4$ *temos que* $\nabla\varphi \in L^p(Q)$ *com* $\dfrac{1}{p} \geq \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{4}$, *o que implica* $\nabla\varphi \in L^p(Q)$ *com* $2 \leq p \leq q < 4$ *e tem-se a estimativa* (3.236) *para* p.

Resumindo, se $n = 2$, $g \in L^p(Q)$, $\boldsymbol{u}_0 \in H$, $\varphi_0 \in W_q^{2-2/q}(\Omega)$, $\theta_0 \in W_p^{2-2/p}(\Omega)$ *com* $2 \leq p \leq q < 4$, $\varphi_0 = \theta_0 = 0$ *em* $\partial\Omega$. *Então, a solução* $(\varphi_\varepsilon, \theta_\varepsilon, \boldsymbol{u}_\varepsilon)$ *é uniformemente limitada com relação a* ε *em* $W_q^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q) \times (L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V))$.

Prova do Teorema 3.12

Para provarmos o Teorema 3.12 passaremos o limite no problema regularizado (3.196). Para isto, até aqui, temos as estimativas (3.218), (3.219) e (3.221), uniformes com relação a ε.

Estas estimativas são suficientes para passarmos o limite nas equações de φ_ε e θ_ε em (3.196) de modo similar com na prova da Proposição 3.6.

Porém, estas estimativas não são suficientes para passarmos o limite na equação da velocidade $\mathbf{u}_\varepsilon$ devido aos termos $(\mathbf{u}_\varepsilon.\nabla)\mathbf{u}_\varepsilon$ e $K(\varphi_\varepsilon - \varepsilon)\mathbf{u}_\varepsilon$.

Para passaramos o limite em $(\mathbf{u}_\varepsilon.\nabla)\mathbf{u}_\varepsilon$ precisamos de uma convergência forte do tipo (3.215) e, logo, uma estimativa uniforme da derivada temporal $\mathbf{u}_\varepsilon$. Para obtermos tal estimativa (veja (3.207)) precisamos estimar uniformemente o termo $K(\varphi_\varepsilon - \varepsilon)\mathbf{u}_\varepsilon$.

Por outro lado, para provamos que $\mathbf{u} = 0$ na região sólida, precisamos de uma convergência uniforme da seqüência (φ_ε), pois $\lim_{y\to 1} K(y) = +\infty$. Mas, pelo Lema B.11 tem-se $W^{2,1}_q(Q) \subset H^{\tau,\tau/2}(\overline{Q})$ para $q > 2$ se $n = 2$ e $q > 5/2$ se $n = 3$. Portanto, pelos resultados obtidos, a convergência uniforme da seqüência (φ_ε) só é possível no *caso bidimensional*.

Assim, pelo Teorema 3.14 para $q = 3$, temos que

$$||\varphi_\varepsilon||^{(2)}_{3,Q} + ||\theta_\varepsilon||^{(2)}_{3,Q} \leq C(1 + ||\varphi_0||_{4/3,3,\Omega} + ||\theta_0||_{4/3,3,\Omega} + ||\mathbf{u}_0||_H + ||g||_{3,Q}).$$

E pelo Lema B.11 $(\varphi_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \in (H^{\tau,\tau/2}(\overline{Q}))^2$ tal que

$$|\varphi_\varepsilon|^{(\tau)}_Q + |\theta_\varepsilon|^{(\tau)}_Q \leq C(1 + ||\varphi_0||_{4/3,3,\Omega} + ||\theta_0||_{4/3,3,\Omega} + ||\mathbf{u}_0||_H + ||g||_{3,Q}).$$

com $0 \leq \tau \leq 2/3$. Em particular,

$$\begin{aligned} &\sup_{\overline{Q}} |\varphi_\varepsilon(x,t)| \leq C, \quad \langle \varphi_\varepsilon \rangle^{(\tau/2)}_t \leq C, \\ &\sup_{\overline{Q}} |\theta_\varepsilon(x,t)| \leq C, \quad \langle \theta_\varepsilon \rangle^{(\tau/2)}_t \leq C. \end{aligned}$$

Portanto, (φ_ε) e (θ_ε) são famílias de funções equicontínuas e uniformemente limitada em $\overline{Q}$. Pelo Teorema de Arzela-Ascoli (veja Lema B.12 do Apêndice B) existem subseqüências, que representaremos novamente por (φ_ε) e (θ_ε), tais que

$$\begin{aligned} &\varphi_\varepsilon \to \varphi \quad \text{uniformemente em} \quad \overline{Q}, \\ &\theta_\varepsilon \to \theta \quad \text{uniformemente em} \quad \overline{Q}. \end{aligned} \tag{3.237}$$

Agora, provaremos que $\mathbf{u} = 0$ em $\overset{o}{Q}_s$. Para isto, seja $\mathcal{K}$ um subconjunto compacto de Q_s. Como (φ_ε) converge uniformemente em $\overline{Q}$ concluímos que, dado $0 < \delta < 1$, existe $\varepsilon_0 = \varepsilon(\mathcal{K})$ tal que

$$|\varphi_\varepsilon(x,t)) - 1| < \delta \quad \text{em} \quad \mathcal{K} \quad \text{para} \quad \varepsilon < \varepsilon_0. \tag{3.238}$$

Como $K(y-\varepsilon) \to +\infty$ quando $\varepsilon \to 0^+$ temos que, para uma constante C_ε suficientemente grande, existem $0 < \bar{y} < 1$ e $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(C_\varepsilon, \bar{y})$ tais que se $\varepsilon < \varepsilon_1$ e $\bar{y} < y < 1$ então

$$K(y-\varepsilon) > C_\varepsilon.$$

Escolhendo $\delta = 1 - \bar{y}$ em (3.238) obtemos

$$\bar{y} \leq \varphi_\varepsilon(x,t) \leq 1 \quad \text{em} \quad \mathcal{K} \quad \text{para} \quad \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Tomando $\varepsilon_2 = \min(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ deduzimos

$$K(\varphi_\varepsilon(x,t) - \varepsilon) > C_\varepsilon \quad \text{em} \quad \mathcal{K} \quad \text{para} \quad \varepsilon < \varepsilon_2. \tag{3.239}$$

Seja $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$. Multiplicando a equação da velocidade em (3.196) por $\mathbf{u}_\varepsilon$, integrando por partes, usando $\operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon = 0$ e as desigualdades de Hölder, Poncaré e Young, obtemos

$$\frac{d}{dt}||\mathbf{u}_\varepsilon(t)||_H^2 + \nu||\nabla \mathbf{u}_\varepsilon(t)||_{2,\Omega}^2 + 2\int_\Omega K(\varphi_\varepsilon(t) - \varepsilon)\mathbf{u}_\varepsilon^2(t)\,dx \leq C||\theta_\varepsilon(t)||_{2,\Omega}^2.$$

Integrando em $(0,T)$ obtemos

$$\int_Q K(\varphi_\varepsilon - \varepsilon)\mathbf{u}_\varepsilon^2\,dx\,dt \leq C(||\mathbf{u}_0||_H + ||\theta_\varepsilon||_{2,Q}^2).$$

Usando a estimativa (3.218) tem-se

$$\int_Q K(\varphi_\varepsilon - \varepsilon)\mathbf{u}_\varepsilon^2\,dx\,dt \leq C(1 + ||(\varphi_0, \theta_0)||_{(L^2(\Omega))^2} + ||\mathbf{u}_0||_H + ||g||_{2,Q}). \tag{3.240}$$

Mas, $\mathcal{K} \subset \overset{o}{Q}_s \subset Q$ e logo

$$\int_{\mathcal{K}} K(\varphi_\varepsilon - \varepsilon)\mathbf{u}_\varepsilon^2\,dx\,dt \leq C \tag{3.241}$$

com C uma constante independente de $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$.

Combinando (3.239) e (3.241) tem-se

$$C_\varepsilon \int_{\mathcal{K}} \mathbf{u}_\varepsilon^2\,dx\,dt \leq C \;\Rightarrow\; ||\mathbf{u}_\varepsilon||_{2,\mathcal{K}}^2 \leq \frac{C}{C_\varepsilon}. \tag{3.242}$$

Observe que, quando ε aproxima-se de zero, C_ε aproxima-se de $+\infty$ e (3.242) implica que $||\mathbf{u}_\varepsilon||_{2,\mathcal{K}} \to 0$. Combinando este resultado com a convergência fraca

$||\mathbf{u}_\varepsilon||_{2,\mathcal{K}} \rightharpoonup ||\mathbf{u}||_{2,\mathcal{K}}$ concluímos que $||\mathbf{u}||_{2,\mathcal{K}} = 0$ e, logo, $\mathbf{u}$ é constante em $\mathcal{K}$. Mas, $\mathcal{K}$ é um compacto arbitrário de $\overset{o}{Q}_s$, o que implica $\mathbf{u} = 0$ em $\overset{o}{Q}_s$.

Agora, vamos passar o limite na equação de $\mathbf{u}_\varepsilon$ em (3.196). Para isto, seja $\psi \in C([0,T];(H_0^1(\Omega_{ml}(t)))^2)$ tal que div $\psi(\cdot,t) = 0$, $\forall t \in [0,T]$, supp $\psi(x,t) \subset Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0)$ e $\psi(\cdot,T) = 0$. Multiplicando a equação de $\mathbf{u}_\varepsilon$ em (3.196) por ψ, integrando em Q, integrando por partes e usando as propriedades de ψ, obtemos

$$\begin{aligned} -\int_{Q_{ml}} \mathbf{u}_\varepsilon\, \psi_t\, dxdt + \nu \int_{Q_{ml}} \nabla \mathbf{u}_\varepsilon \nabla \psi\, dxdt + \int_{Q_{ml}} (\mathbf{u}_\varepsilon\, \nabla)\mathbf{u}_\varepsilon\, \psi\, dxdt + \\ \int_{Q_{ml}} K(\varphi_\varepsilon - \varepsilon)\mathbf{u}_\varepsilon \psi\, dxdt = \int_{Q_{ml}} \vec{\sigma}\, \theta_\varepsilon \psi\, dxdt + \int_{\Omega_{ml}(0)} \mathbf{u}_0(x)\, \psi(x,0) dx. \end{aligned} \tag{3.243}$$

As convergências (3.218) e (3.219) são suficientes para passarmos o limite no primeiro e do segundo termos do lado esquerdo e no primeiro termo do lado direito de (3.243). Para os outros, primeiro observe que

$$K(\varphi_\varepsilon - \varepsilon) \to K(\varphi_\varepsilon) \quad \text{em} \quad C^0(\mathcal{K}_{ml}) \tag{3.244}$$

com $\mathcal{K}_{ml}$ um subconjunto compacto arbitrário de $Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0)$.

De fato, as funções $K(\varphi_\varepsilon(x,t) - \varepsilon)$ e $K(\varphi(x,t))$ são contínuas e limitadas em $\mathcal{K}_{ml}$, $\forall t \in (0,T]$ e como $\varphi_\varepsilon \to \varphi$ em $C^0(\mathcal{K}_{ml})$ temos o resultado desejado. Em particular, esta conclusão continua verdadeira se considerarmos $\mathcal{K}_{ml}$ o suporte de ψ. Deste modo, com a convergência (3.219) passamos o limte no quarto termo de (3.243).

Para finalizar, precisamos de uma convergência forte de $(\mathbf{u}_\varepsilon)$. Para isto, observe que Q_{ml} é um aberto e, portanto, pode ser coberto por uma coleção enumerável de cilindros $\Omega_i \times (a_i, b_i)$ tais que $\overline{\Omega}_i \subset \Omega$ and $[a_i, b_i] \subset (0,T)$, para cada $i = 1, \ldots, \infty$. Assim, para cada $i = 1, \ldots, \infty$, podemos tomar um subconjunto compacto em $\Omega_i \times (a_i, b_i)$ com $\mathcal{K}_{ml}$ em (3.245) e concluir que existem $\varepsilon_i \in (0,1]$ e constantes C_i independentes de $\varepsilon \in (0, \varepsilon_i]$ tais que, para este ε, tem-se

$$||K(\varphi_\varepsilon - \varepsilon)||_{L^\infty(\overline{\Omega}_i \times [a_i, b_i])} \leq C_i. \tag{3.245}$$

Restringindo a equação da velocidade em (3.196) aos cilindros $\Omega_i \times (a_i, b_i)$, procedendo de modo análogo ao da obtenção da estimativa (3.207), usando (3.245) e

(3.219) deduzimos que

$$||\mathbf{u}'_\varepsilon||_{L^2(a_i,b_i;V'(\Omega_i))} \leq C_i,$$

com $V'(\Omega_i)$ o dual do espaço de Banach $V(\Omega_i) = \{\mathbf{v} \in \ (H_0^1(\Omega_i))^2\,;\, \operatorname{div}\mathbf{v} = 0\}$ com a norma de $(H^1(\Omega_i))^2$.

Além disso, pelas estimativas uniformes obtidas para $\mathbf{u}_\varepsilon$ temos, em particular, que $(\mathbf{u}_\varepsilon)$ é uniformemente limitada com relação a $\varepsilon \in (0, \varepsilon_i]$ em $L^2(a_i, b_i; V(\Omega_i))$.

Seja $H(\Omega_i) = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega_i)^2\,;\, \operatorname{div}\mathbf{v} = 0,\, \gamma_\eta \mathbf{v} = 0\}$ munido da norma de $(L^2(\Omega_i))^2$, com γ_η o traço normal (veja [62, teorema 1.4, p. 15]).

Observe que, $V(\Omega_i) \subset H(\Omega_i) \subset V'(\Omega_i)$ com a primeira imersão compacta. Então, pelo Corolário 4 dado em [59, p.85] temos que existem $\mathbf{u} \in L^2((a_i, b_i); H(\Omega_i))$ e uma subseqüência, representada novamente por $(\mathbf{u}_\varepsilon)$, tais que, em particular,

$$\mathbf{u}_\varepsilon \to \mathbf{u} \quad \text{em} \quad L^2(\Omega_i \times (a_i, b_i)).$$

Repetindo o argumento acima para cada $i = 1, \ldots, \infty$ e aplicando o usual argumento diagonal obtemos

$$\mathbf{u}_\varepsilon \to \mathbf{u} \quad \text{em} \quad L^2_{loc}(Q_{ml}).$$

Deste modo, para esta subseqüência, podemos passar o limite no terceiro termo de (3.243) procedendo exatamente do mesmo modo como no caso das equações de Navier-Stokes clássicas.

Além disso, observe que, pelo Teorema 3.14, $(\varphi, \theta) \in (W_q^{2,1}(Q))^2$ com $2 \leq q < 4$.

E a prova do Teorema 3.12 está completa. ■

Observação 3.4 *Ressaltamos que, mesmo no caso bidimensional, não somos capazes de demonstrar unicidade da solução de modo análogo àquele válido para as equações de Navier-Stokes clássicas. O termo adicional do tipo Carman-Kozeny impossibilita qualquer tentativa de estimativa uniforme da derivada temporal da velocidade.*

Observação 3.5 *Se considerarmos o modelo mais realístico*

$$
\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} - \xi^2 \Delta \varphi + \boldsymbol{u}.\nabla \varphi = a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 + \theta & \text{em} & Q, \\
\dfrac{\partial}{\partial t}(\theta + \ell\varphi) - k\Delta\theta + \boldsymbol{u}.\nabla(\theta + \ell\varphi) = g & \text{em} & Q, \\
\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \nu\Delta \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}.\nabla)\boldsymbol{u} + \nabla p + K(\varphi)\boldsymbol{u} = \vec{\sigma}\,\theta & \text{em} & Q_{ml}, \\
\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 & \text{em} & Q_{ml}, \\
\boldsymbol{u} = 0 & \text{em} & \overset{0}{Q}_s, \\
\varphi = 0, \quad \theta = 0 \quad \boldsymbol{u} = 0 & \text{em} & S_{ml}, \\
\varphi(x,0) = \varphi_0(x) \quad \theta(x,0) = \theta_0(x) & \text{em} & \Omega, \\
\boldsymbol{u}(x,0) = \boldsymbol{u}_0(x) & \text{em} & \Omega_{ml}(0).
\end{array}
\tag{3.246}
$$

temos o seguinte resultado

Teorema 3.15 *Suponha que as hipóteses* (H1), (H2), (H3) *são verdadeiras para o caso* $n = 2$. *Se* $g \in L^p(Q)$, $\boldsymbol{u}_0 \in (L^2(\Omega_{ml}(0)))^2$, $(\varphi_0, \theta_0) \in W_q^{2-2/q}(\Omega) \times W_p^{2-2/p}(\Omega)$ *com* $2 \leq p < q < 4$, $\varphi_0 = \theta_0 = 0$ *em* $\partial\Omega$. *Então, existe uma solução* $(\varphi, \theta, \boldsymbol{u})$ *do problema* (3.246) *tal que* $\boldsymbol{u} = 0$ *em* $\overset{o}{Q}_s$, $(\varphi, \theta) \in W_q^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$ *e* $\boldsymbol{u} \in L^2(0, T; H_{loc}) \cap L^2(0, T, V_{loc})$.

APÊNDICE A

Espaços funcionais e algumas desigualdades

A.1 Notações e espaços funcionais

As seguintes notações e espaços foram usados no texto:

$\mathbb{R}^n$ espaço euclidiano n-dimensional.

Ω aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$.

$Q = \Omega \times (0, T)$ cilindro com superfície lateral $S = \partial\Omega \times (0, T)$.

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{i=1}^{n}$ o operador gradiente.

$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ o operador Laplaciano.

Representamos as derivadas parciais por $u' = D_t\, u = \frac{\partial u}{\partial t}$ e $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_i^{\alpha_1} \ldots \partial x_i^{\alpha_n}}$ com $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

$|u| = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)^{1/2}$ e $|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{1/2}$ norma euclidiana de $u \in \mathbb{R}^n$ e do vetor gradiente de u, respectivamente.

$C^m(\Omega)$ espaço das funções com todas as derivadas de ordem $\leq m$ contínuas em Ω (m inteiro positivo ou $m = \infty$).

$\mathcal{D}(\Omega)$ espaço vetorial das funções em $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto em Ω e $\mathcal{D}'(\Omega)$ o seu dual. Também usaremos os espaços $\mathcal{D}(0,T)$ e $\mathcal{D}'(0,T)$.

$L^q(\Omega)$ espaço de Banach das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mensuráveis (no sentido de Lebesgue) que são q-integráveis ($q \geq 1$) cuja norma é dada por

$$||u||_{q,\Omega} = \left(\int_\Omega |u(x)|^q \, dx \right)^{1/q} \qquad (1 \leq q < \infty),$$

$$||u||_{\infty,\Omega} = ess \sup_\Omega |u(x)| \qquad (q = \infty).$$

$W^{m,p}(\Omega)$ espaço de Banach, $m \in \mathbb{N}$, das funções $u \in L^p(\Omega)$ com derivadas generalizadas (no sentido usual) de ordem $\leq m$ que pertencem a $L^p(\Omega)$ e cuja norma é dada por

$$||u||_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}.$$

$W_0^{m,p}(\Omega)$ o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.

Observação A.1 *Para o caso particular de $p = 2$, a notação dos espaços de Sobolev será $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ e $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$.*

Uma função vetorial é uma função $w(t)$ que para cada $t \in (0,T)$ associa um elemento $w(t)$ do espaço de Banach X. Dizemos que $w : (0,T) \to X$ é *fortemente mensurável* se a função $t \longmapsto ||w(t)||_X$ é mensurável. Representamos por $L^p(0,T;X)$ com $p \geq 1$, o conjunto das funções fortemente mensuráveis $w : (0,T) \to X$ tal que

$$||w||_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T ||w(t)||^p_X \right)^{1/p} < \infty \quad \text{se} \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$||w||_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{0 \leq t \leq T} ess \; ||w(t)||_X < \infty \quad \text{se} \quad p = \infty.$$

Representamos por $C([0,T];X)$ o espaço das funções contínuas $w : [0,T] \to X$ com a norma

$$||w||_{C([0,T];X)} = \max_{0 \leq t \leq T} ||w(t)||_X.$$

Observação A.2 *Observe que, para $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ tais que $1 \leq p_1 < p_2 < +\infty$ tem-se $L^{p_2}(0,T;X) \subset L^{p_1}(0,T;X)$.*

Em alguns casos usamos os seguintes espaços funcionais, cujas notações e definições podem ser encontradas em Ladyzenskaja [41, capítulo I].

$W_q^{2,1}(Q)$ espaço de Banach ($q \geq 1$) das funções $u \in L^q(Q)$ com derivadas generalizadas $D_x u$, $D_x^2 u$, $D_t u$ em $L^q(Q)$ e norma definida por

$$||u||_{q,Q}^{(2)} = ||u||_{q,Q} + ||D_x u||_{q,Q} + ||D_x^2 u||_{q,Q} + ||D_t u||_{q,Q}.$$

Agora definiremos o espaço das funções que são contínuas no sentido de Hölder. Dizemos que uma função $u(x,t)$ definida em $\overline{Q}$ é Hölder contínua em x e t, respectivamente, com expoentes α e β em $(0,1)$ se as seguintes quantidades, chamadas constantes de Hölder, são finitas :

$$\langle u \rangle_x^{(\alpha)} = \sup_{\substack{(x_1,t),(x_2,t) \in \overline{Q} \\ x_1 \neq x_2}} \frac{||u(x_1,t) - u(x_2,t)||}{|x_1 - x_2|^\alpha},$$

$$\langle u \rangle_t^{(\beta)} = \sup_{\substack{(x,t_1),(x,t_2) \in \overline{Q} \\ t_1 \neq t_2}} \frac{||u(x,t_1) - u(x,t_2)||}{|t_1 - t_2|^\beta}.$$

Para $\tau \in \mathbb{R}^+$ não nulo, definimos a seguinte norma:

$$|u|_Q^{(\tau)} = \sum_{(2r+s=[\tau])} \langle D_t^r D_x^s \rangle_x^{(\tau-[\tau])} + \sum_{0<\tau-2r-s<2} \langle D_t^r D_x^s u \rangle_t^{\left(\frac{\tau-2r-s}{2}\right)} + \sum_{j=0}^{[\tau]} \langle u \rangle_Q^{(j)}$$

com $\langle u \rangle_Q^{(j)} = \sum_{(2r+s=j)} \max |D_t^r D_x^s u|$ e $[\tau]$ o maior inteiro menor que τ.

Considere o espaço de Banach $\mathrm{H}^{\tau,\tau/2}(Q)$ com $\tau \in \mathbb{R}^+$ não nulo, como o espaço das funções $u(x,t)$ contínuas em $\overline{Q}$ com derivadas da forma $D_t^r D_x^s u$ para $2r + s < \tau$ também contínuas e com norma $|u|_Q^{(\tau)}$ finita. Particularmente, estaremos interessados nos espaços de Hölder $\mathrm{H}^{\tau,\tau/2}(Q)$ com $0 \leq \tau < 1$ ou $1 \leq \tau < 2$ com as seguintes normas, respectivamente

$$|u|_Q^{(\tau)} = \max_{\overline{Q}} |u| + \langle u \rangle_x^{(\tau)} + \langle u \rangle_t^{(\tau/2)},$$

$$|u|_Q^{(\tau)} = \max_{\overline{Q}} |u| + \sum \max_{\overline{Q}} |D_x u| + \langle D_x u \rangle_x^{(\tau-1)} + \langle u \rangle_t^{(\tau/2)}.$$

A.2 Derivada generalizada de funções vetoriais

Lema A.1 (p. 250, [62]) *Seja X um espaço de Banach e X' seu dual. Sejam u e g funções de $L^1(a,b;X)$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) u é q.s. igual a primitiva de g,

$$u(t) = \xi + \int_a^t g(s)ds, \qquad \xi \in X,\ q.s.\ t \in [a,b]; \tag{A.1}$$

(ii) Para cada $\phi \in \mathcal{D}(a,b)$,

$$\int_a^b u(t)\phi'(t)dt = -\int_a^b g(t)\phi(t)dt, \qquad \left(\phi' = \frac{d\phi}{dt}\right); \tag{A.2}$$

(iii) Para cada $\eta \in X'$

$$\frac{d}{dt}\langle \eta, u(t)\rangle = \langle \eta, g(t)\rangle, \tag{A.3}$$

no sentido das distribuições.

Se (i)-(iii) são satisfeitas, em particular, u é q.s. igual a uma função de $C((a,b);X)$.

O Lema A.1 sugere a seguinte definição:

Definição A.1 *A função g dada no Lema* A.1 *é chamada derivada fraca de u e será representada pelos símbolos usuais, isto é,*

$$g = u' = \frac{du}{dt}.$$

No que segue, introduziremos, de modo abstrato, os espaços funcionais usados na resolução de problemas de evolução.

Considere V um espaço de Banach reflexivo e H um espaço de Hilbert. Sejam H' e V' os espaços duais de H e V, respectivamente.

Suponhamos que $V \subset H$ com imersão densa e contínua. Identificando H como o seu dual H' pelo Teorema de representação de Riesz temos que H pode ser identificado com um subespaços de V' e as seguintes inclusões são densas e contínuas:

$$V \subset H \cong H' \subset V'. \tag{A.4}$$

Observe que, para $f \in H$ e $v \in V$ tem-se

$$\langle f, v \rangle = (f, v). \tag{A.5}$$

Seja $T > 0$ um número real fixo e $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Considere o seguinte espaço normado:

$$W = \{v \in L^p(0,T;V)\,;\ v' \in L^q(0,T;V')\}$$

com norma

$$||v||_W = ||v||_{L^p(0,T;V)} + ||v'||_{L^q(0,T;V')}.$$

Lema A.2 ([43], Lema 1.2, p. 7) *Sejam X um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Um elemento de $\{v \in L^p(0,T;X)\,;\ v' \in L^p(0,T;X)\}$ coincide q.s. com uma função de $C([0,T];X)$.*

Em particular, um elemento de W coincide q.s. com uma função de $C([0,T];V')$. De fato, coincide q.s. com uma função de $C([0,T];H)$, como mostra o seguinte lema:

Lema A.3 ([43], p. 156) *Um elemento de W coincide q.s.com uma função de $C([0,T];H)$.*

Lema A.4 ([36], p. 151) *Sejam V e H espaços tais que* (A.4) *vale. Então,*

(i) a seguinte igualdade vale no sentindo das distribuições em $(0,T)$:

$$\frac{d}{dt}||u(t)||_H^2 = 2\,\langle u'(t), u(t)\rangle\,, \quad u \in W,$$

(ii) a seguinte de integração por partes vale $\forall u, v \in W$:

$$\int_0^T \langle u'(t), v(t)\rangle\ dt = -\int_0^T \langle u(t), v'(t)\rangle\ dt + \langle u(T), v(T)\rangle - \langle u(0), v(0)\rangle\,.$$

A.3 Algumas desigualdades

Lema A.5 (i) Desigualdade de Cauchy com ϵ *Se $a, b, \epsilon > 0$, então*

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon}$$

(ii) Desigualdade de Hölder *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$,um conjunto não vazio e mensurável. Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, com $1 < p < \infty$, então*

$$\int_\Omega |u\, v| dx \leq ||u||_{L^p(\Omega)} ||v||_{L^q(\Omega)}.$$

(iii) Desigualdade de Young *Para todo $a, b > 0$, e para p, q tal que $p^{-1} + q^{-1} = 1$, com $1 < p < \infty$ tem-se*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Lema A.6 (Desigualdade de Gronwall (forma diferencial)) *Seja $\eta(.)$ uma função absolutamente contínua não negativa em $[0, T]$, que satisfaz, para t q.s, a desigualdade diferencial*

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t),$$

em que $\phi(t), \psi(t)$ são funções integráveis não negativas em $[0, T]$. Então

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)\, ds} \Big[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\, ds\Big], \tag{A.6}$$

para todo $t \in [0, T]$.

Lema A.7 (Desigualdade de Poincaré) *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$. Então existe uma constante $C_p > 0$ que depende de Ω e n, tal que*

$$\|u\|_{2,\Omega} \leq C_p \|\nabla u\|_{2,\Omega}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Lema A.8 (Desigualdade de Poincaré) *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira de classe C^1. Então existe uma constante $C_p > 0$ que depende de Ω e n, tal que*

$$\|u\|_{2,\Omega} \leq C_p \left(\|\nabla u\|_{2,\Omega} + \left| \int_\Omega u\, dx \right| \right), \quad u \in H^1(\Omega).$$

Lema A.9 (Desigualdade de interpolação Gagliardo-Niremberg) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1, $0 \leq j \leq m$, $1 \leq q, r \leq \infty$, $p \in \mathbb{R}$, $\frac{j}{m} \leq \alpha \leq 1$ tais que*

$$\frac{1}{p} - \frac{j}{n} = \alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n} \right) + \frac{1-\alpha}{q}.$$

Se $u \in W^{m,r}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ *então*

$$||D^j u||_{p,\Omega} \leq C_1 ||D^m u||_{r,\Omega}^{\alpha} \, ||u||_{q,\Omega}^{1-\alpha} + C_2 ||u||_{q,\Omega} \tag{A.7}$$

com $C_1 > 0$ *e* $C_2 > 0$ *constantes que dependem de* n, m, j, q, r, α *e a seguinte exceção: se* $1 < r < \infty$ *e* $m - j - \dfrac{n}{r}$ *é um inteiro não negativo então* (A.7) *vale para* $\dfrac{j}{m} \leq \alpha < 1$.

Em particular, se $u \in W_0^{m,r}(\Omega)$ *podemos tomar* $C_2 = 0$ *em* (A.7).

APÊNDICE B

Teoremas auxiliares

B.1 Teorema de ponto fixo

Lema B.1 (Teorema do ponto fixo de Brouwer [66]) *Sejam X um espaço de dimensão finita e $\mathcal{K}$ um subconjunto não vazio, convexo, fechado e limitado de X. Se $F : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ é uma aplicação contínua então F tem um ponto fixo, isto é, existe $\xi \in \mathcal{K}$ tal que $F(\xi) = \xi$.*

Lema B.2 (Teorema do ângulo agudo [62]) *Sejam X um espaço de dimensão finita com produto interno $(\cdot,\cdot)_X$ e norma $||\cdot||_X$. Se $P : X \to X$ uma aplicação contínua tal que*

$$(P(x), x)_X > 0, \quad \textit{para} \quad \|x\|_X = k > 0. \tag{B.1}$$

Então, existe um $\bar{x} \in X$ com $\|\bar{x}\|_X \leq k$ e $P(\bar{x}) = 0$.

Demonstração: Seja $B = \{x \in X; \|x\|_X \leq k\}$ e suponhamos que $P(x) \neq 0, \forall x \in B$. Assim, a aplicação de $F : B \to B$:

$$x \mapsto F(x) = -\frac{kP(x)}{\|P(x)\|_X}$$

está bem definida e é contínua.

Então, pelo Teorema do ponto fixo de Brouwer, existe $\bar{x} \in B$ tal que $F(\bar{x}) = \bar{x}$. Logo,

$$-\frac{kP(\bar{x})}{\|P(\bar{x})\|_X} = \bar{x},$$

o que implica, $\|\bar{x}\|_X = k$ e $(P(\bar{x}), \bar{x})_X = -k\,\|P(\bar{x})\|_X < 0$. Mas, isto contradiz (B.1). ■

Definição B.1 *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Dizemos que uma aplicação $\Phi : X \to X$ é uma "contração" em X se existe uma constante $k \in (0, 1)$ tal que*

$$d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq k\, d(x, y),$$

para todo $x, y \in X$.

Teorema B.1 (Princípio da Contração, p. 18, [66]) *Toda contração $\Phi : X \to X$ definida no espaço métrico completo (X, d) tem um único ponto fixo.*

Teorema B.2 (Subespaço completo) *Um subconjunto A de um espaço métrico completo (X, d) é completo se, e somente se, o conjunto A é fechado em X.*

Observe que, pelo teorema B.1, se X é um espaço de Banach com $d(x, y) = ||x - y||$ e $A \subset X$ é fechado, então A é completo. Neste caso, temos o seguinte resultado:

Teorema B.3 *Se A é um conjunto não vazio e fechado do espaço de Banach $(X, ||\cdot||)$ e $\Phi : A \to A$ é uma contração. Então Φ tem um único ponto fixo em A.*

Agora, enunciaremos o Teorema de ponto fixo devido a Leray e Schauder:

Lema B.3 (Teorema 3, p.189, [32]) *Sejam X um espaço de Banach e $T : [a, b] \times X \to X$ uma transformação tal que $y = T(\lambda, x)$ com $x, y \in X$ e $\lambda \in [a, b]$. Suponha que:*

a) $T(\lambda, x)$ está definida $\forall x \in X$ e $\forall \lambda \in [a, b]$.

b) Para λ fixo, $T(\lambda, x)$ é contínua em X.

c) Para $x \in A$, $A \subset X$ limitado, $T(\lambda, x)$ é uniformemente contínua em λ.

d) Para λ fixo, $T(\lambda, x)$ é uma transformação compacta.

e) Existe uma constante (finita) $M > 0$ tal que toda possível solução x de $x = T(\lambda, x)$ satisfaz $||x||_X \leq M$.

f) A equação $x = T(a, x)$ tem uma única solução em X.

Então, existe uma solução da equação $x = T(b, x)$.

B.2 Teoremas de Imersões

Teorema B.4 (p. 95-143, [2]) *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1. Então, as seguintes imersões são contínuas:*

$$W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad se \quad mp < n, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}, \tag{B.2}$$

$$W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad se \quad mp = n, \quad 1 \leq q < \infty, \tag{B.3}$$

$$W^{m,p}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \quad se \quad mp > n, \quad n > (m-1)p. \tag{B.4}$$

com $0 < \alpha \leq m - \dfrac{n}{p}$.

Além disso, as imersões (B.2) e (B.3) são compactas para qualquer r tal que $1 \leq r < q$ e $1 \leq q < \infty$, respectivamente. Se $p = 1$ e $m = n$ então (B.3) vale para $q = \infty$.

Observação B.1 *Para $W_0^{m,p}(\Omega)$, as imersões dadas no Teorema* B.4 *são válidas sem a hipótese de regularidade de $\partial\Omega$.*

O seguinte resultado é conhecido com *Imersão de Aubin-Lions*:

Lema B.4 (Teorema 2.1, p.271, [62]) *Sejam X, B e Y espaços de Banach reflexivos tais que $X \subset B \subset Y$ com as imersões contínuas, $X \subset B$ compacta. Sejam $0 < T < \infty$ e α_0, α_1 números finitos tais que $\alpha_i > 1$, $i = 0, 1$. Considere o seguinte espaço de Banach*

$$W(0,T) = \{u \in L^{\alpha_0}(0,T;\, X);\, u' \in L^{\alpha_1}(0,T;\, Y)\}.$$

com norma

$$\|v\|_{L^{\alpha_0}(0,T;X_0)} + \|v'\|_{L^{\alpha_1}(0,T;X_1)}\,.$$

Então, a imersão $W(0,T) \subset L^{\alpha_0}(0,T;\,B)$ *é compacta.*

Lema B.5 ([59]) *Sejam* X*,* B *e* Y *espaços de Banach reflexivos tais que* $X \subset B \subset Y$ *com as imersões contínuas,* $X \subset B$ *compacta. Então, a imersão é compacta:*

$$L^\infty(0,T;\,X) \cap \{u; u' \in L^r(0,T;\,Y)\} \subset C(0,T;\,B), \qquad 1 < r \leq \infty.$$

é compacta.

Derivada Fracionada

Sejam X, B, Y espaços de Hilbert que satisfazem as hipóteses do Lema B.4.

Seja $v(t) \in X$ com $t \in [0,T]$ tal que $\widetilde{v}(t) = v(t)$ para $t \in [0,T]$ e $\tilde{v}(t) = 0$ para $t \notin [0,T]$. Então a transformada de Fourier $\tau \to \widehat{v}(\tau)$ é definida por

$$\widehat{v}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi t\tau}\widetilde{v}(t)\,dt.$$

Para $\gamma \in \mathbb{R}^+$, definimos o espaço

$$\mathcal{H}^\gamma(0,T,X,B) = \{v \in L^2(0,T;X)\,;\, |\tau|^\gamma \widehat{v}(\tau) \in L^2(\mathbb{R},B)\}.$$

$\mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R},X,B)$ é um espaço de Hilbert com norma dada por

$$\|v\|_{\mathcal{H}^\gamma} = \left(\|v\|^2_{L^2(0,T;X)} + \||\tau|^\gamma \widehat{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R};B)}\right)^{1/2}.$$

Teorema B.5 (p. 153, [36]) *Sejam* X*,* B *e* Y *espaços de Hilbert tais que* $X \subset B \subset Y$ *com as imersões contínuas e* $X \subset B$ *compacta. Então, a imersão* $\mathcal{H}^\gamma(0,T,X,B) \subset L^2(0,T;B)$ *é compacta.*

Lema B.6 (Lema 3.3, p. 80, [41]) *Sejam* Ω *um domínio do* $\mathbb{R}^n$ *com fronteira* $\partial\Omega$ *de classe* C^1*,* $\ell > 0$ *inteiro,* r *e* s *inteiros não negativos,* τ *real não negativo,* $q \geq 1$*,* $p \geq q$*,* $2\,r + s \leq 2\,\ell$ *e* $2\,r + s < \tau$*. Se* $u \in W_q^{2\,\ell,\ell}(Q)$ *então*

$$||D_t^r\, D_x^r u||_{p,Q} \leq C_1\, ||u||_{q,Q}^{(2\,\ell)} + C_2||u||_{q,Q} \tag{B.5}$$

com

$$2\,\ell - 2\,r - s - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)(n+2) \geq 0. \tag{B.6}$$

Além disso, se $2\,\ell - 2\,r - s - \dfrac{n+2}{q} > 0$ *então para*

$$q > \frac{n+2}{2}, \quad 0 \leq \tau < 2\,\ell - 2\,r - s - \frac{n+2}{q}. \tag{B.7}$$

tem-se

$$|D_t^r\, D_x^r u|_Q^{(\tau)} \leq C_3\,||u||_{q,Q}^{(2\,\ell)} + C_4||u||_{q,Q} \tag{B.8}$$

Se $2\,\ell - 2\,r - s - \dfrac{n+2}{q}$ *é um número não inteiro, a estimativa* (B.8) *também vale para* $\tau = 2\,\ell - 2\,r - s - \dfrac{n+2}{q}$.

As constantes $C_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, *dependem de* ℓ, r, s, n, p, q *e* Ω.

Em particular, para $\ell = 1$ e $r = 0, 1$ e $s = 0$, o Lema B.6 torna-se

Lema B.7 *Seja* Ω *um domínio do* $\mathbb{R}^n$ *com fronteira* $\partial\Omega$ *de classe* C^1. *Então, as imersões* $W_q^{2,1}(Q) \subset L^{p_1}(Q)$ *e* $W_q^{2,1}(Q) \subset H^{\tau,\tau/2}(Q)$ *são contínuas e valem as seguintes estimativas:*

$$||u||_{p_1,Q} \leq C\,||u||_{q,Q}^{(2)} \quad \textit{para} \quad \left(\frac{1}{q} - \frac{2}{n+2}\right) \leq \frac{1}{p_1} \leq \frac{1}{q}, \tag{B.9}$$

$$||\nabla u||_{p_2,Q} \leq C\,||u||_{q,Q}^{(2)} \quad \textit{para} \quad \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{n+2}\right) \leq \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{q}, \tag{B.10}$$

$$|u|_Q^{(\tau)} \leq C||u||_{q,Q}^{(2)} \quad \textit{para} \quad q > \frac{n+2}{2}, \quad 0 \leq \tau < 2 - \frac{n+2}{q} \tag{B.11}$$

com a constante $C > 0$ *dependendo de* n, p_1, p_2, q *e* Ω.

Se $2 - \dfrac{n+2}{q}$ *é um número não inteiro, a estimativa* (B.11) *também vale para* $\tau = 2 - \dfrac{n+2}{q}$.

Lema B.8 (p.24, [45]) *Seja* Ω *um domínio do* $\mathbb{R}^n$ *com fronteira* $\partial\Omega$ *de classe* C^1. *Se* $\dfrac{1}{q} - \dfrac{2}{n+2} > 0$ *então a imersão* $W_q^{2,1}(Q) \subset L^{p-\epsilon}(Q)$, $\forall\epsilon > 0$, *com* $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{2}{n+2}$.

Em particular, estaremos interessados nos casos $n = 2, 3$ e vamos reescrever os Lemas B.7 e B.8 como segue:

Lema B.9 *Seja Ω um domínio do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1. Então, a imersão $W_q^{2,1}(Q) \subset L^{p_1}(Q)$ é contínua e existe uma constante $C > 0$ que depende de p_1, p_2, q e Ω tal que*

$$||u||_{p_1,Q} \leq C\,||u||_{q,Q}^{(2)}, \quad ||\nabla u||_{p_2,Q} \leq C\,||u||_{q,Q}^{(2)}$$

com p_1 e p_2 dados, para $n = 2$, por

$$\begin{cases} p_1 = \infty & se \quad \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{2} < 0, \\ q \leq p_1 < \infty, \ \ \forall p_1 & se \quad \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{2} = 0, \\ q \leq p_1 \leq \left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{2}\right)^{-1} & se \quad \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{2} > 0, \end{cases} \tag{B.12}$$

$$\begin{cases} p_2 = \infty & se \quad \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{4} < 0, \\ q \leq p_2 < \infty, \ \ \forall p_2 & se \quad \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{4} = 0, \\ q \leq p_2 \leq \left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{4}\right)^{-1} & se \quad \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{4} > 0. \end{cases} \tag{B.13}$$

e com p_1 e p_2 dados, para $n = 3$, por

$$\begin{cases} p_1 = \infty & se \quad \dfrac{1}{q} - \dfrac{2}{5} < 0, \\ q \leq p_1 < \infty, \ \ \forall p_1 & se \quad \dfrac{1}{q} - \dfrac{2}{5} = 0, \\ q \leq p_1 \leq \left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{2}{5}\right)^{-1} & se \quad \dfrac{1}{q} - \dfrac{2}{5} > 0, \end{cases} \tag{B.14}$$

$$\begin{cases} p_2 = \infty & se \quad \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{5} < 0, \\ q \leq p_2 < \infty, \ \ \forall p_2 & se \quad \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{5} = 0, \\ q \leq p_2 \leq \left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{5}\right)^{-1} & se \quad \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{5} > 0. \end{cases} \tag{B.15}$$

Lema B.10 *Seja Ω um domínio do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1. A imersão $W_q^{2,1}(Q) \subset L^{p-\epsilon}(Q)$, $\forall \epsilon > 0$ com $p = p_1$ dado em* (B.12) *e* (B.14) *para $n = 2$ e $n = 3$, respectivamente.*

Lema B.11 *Seja Ω um domínio do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1. Então, a imersão $W_q^{2,1}(Q) \subset H^{\tau,\tau/2}(Q)$ é contínua e existe uma constante $C > 0$ que depende de p, q e Ω tal que*

$$|u|_Q^{(\tau)} \leq C||u||_{q,Q}^{(2)} \tag{B.16}$$

com

$$\begin{cases} 0 \leq \tau < 2 - \dfrac{4}{q} & se \quad n = 2, \quad q > 2, \\ 0 \leq \tau < 2 - \dfrac{5}{q} & se \quad n = 3, \quad q > \dfrac{5}{2}. \end{cases} \tag{B.17}$$

Se $2 - 4/q$ e $2 - 5/q$ são números não inteiro, a estimativa (B.16) *também vale para $\tau = 2 - 4/q$ ou $\tau = 2 - 5/q$, respectivamente.*

O próximo resultado é o conhecido *Teorema de Arzela-Ascoli*:

Lema B.12 (Teorema 3.6.4, p.112, [31]) *Seja $\mathcal{K}$ uma família de funções equicontínuas e uniformemente limitada definidas no espaço métrico compacto X. Então, qualquer seqüência (u_n) de funções de $\mathcal{K}$ tem uma subseqüência que converge uniformemente em X para uma função contínua.*

APÊNDICE C

Alguns resultados das equações de Navier-Stokes

C.1 Resultados De Rham

Proposição C.1 (p. 14, [62]) *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n)$, $f_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $1 \leq i \leq n$. para alguma $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$*

$$\boldsymbol{f} = \nabla p \Longleftrightarrow \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle = 0, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}.$$

Proposição C.2 (p. 14, [62]) *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ lipschitz.*

(i) Se p é uma distribuição tal que $\nabla p \in (L^2(\Omega))^n$ então $p \in L^2(\Omega)$ e

$$||p||_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq ||\nabla p||_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

(ii) Se p é uma distribuição tal que $\nabla p \in H^{-1}(\Omega)$ então $p \in L^2(\Omega)$ e

$$||p||_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq ||\nabla p||_{\mathbb{H}^{-1}(\Omega)}.$$

Teorema C.1 (p. 34, [36]) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}$ um aberto e limtado com fronteira $\partial\Omega$ Lipschitz. Se $\boldsymbol{l} \in (H^{-1}(\Omega))^n$ tal que*

$$\langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{v} \rangle = 0, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V} \ (ouV).$$

Então, existe um única função $\phi \in L^2_0(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{v} \rangle = (\phi, \operatorname{div} \boldsymbol{v}) = -\langle \nabla \phi, \boldsymbol{v} \rangle \,, \quad \forall \boldsymbol{v} \in (H^1_0(\Omega))^n$$

com $L^2_0(\Omega) = \{\phi \in L^2(\Omega)\,;\, (\phi, 1)_{L^2(\Omega)} = 0\}$.

APÊNDICE D

Formas, operadores e o método de Galerkin

D.1 Formas e operadores

Seja $a : V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear e contínua. Podemos associar a forma $a(u, v)$ um operador linear e contínuo $A : V \to V'$ do seguinte modo: para cada $u \in V$, a aplicação $v \longmapsto a(u, v)$ de V em $\mathbb{R}$ é linear e contínua, logo pelo teorema de representação de Ritz, existe um único $\xi_u \in V'$.

Representaremos por A o operador $u \longmapsto \xi_u$ de V em V'. Portanto, pelas propriedades de $a(u, v)$ temos que A é linear e contínuo. De fato, pela continuidade de $a(u, v)$ tem-se

$$|\xi_u(v)| = |\langle \xi_u, v\rangle| = |a(u, v)| \leq C||u||\,||v||,$$

e logo

$$||A(u)||_{V'} = \sup \frac{|\langle \xi_u, v\rangle|}{||v||} \leq C||u||,$$

o que implica $||A||_{\mathcal{L}(V,V')} \leq C$.

Reciprocamente, dado um operador linear e contínuo $A \in \mathcal{L}(V, V')$ podemos associar a A uma forma bilinear contínua $a : V \times V \to \mathbb{R}$ definindo

$$\langle A(u), v\rangle = a(u, v) \quad \forall u, v \in V.$$

Se $a(u,v) = ((u,v))$ é o produto interno de V então $A : V \to V'$ é o isomorfismo canônico de V em V'.

Se a forma bilinear $a(u,v)$ é "coerciva" isto é, existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(u,u) \geq \alpha \, ||u||^2,$$

então temos o seguinte resultado:

Teorema D.1 (Teorema de Lax-Milgram) *Se $a : V \times V \to \mathbb{R}$ é uma forma bilinear, contínua e coerciva então $A : V \to V'$ é um isomorfismo.*

Agora, considere a forma $b : V \times V \times V \to \mathbb{R}$ triilinear e contínua. Podemos associar a forma $b(u,v,w)$ um operador contínuo $B : V \to V'$ do seguinte modo: para cada $u, v \in V$ a função $w \longmapsto b(u,v,w)$ é linear e contínua, e logo, existe um único elemento $\xi(u,v) \in V'$ tal que

$$\langle \xi(u,v), w \rangle = b(u,v,w) \quad \forall w \in V.$$

Representaremos por $B(u,v)$ o operador $w \longmapsto \xi(u,v)$ de V em V'. Em particular, $B(u) = B(u,u)$.

D.2 Operador de Nemytski

Definição D.1 *Seja Ω uma aberto do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Dizemos que uma função $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma "função Carathéodory" se satisfaz as seguintes condições:*

(i) *para cada $s \in \mathbb{R}$ fixo, a função $x \mapsto f(x,s)$ é (Lebesgue) mensurável em Ω;*

(ii) *para cada $x \in \Omega$ q.s. fixo, a função $s \mapsto f(x,s)$ é contínua em $\mathbb{R}$.*

Seja $\mathcal{M}$ o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

Teorema D.2 (p. 7, [25]) *Se $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Carathéodory então a função $x \mapsto f(x, u(x))$ é mensurável para toda $u \in \mathcal{M}$.*

Assim, a função Carathéodory f define um o operador $\mathcal{F}_f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, chamado *operador de Nemytski.*

Teorema D.3 (Teorema 2.5, p. 9, [25]) *Se f é uma função Carathéodory, $p, q \in [1, \infty)$ e existem uma constante $C > 0$ e uma função $g \in L^p(\Omega)$ tais que*

$$|f(x,s)| \leq g(x) + C|s|^{p/q} \text{ q.s. em } \Omega, \ \ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Então,

(i) $\mathcal{F}_f \in L^q(\Omega), \ \forall u \in L^p(\Omega),$

(ii) $\mathcal{F}_f : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ *é contínuo,*

(iii) $\mathcal{F}_f$ *transforma conjuntos limitados em $L^p(\Omega)$ em conjuntos limitados em $L^q(\Omega)$.*

Teorema D.4 (Teorema 2.6, p. 17, [25]) *Se*

$$|f(x,s)| \leq g(x) + C|s|^{p-1}, \quad g \in L^q(\Omega) \quad \text{com} \quad p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

Então, o funcional $\Phi : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi(u) = \int_\Omega \mathcal{F}_f(x, u(x))\, dx$$

é contínuo e Fréchet diferenciável.

D.3 Método de Galerkin

Para resolvermos uma equação de operadores $Fu = y$ definida no espaço de Banach B podemos considerar problemas aproximados $F_m\, u_m = y_m$ em subespaços B_m com dimensão finita.

Se as seqüências (F_m) e (B_m) convergem, em algum sentido, para F e B, respectivamente, então gostaríamos de obter da seqüência de soluções aproximadas (u_m) de $F_m\, u_m = y_m$ em B_m uma subseqüência (u_{m_j}) convergindo para a solução de $F\, u = y$ em B. Por exemplo, se B é um espaço de Banach com base $(w_k)_{k=1}^{\infty}$ podemos

considerar B_m o subespaço gerado pelas m primeiras funções de $(w_k)_{k=1}^{\infty}$, ou seja, $B_m = [w_1, w_2, \ldots, w_m]$.

Sejam $P_m : B \to B_m$ projeções definidas por $P_m u = \sum_{k=1}^{m} x_k w_k$ com $u = \sum_{k=1}^{\infty} x_k w_k$ então podemos considerar so seguinte problema aproximado em B_m:

$$F_m u_m = P_m y \ \text{ para } \ u_m \in B_m \tag{D.1}$$

com $F_m = P_m F_{|_{B_m}}$. O sistema (D.1) é chamado *método ou aproximação de Galerkin* da equação $Fu = y$.

Para o caso que B é um espaço *reflexivo* temos o seguinte resultado de compacidade fraca:

Teorema D.5 (Teorema de compacidade fraca [28]) *Seja B uma espaço de Banach reflexivo. Se a sequência $(w_k)_{k=1}^{\infty} \subset B$ é limitada. Então existe uma subsequência $(u_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ de $(w_k)_{k=1}^{\infty}$ e $u \in B$ tais que $u_{k_j} \rightharpoonup u$.*

Assim, para resolvermos $Fu = y$ passando o limite em (D.1) precisamos:

1. determinar estimativas *a priori* da sequência de soluções (u_k), ou seja, obter $||u_k|| \leq C$ com $C > 0$ uma constante que independe de m, e portanto, obter uma subsequência (u_{k_j}) que converge fracamente para u;

2. usar as propriedades de F e da construção de Galerkin para mostrar que u é solução do problema original, isto é, $Fu = y$.

APÊNDICE E

Teoria das equações parabólicas lineares

Os seguintes resultados são teoremas clássicos da teoria L_p para as equações diferenciais parabólicas lineares e podem ser encontrados em [41].

Considere a seguinte problema parabólico linear:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x,t)u = f(x,t) && \text{em} \quad Q, \\ &u(x,t) = 0 && \text{em} \quad S, \\ &u(x,0) = u_0(x) && \text{em} \quad \Omega. \end{aligned} \tag{E.1}$$

Lema E.1 (p. 180, [41]) *Seja Ω um domínio do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1. Suponha que $f \in L^2(Q)$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $b_i \in L^p(0,T;L^q(\Omega))$ com $\frac{1}{p} + \frac{n}{2q} = \frac{1}{2}$, $p < \infty$ e $a \in L^r(0,T;L^s(\Omega))$ com $r < \infty$ e*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r} + \frac{n}{2s} = 1 \quad \text{para} \quad n \geq 4, \\ &\frac{1}{r} + \frac{n}{2s} = 1 \quad \text{para} \quad s > 2,\ n = 3, \\ &r > 4,\ \ s = 2 \quad \text{para} \quad n = 3, \\ &r > 2,\ \ s = 2 \quad \text{para} \quad n = 2. \end{aligned}$$

Então, existe uma única solução $u \in W_2^{2,1}(Q)$ do problema (E.1) *satisfazendo a*

seguinte estimativa:

$$||u||_{2,Q}^{(2)} \leq C(||f||_{2,Q} + (||b||_{L^p(0,T;L^q(\Omega))} + ||a||_{L^r(0,T;L^s(\Omega))})||u_0||_{1,2,\Omega} + ||u_0||_{1,2,\Omega})$$

com C uma constante que depende T, p, q, r, s e Ω.

Observação E.1 *O Lema E.1 também vale quando temos a condição de contorno do tipo "Neumann" (veja* [41, Remark 6.3, p. 180]*).*

Lema E.2 (p. 341, [41]) *Sejam $q > 1$ e Ω um domínio do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1. Suponha que*

(i) *$f \in L^q(Q)$ com $q \neq 3/2$, $u_0 \in W_q^{2-2/q}(\Omega)$ com $q \neq 3/2$.*

(ii) *$b_i \in L^r(Q)$ com $r = \max(q, n+2)$ se $q \neq n+2$ ou $r = n+2+\epsilon$ se $q = n+2, \forall\epsilon > 0$.*

(iii) *$a \in L^s(Q)$ com $s = \max(q, \frac{n+2}{2})$ se $q \neq \dfrac{n+2}{2}$ ou $s = \dfrac{n+2}{2} + \epsilon$ se $q = \dfrac{n+2}{2}, \forall\epsilon > 0$.*

(iv) *$u_0(x) = 0$ em $\partial\Omega$ se $q > 3/2$.*

Então, existe uma única solução $u \in W_q^{2,1}(Q)$ do problema (E.1) *satisfazendo, para $q > 3/2$, a seguinte estimativa:*

$$\|u\|_{q,Q}^{(2)} \leq C\left(\|f\|_q + \left(\|b\|_{r,Q} + \|a\|_{s,Q}\right)\|u_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)} + \|u_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)}\right)$$

com C uma constante que depende de T, q, r, s e Ω.

Vamos, agora, enunciar o resultado do Lema E.2 para o problema parabólico com condições de Neumann, ou seja, a condição $u = 0$ em S substituída pela condição

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{em} \quad S. \tag{E.2}$$

Lema E.3 (p. 351 [41]) *Sejam $q > 1$ e Ω um domínio do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1. Suponha que:*

(i) *$f \in L^q(Q)$ com $q \neq 3$, $u_0 \in W_q^{2-2/q}(\Omega) \cap W_q^{3/2-\delta}(\Omega)$ com $q \neq 3/2$ e $\delta \in (0,1)$;*

(ii) $b_i \in L^r(Q)$ *com* $r = \max(q, n+2)$ *se* $q \neq n+2$ *ou* $r = n+2+\epsilon$ *se* $q = n+2, \forall \epsilon > 0$.

(iii) $a \in L^s(Q)$ *com* $s = \max(q, \frac{n+2}{2})$ *se* $q \neq \frac{n+2}{2}$ *ou* $r = \frac{n+2}{2} + \epsilon$ *se* $q = \frac{n+2}{2}, \forall \epsilon > 0$.

(iv) $\frac{\partial u_0}{\partial \eta} = 0$ *em* $\partial\Omega$ *se* $q > 3$.

Então, existe uma única solução $u \in W_q^{2,1}(Q)$ *do problem* (E.1) *com condição de fronteira* (E.2) *satisfazendo, para* $q > 3$, *a seguinte estimativa:*

$$\|u\|_{q,Q}^{(2)} \leq C \left(\|f\|_{q,Q} + \left(\|b\|_{r,Q} + \|a\|_{s,Q} \right) \|u_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)} + \|u_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)} \right)$$

com C *uma constante que depende de* T, q, r, s *e* Ω.

Observação E.2 *Devemos ressaltar que o resultado do* Lema E.3 *vale também para* $q = 3$ *(para mais detalhes consulte* [41, p. 351]).

BIBLIOGRAFIA

[1] H. Abels, *On a diffuse interface model for two-phase flows of viscous, incompressible fluids with matched densities*, Arch. Rational Mech. Anal. 194 (2009), pp. 463-506.

[2] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Acad. Press., New York- San Francisco-London, 1975.

[3] V. Alexiades and A.D. Solomon, *Mathematical modeling of Melting and Freezing Processes*, Hemsphere Publishing Coorporation, 1971.

[4] S.M. Allen and J.W. Cahn, Acta Metall. Mater., 27 (1979), p. 1085.

[5] D.M. Anderson, G.B. McFadden and A.A. Wheeler, *Diffuse-interface methods in fluid mechanic*, Annu. Rev. Fluid. Mech. 30(1998), pp. 139-165.

[6] D.M. Anderson, G.B. McFadden and A.A. Wheeler, *A phase field model of solidification with convection*, Phys. D 135(2000), pp. 175-194.

[7] F. Bait, C.M.Elliot, A. Gardiner, A. Spence and M. Stuart, *The viscous Cahn-Hilliard equation*, Nonlinearity, 8(1995), pp. 131-160.

[8] M. L. Bars and M. G. Worster, *Interfacial conditions between a pure fluid and a porous medium: implications for binary alloy solidification*, J. Fluid. Mech (2006) vol 550, pp. 149-173.

[9] C. Beckermann, H.J. Diepers, I. Steinbach, A. Karma and X. Tong, *Modeling melt convection in phase-field simulations of solidification*, J. Comp. Phys.,154 (1999), pp. 468-496.

[10] Ph. Blanc, L. Gasser and J. Rappaz, *Existence for a stationary model of binary alloy solidification*, Math. Modelling. Num. Anal. vol. 29, 1995, 06, pp. 687-699.

[11] J. L. Bondrini and C. Vaz, *Existence and regularity of solutions of a phase field model for solidification with convection of pure materials in two dimensions*, Electronic J. Diff. Eqs., Vol. 2003(2003), pp. 1-25.

[12] J. L. Bondrini and C. Vaz, *Solutions to a Singular Navier-Stokes/Allen-Cahn phase field type system*, preprint, 2010.

[13] J. L. Bondrini and C. Vaz, *A Mathematical Analysis of a nonisotherma Allen-Cahn Type System*, Math. Methods in the Appl. Science, accepted, 2011.

[14] R.J. Braun, J.W. Cahn, G.B. McFadden and A.A. Wheeler, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. Ser., A 355 (1997), p. 1787.

[15] G. Caginalp, *An Analysis of phase field model of a free boundary*, Arch. Rat. Mech. Anal. 92, 1986, pp. 205-245.

[16] G. Caginalp, *Stefan and Hele-Shaw type model as asymptotic limits of the phase-field equations*, Phys. Rev. A, vol 39, No. 11, 1989, pp. 5887-5896.

[17] G. Caginalp and J.T. Lin, *An numerical analysis of an anisotropic phase field model*, IMA. J. Appl. Math., 39(1): 51-66, 1987.

[18] J.W. Cahn and S.M. Allen, J. Phys., (Paris) Colloque C7 (1977), p. 51.

[19] J.W. Cahn, Acta Metall. 9 (1961) 795.

[20] J.W. Cahn and J.E. Hilliard, J. Chem. Phys., 28 (1958), p. 258.

[21] S. Chakraborty and P. Dutta, *Three-dimensional double-difusive convection and macrosegregation during non-equilibrium solidification of binary mixtures*, Inter. J. of Heat and Mass Transfer, 46 (2003), pp. 2115-2134.

[22] E.A. Coddington and N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill Book Company, Inc. 1955.

[23] P. Colli, G. Gentil and C. Giorgi, *Nonlinear systems describing phase transition models compatible with thermodynamics*, Math. Models. Methods. Appl. Sci., vol 9, 7, 1999, pp. 1015-1037.

[24] L. Consiglieri and J. F. Rodrigues, *On Stacionary flows with energy dependent nonlocal viscosities*, J. of Math Sciences, Vol 127, No. 2, 2005.

[25] D. G. De Figueiredo, *The Ekelend Variational principle with applications and Detours*, Tata Institute of Fundamental Research Bombay, 1989.

[26] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1984.

[27] P. Drábek, R. F. Masásevich and P. Takáĉ, *Stacionary solutions for quasilinear model for phase transition in one space dimensions*, Sunmitted 2009.

[28] L. C. Evans, *Partial diferential equations*, American Mathematical Society, vol 19, 1998.

[29] P.C. Fife, *Models for phase separation and their mathematic*, EJDE, vol. 2000, No. 48, 2000, pp. 1-26.

[30] G.J. Fix, *Phase field methods for free boundary problems, Free boundary problems: theory and applications*, pp. 580-589, 1983.

[31] A. Friedman, *Foundations of Modern Analysis*, Hold, Rinehart and Winston, INC, 1970.

[32] A. Friedman, *Partial Differential Equation of Parabolic Type*, Prentice-Hall.

[33] C.G. Gal and M. Grasselli, *Longtime behavior for a model of homogreneous incompressible two-phase flows*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Vol 28, N° 1, 2010.

[34] P.G. de Gennes, Mol. Cryst. Liq. Cryst., 12 (1971), p. 193.

[35] V.L. Ginzburg and L.D. Landau, Soviet Phys., JETP 20 (1950), p. 1064.

[36] V. Girault & P. A. Raviart, *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes equations*, Lecture Notes in Mathematics, 749, Springer-Verlag, 1970.

[37] P.C. Hohenberg and B. I. Halperin, *Theory of dynamic critical phenomena*, Rev. Mod. Phys, 49 (1977), pp. 435-479.

[38] K.H. Hoffman and L. Jiang, *Optimal Control a phase field model for solidification*, Numer. Funct. Anal. Optimiz. 13 (1& 2), 1992, pp. 11-27.

[39] J. Jiang, *Convergence to equilibrium for parabolic-hyperbolic phase field model with Catteano heat flux law*, pp. 149-169, 2008.

[40] O.A. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon and Breach Science Publishers Inc, 1969.

[41] O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'ceva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, American Mathematical Society, Providence, 1968.

[42] J.S. Langer, in : G. Grinstein, G. Mazenko (Eds.), *Directions in Condensed Matter Physics*, World Scientific, Philadelphia, 1986, p. 165.

[43] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non lineéaires*, Études Mathématiques, Dunod, Paris, 1969.

[44] J. L. Lions and E. Magenes , *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Vol I, Dunod, Paris, 1970.

[45] J. L. Lions, *Control of distributed singular systems.* John Wiley & Sons Inc., 1987.

[46] P. L. Lions, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics*, vol 1, Clarendon Press Oxford, 1996.

[47] S.A. Lorca and J.L. Boldrini, *The initial value problem for a ageneralized Boussinesq model*, Nonlinear Analysis, 36, (1999), pp. 457-480.

[48] L. A. Medeiros, *Tópicos em Equações Diferenciais Parciais*, Parte I, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2006.

[49] A. Miranville and R. Quintanilla, *A generalization of the Caginalp phase field system basead on the Cateaneo law*, 2009, Article in press.

[50] C. Moroşanu and D. Motreanu, *A generalized phase-field system*, J. Math. Anal. Appl., vol. 273, 1999, pp. 515-540.

[51] N. Moelans, B. Blanpain and P. Wollants, *An introduction to phase-field modeling of microstruture evolution*, Comp. Coupl. Phase. Diag. and Thermochemistury, 32 (2008), pp. 268-294.

[52] J. Otta, *Quasikinear elliptic and parabolic Differential Equations and Bi stable equations*, Doctoral Thesis, Faculty of Applied Sciences, Unversity of West Bohemia, 2010.

[53] O. Penrose and P.C. Fife. *Thermodynamically consistent* models of phase-field type for the kinetic phase transitions. Phys D, vol **43**(1990), pp. 44-62.

[54] O. Penrose and P.C. Fife, *On the relation between the standard phase-field model and a thermodynamically consistent phase-field model*, Phys. D, vol. 69, 1993, pp. 107-113.

[55] J. Rappaz and J.F. Sheid, *Existence of solutions to a phase-field model for the isothermal solidification process of binary alloy*, Math. Methods Appl. Sci., 23(6)(2000), pp. 491-513.

[56] E. Rocca, *Some phase transition models of Penrose-Fife*, Doctoral Thesis, Università di Pavia, 2002.

[57] J.S. Rowlinson and B. Widom, *Molecular Theory of Capillarity*, Clarendon Press, Oxford, 1989.

[58] L. Rubinstein, *The Stefan Problem*, Amer. Math. Society., Providence, 1971.

[59] J. Simon, Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. Annali di Matematica Pura ed Applicata, Serie Quarta, Tomo CXLVI, pp. 65-96, 1987.

[60] J. Sprekels and S. Zheng, *Global smooth solutions to a thermodynamically consitent model of phase field type in higher space dimensions*, J. Math. Anal. Appl., vol 176, No. 1(1993), pp. 200-223.

[61] R. Temam, *Behaviour at time $t = 0$ of the solutions os semi-linear evolution equations*, J. Differential Equations, 17, (1982), pp. 73-92.

[62] R. Temam, *Navier-Stokes equations: Theory and Numerical Analysis*, Studies in Mathematical and its aplications, Vol 2, 1977.

[63] J.M. Urband, *A Stacionary Stefan problem with convection and nonlinear diffusion*, Portugaliae Mathematica, Vol 52, Fasc. 4, 1995.

[64] V.R. Voller and C. Prakash, *A fixed grid numerical modelling methodology for convection-diffusion mushy region phase-change problems*, Int. J. Mass. Tranfer, vol. 30, 1987, 8, pp. 1709-1719.

[65] V.R. Voller, M. Cross and N.C. Markatos, *An enthalpy method for convection/diffusion phase field models of solidification*, Int. J. Num. Methods. Eng. vol. 24, 1987, 1, pp. 271-284.

[66] E. Zeidler, *Applied functional fnalysis: applications to Mathematical Physics*, Springer, Vol 108, New York, 1991.

[67] E. Zeidler, *Nonlinear functional fnalysis and its applications II/A: Linear monotone operators*, Springer, New York, 1990.

[68] L. Zhao, B. Guo and H. Hung, *Vanishing viscosity limit for a coupled Navier-Stokes/Allen-Cahn system*, prepeint, 2010.

[69] S. Zheng, *Global existence for a thermodynamically consistent model of phase field type*. J. Diff. Integral Equations 5, 1992, p.p. 241-253.

[70] S. Zheng, *Nonlinear parabolic equations and hyperbolic- parabolic coupled systems*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematical, No. 76, Logman Scientific & Technical, 1995.

[71] A.A. Wheeler, W.J. Boettinger and G.B. McFaden, *Phase field model of solute trapping during solidification*, Phys. Rev. E, vol. 47, 1993, 3, pp.1893-1909.

editAedi

Assessoria de Educação a Distância • UFPA