

MATERIAL DIDÁTICO DO ALUNO

Júnio Cândido dos Santos
Rafael José Alves do Rego Barros

Nos passos de Arquimedes

**O USO DA HISTÓRIA NO
ENSINO DA MATEMÁTICA
PARA DISCUTIR
GEOMETRIA PLANA**

O Método Clássico de Arquimedes
O número π - Círculo e Circunferência
Desenho Geométrico - Trigonometria
Teorema de Pitágoras



Todo conteúdo deste trabalho, exceto quando houver ressalva, é publicado sob a licença **Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional**.

Copyright © 2020 Editora EditAedi Todos os direitos reservados.

Reitor

Prof. Dr. Emmanuel Zagury Tourinho

Vice-Reitor

Prof. Dr. Gilmar Pereira da Silva

EDITORA DA ASSESSORIA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

Membros do Conselho Editorial

Presidente

Prof. Dr. José Miguel Martins Veloso

Diretora

Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz

Membros do Conselho

Prof. Dr. Aldrin Moura de Figueiredo

Prof. Dr. Iran Abreu Mendes

Profa. Dra. Maria Ataíde Malcher

Autores

Júnio Cândido dos Santos

Rafael José Alves do Rego Barros

Editores Eletrônicos

Ma. Andreza Jackson de Vasconcelos

Editora

EditAedi

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Santos, Júnio Cândido dos; Barros, Rafael José Alves do Rego. Nos Passos de Arquimedes: o uso da História no Ensino da Matemática para discutir Geometria Plana (Material Didático do Aluno). Belém: EditAedi/UFPa, 2020.

ISBN: 978-65-86640-17-5

1. Matemática
 2. História
 3. Geometria Plana
-

Júnio Cândido dos Santos
Rafael José Alves do Rego Barros

MATERIAL DIDÁTICO DO ALUNO

Nos passos de Arquimedes

**O USO DA HISTÓRIA NO
ENSINO DA MATEMÁTICA
PARA DISCUTIR
GEOMETRIA PLANA**

1ª Edição

BELÉM - PARÁ



Assessoria de Educação a Distância • UFPA

2020

Prefácio

Diversos pesquisadores brasileiros e estrangeiros do campo da Educação Matemática discutem sobre o ensino da matemática escolar. Uma boa parte dessas pesquisas reflete o significado dos conteúdos ensinados e se são contextualizados de acordo com a realidade educacional em que o estudante está inserido. Nesse contexto, a História da Matemática permite compreender que as teorias atualmente elaboradas com elegância e aparentemente concluídas resultaram, quase sempre, de desafios enfrentados pela sociedade em geral e que os matemáticos buscaram soluções para vencer tais desafios por meio de processos de criação, recriação e descoberta.

Este livro que o leitor tem em mãos resulta de uma pesquisa de Mestrado¹ de autoria de Júnio Cândido dos Santos, sob a orientação de Rafael José Alves do Rego Barros, desenvolvida no âmbito do Mestrado em Educação Profissional e Tecnológica (ProfEPT) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), defendida em 2020. A referida pesquisa busca desafiar a proposição do uso da História da Matemática como um recurso pedagógico para subsidiar professores e alunos do Ensino Médio Integrado nas aulas de Geometria Plana e passou por análise de um grupo de professores de Matemática de três Institutos Federais: IFPB, IFPE e IFRN.

Júnio Cândido dos Santos parte das sugestões didáticas dispostas na tese de Doutorado de Barros² (2016) que defende a existência de potencialidades conceituais e didáticas, para o uso no Ensino Médio, em dissertações de mestrado e teses de doutorado que discorreram sobre História da Matemática produzidas nos programas de Pós-graduação do Brasil entre 1990 e 2010. Para isso, levou em consideração, evidentemente, que tais dissertações e teses podem ser utilizadas na Educação Básica para abordar conceitos matemáticos mediante a reorganização pedagógica adequada a esse nível de ensino. Os potenciais didáticos do uso da História da Matemática em sala de aula dispostos na tese de Doutorado de Barros foram potencializados pelos autores deste livro, os quais desenvolveram um material inovador e prático de Geometria Plana com o objetivo de aplicabilidade em sala de aula numa abordagem direcionada à História da Matemática no Ensino, em consonância com os estudos de Mendes (1997, 2001, 2015). A base teórico-epistemológica, tanto do trabalho de Santos (2020) quanto da tese de doutoramento de Barros (2016), advém dos estudos desenvolvidos pelo professor Iran Abreu Mendes, desde a década de 1990, acerca do uso da História da Matemática no ensino dessa disciplina³.

¹ A dissertação intitula-se *Histórias de circunferência e círculo: possibilidades didáticas na Educação Profissional e Tecnológica*.

² BARROS, Rafael José Alves do Rego. *Pesquisas sobre história e epistemologia da matemática contribuições para abordagem da matemática no ensino médio*. 2016. 243f. Tese (Doutorado em Educação) - Centro de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

³ MENDES, Iran Abreu. *Ensino de trigonometria através de atividades históricas*. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-graduação em Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 1997.

Este livro faz uso da *História no Ensino da Matemática para discutir Geometria Plana* e traz o *Problema da Quadratura do círculo*, demonstrando tanto geometricamente quanto por prova de contradição da existência dos números irracionais, métodos geométricos para a construção de polígonos e polígonos inscritos e circunscritos em uma circunferência. Um texto sobre a construção do número π , uma demonstração para determinar um valor aproximado do número π , uma demonstração para as fórmulas do cálculo da área do círculo e do perímetro da circunferência, uma biografia de Arquimedes, uma biografia sobre Pitágoras e os Pitagóricos, uma demonstração para o Teorema de Pitágoras, um texto informativo sobre as origens dos nomes do seno, cosseno e tangente, um texto informativo sobre como os povos da antiguidade se relacionavam com a Matemática e uma compilação da definição de vários conceitos ligados à Geometria plana sobre círculo e circunferência, bem como o Teorema de Tales e a Trigonometria.

Aborda, também, por meio de uma seção denominada *Para Refletir!*, contendo 10 questionamentos, dentro do que se propõe o Ensino Médio Integrado, a fim de se refletir, de forma crítica, sobre o homem e a sociedade. São questões sobre o colonialismo cultural, o avanço da ciência e a desigualdade social, a dualidade do sistema educacional, o machismo, a relação entre a ciência e o subdesenvolvimento de alguns países, a construção do conhecimento, a desvinculação entre a escola e o trabalho, a importância do indivíduo na história, o conservadorismo e o racismo. A seção finaliza com um poema de Bertolt Brecht intitulado “Perguntas de um trabalhador que lê”. Destacamos que essa seção possui o intuito de demonstrar, para aqueles que se propuserem a realizá-la, que a discussão sobre as questões sociais pode ser levantada a partir do uso de textos sobre a História da Matemática.

Podemos vislumbrar também um *Glossário* contendo as definições de sessenta termos relacionados à Geometria plana que aparecem ao longo do texto e, ainda, as fórmulas para o cálculo da área de sete figuras planas.

Escrito em linguagem clara e objetiva, com o propósito de ser utilizado nas salas de aula de Matemática de todo o Brasil como um material complementar de Geometria Plana no Ensino Médio Integrado, abordando a Matemática com significado histórico, a dissertação de Mestrado que se transformou neste livro foi avaliada e recebeu contribuições relevantes da banca examinadora, composta pelos professores Iran Abreu Mendes, Rony Claudio de Oliveira Freitas e Carlos Aldemir Farias da Silva, tanto no exame de qualificação quanto na sessão de defesa pública. Tais contribuições qualificaram, ainda mais, o livro que ora chega às mãos dos professores de Matemática espalhados pelas diferentes regiões geográficas do Brasil. Por fim, desejo a todos uma boa leitura.

RAFAEL JOSÉ ALVES DO REGO BARROS
Professor do Instituto Federal da Paraíba (IFPB)
Coordenador Acadêmico Local do ProfEPT

³ MENDES, Iran Abreu. *O uso da história no ensino da matemática*. Reflexões teóricas e experiências Belém: EDUEPA, 2001. (Série Educação no 1). MENDES, Iran Abreu. *História da Matemática no Ensino*. Entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisas. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2015. (Col. História da Matemática para Professores).



SUMÁRIO

04

APRESENTAÇÃO

05

INTRODUÇÃO

06

A QUADRATURA DO CÍRCULO

16

SAIBA MAIS: Arquimedes

20

A GÊNESE DO NÚMERO PI

29

SAIBA MAIS: Pitágoras e os Pitagóricos

32

PARA REFLETIR! 10 questão para se pensar

35

O MÉTODO CLÁSSICO DE
ARQUIMEDES

59

SAIBA MAIS: Trigonometria

61

CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO

69

UM POUCO DE HISTÓRIA

76

GLOSSÁRIO

87

REFERÊNCIAS E CRÉDITOS

Apresentação

Olá! O trabalho que você tem em mãos é o resultado de estudos realizados por pesquisadores ligados ao Uso da História da Matemática no Ensino. Ele foi desenvolvido a partir da pesquisa intitulada Cartografia da Produção em História da Matemática no Brasil: Um estudo Centrado nas Dissertações e Teses defendidas entre 1990 e 2010, da dissertação A Quadratura do Círculo e A Gênese do Número π , da tese Pesquisas Sobre Histórias e Epistemologia da Matemática: Contribuições para A Abordagem da Matemática no Ensino Médio e da dissertação Histórias de Circunferência e Círculo: Possibilidades Didáticas na Educação Profissional e Tecnológica.

O objetivo deste trabalho é, fazendo uso da história no ensino da matemática, discutir e demonstrar alguns conceitos e fórmulas da Geometria Plana e, neste processo, utilizando a possibilidade de relacionamentos com outras disciplinas, proporcionar a reflexão sobre a sociedade atual. O Uso da História no Ensino da Matemática é caracterizado pela preocupação com fins pedagógicos, usando fragmentos da História da Matemática e tendo como referência as atuais tendências das pesquisas em história da Matemática.

A apresentação do Método Clássico de Arquimedes nos dará a oportunidade de trabalhar com a Geometria Plana, abordando alguns dos seus conceitos, mas com foco principal na discussão sobre a Quadratura do Círculo, o Número π e a Área do Círculo e o Comprimento da Circunferência. Mas, como tudo em Matemática e História está interligado, estudaremos um pouco do Teorema de Pitágoras, de Trigonometria, e sobre os povos da antiguidade que nos legaram todo este conhecimento.

O trabalho está dividido em quatro capítulos, onde são trabalhados os conteúdos de geometria; em subseções intituladas Saiba Mais (curiosidades sobre personagens históricos e sobre a Matemática) e Um Pouco de História (onde conhecemos um pouco mais sobre povos antigos e sua relação com a Matemática). Temos ainda um glossário, onde alguns termos usados são esclarecidos. Para as professoras e professores temos alguns direcionamentos, pensados para ajudar a usar o material.

Para chegarmos aos resultados propostos utilizaremos do Desenho Geométrico. Mas não se espantem. Não é nada que requeira habilidades especiais de desenho. Ah! Ia esquecendo... Esteja preparado para usar tanto os Instrumentos Euclidianos, ou seja, o compasso e a régua não graduada quanto a calculadora científica.

Introdução

Quem nunca na vida se perguntou de onde vem a fórmula de Bhaskara? Ou de onde veio o Teorema de Pitágoras? Ou, afinal, quem foi Pitágoras que dá nome ao famoso teorema? E o que é um teorema? De onde vem a fórmula para o cálculo da área do triângulo? Bem, estas são algumas das fórmulas que, na maioria das vezes, nos são entregues prontas, e como dizem, “de mão beijada”. Se prestarmos atenção, são tantos questionamentos. E nunca deveríamos deixar um questionamento sem resposta.

Uma forma de você encontrar as respostas para as perguntas relacionadas não somente à matemática, mas, também, a qualquer outra questão relacionada à sua vida, é olhar para o passado.

Neste trabalho você encontrará ao menos solução para três questionamentos:

Por que o valor de π é 3,141592...?

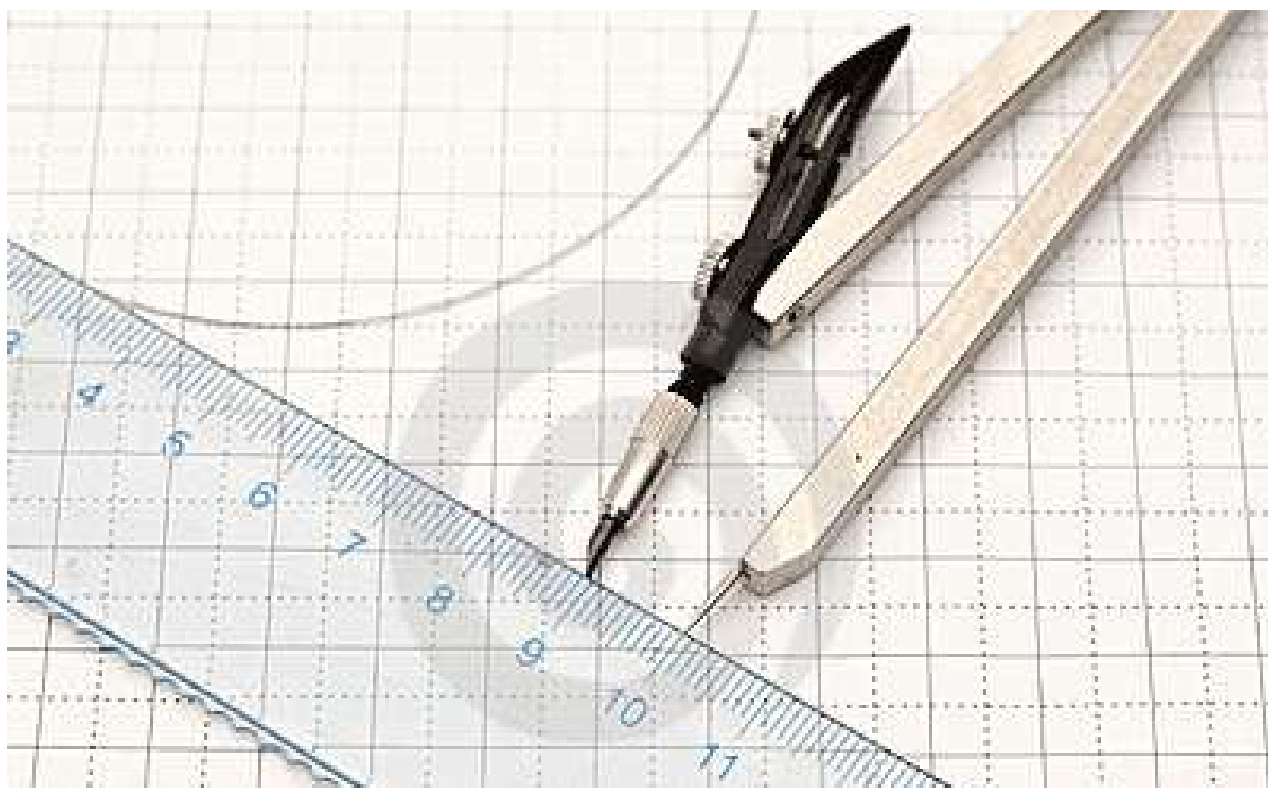
Por que o perímetro da circunferência mede $2\pi r$?

Por que a área do círculo é mede πr^2 ?

Afinal, são conceitos que fazem parte do nosso cotidiano escolar e profissional.

Para ajudar você a encontrar as respostas para estas perguntas recorreremos à História da Matemática, utilizando de métodos e técnicas tanto antigas quanto contemporâneas. Também, pedimos que considerem todas as fórmulas e valores acima mostrados como já conhecidos. O que vamos fazer é a sua demonstração.

A QUADRATURA DO CÍRCULO



Para ajudar você a encontrar as respostas para alguns daqueles questionamentos iniciais, apresentaremos-lhe o problema da Quadratura do Círculo. **E não é pouca coisa!** Este problema é um dos mais célebres de toda a história da matemática e considerado pelos antigos gregos como um dos mais difíceis.

Vamos conhecê-lo a partir de um exemplo prático:

Digamos que você está trabalhando na construção de uma casa e o proprietário coloca para você o seguinte problema:

— Estive analisando a planta baixa do jardim e quero fazer uma alteração nesta piscina que tem a forma de um círculo. Quero que tenha a forma de quadrado. Porém, quero que a nova piscina ocupe a mesma área que a anterior. Você pode me mostrar agora como, exatamente, ficaria o desenho da nova piscina?

Claro que você não vê nenhum problema nisso. Vai procurar o material de desenho e lá só encontra apenas uma régua e um compasso.

Vamos organizar nosso trabalho. A primeira coisa a se fazer é reescrever o problema. Como você faria isto?

Dando prosseguimento, inicialmente, precisamos, para realizar esta construção geométrica, saber quanto deve medir um dos lados do quadrado. Vamos chamá-lo de “ l ”. Para isto, já que estamos partindo da área de um círculo de raio dado, obviamente, queremos que a área do quadrado seja igual à área do círculo. Chamemos de A_{quadrado} a área do quadrado e $A_{\text{círculo}}$ a área do círculo. Então:

$$A_{\text{quadrado}} = A_{\text{círculo}}, \text{ e daí,}$$

$$l^2 = \pi \cdot r^2$$

Simples, não é mesmo? Agora atribua um valor natural a r , o raio dado, resolva a equação, isto é, encontre um valor para l e construa seu quadrado. Vamos, lá! Mãos à obra!



É, para determinarmos l , o lado do quadrado que desejamos construir, precisamos apenas traçar um segmento de reta de comprimento $\sqrt{\pi}$.

Acabamos de esbarrar no mesmo problema que os antigos matemáticos gregos: **como construir $\sqrt{\pi}$?**

A possibilidade de construir um segmento de reta que mede $\sqrt{\pi}$ foi o que motivou muitos matemáticos durante séculos a tentar quadrar o círculo usando apenas régua e compasso. Até que, em 1882, o matemático alemão Lindemann (1852 – 1939) provou a impossibilidade de se fazer tal construção, ou seja, é impossível quadrar o círculo usando régua e compasso apenas.

Para que você entenda um pouco mais sobre a impossibilidade de construir um segmento que mede $\sqrt{\pi}$, vamos conhecer um pouco mais sobre os Números Irracionais.

Surgidos do processo de contagem de coleções finitas de coisa, os Números Inteiros são abstrações construídas para suprir as necessidades diárias. Eles são usados, por exemplo, na medida de quantidades, tais como, comprimento, volume, massa e tempo.

Como muito raramente estas medições são associadas a um número exato, necessita-se utilizar frações deste número. Por isso, definimos como sendo um Número Racional o quociente $\frac{p}{q}$, com $q \neq 0$, de dois Números Inteiros.

Para os Números Racionais existe uma representação geométrica simples. Porém, a nem todos os pontos de uma reta corresponde um número racional. Foram os Pitagóricos que fizeram esta grande descoberta. Novos números foram criados para corresponder a estes pontos e, como não eram Racionais, foram chamados de Irracionais, significando não Racionais.

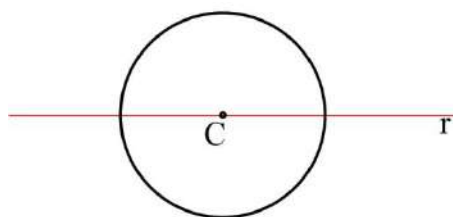


Veja como podemos proceder para encontrar o número irracional $\sqrt{2}$. Vamos construir, primeiramente, um quadrado de lado medindo uma unidade. Para isto, vamos seguir os seguintes passos:

1. Construa a reta r :

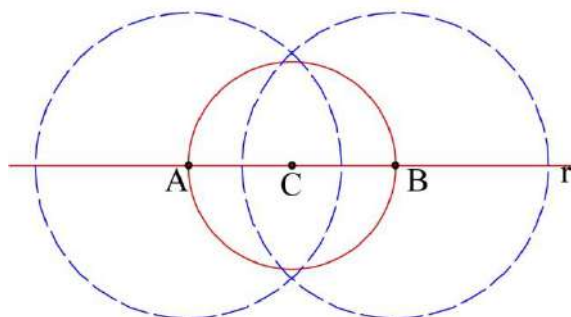


2. Sobre a reta marque um ponto C e trace uma circunferência de raio qualquer:



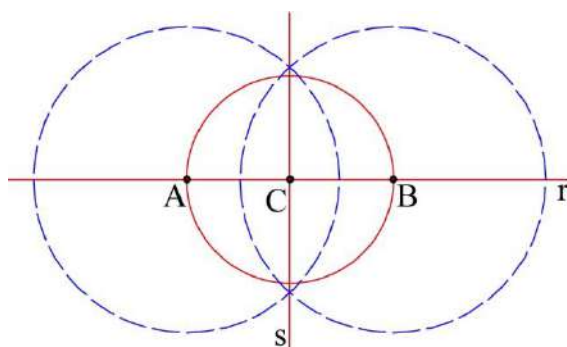
Você acabou de desenhar uma circunferência, então, defina a circunferência e o círculo.

3. A partir de cada ponto de intersecção A e B entre o segmento de reta e a circunferência trace outra circunferência com uma abertura fixa qualquer do compasso. Teremos três circunferências de centros A, B e C.



Como se chamam respectivamente as distâncias entre os pontos A e C e os pontos A e B?

4. Ligue os pontos de intersecção das duas últimas circunferências com a primeira e teremos uma reta s, que é perpendicular à reta r.

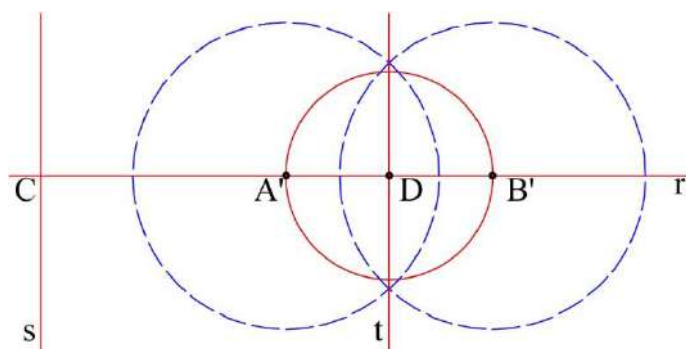


Até agora, falamos muito sobre reta, mas na figura anterior podemos destacar além das retas tanto semirretas quanto segmentos de retas. Com base na figura, defina reta, segmento de reta e semirreta, dando pelo menos um exemplo de cada uma:

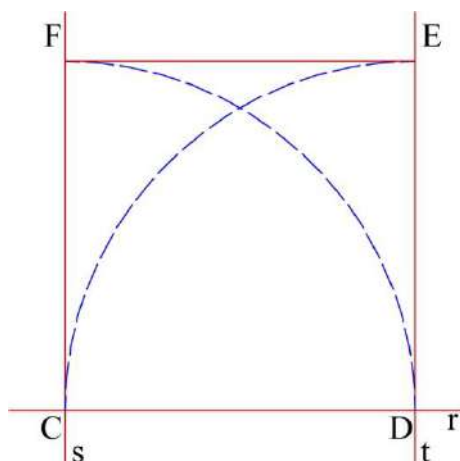
Qual é a condição para que a reta s seja perpendicular à reta r ?

Dando continuidade, agora, à construção do quadrado:

5. Sobre o primeiro segmento de reta marque um ponto D , sobre este ponto trace uma nova circunferência e na sua intersecção com a reta marque os pontos A' e B' . Com o compasso, com a mesma abertura e sobre esses novos pontos, construa duas novas circunferências e, nos pontos onde elas se interceptam, trace a reta t . Ou seja, estamos repetindo todo procedimento anterior para obter outro segmento de reta perpendicular.

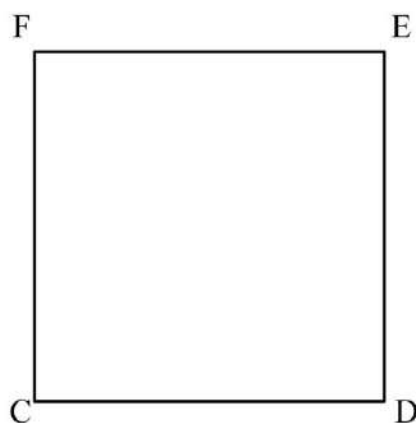


6. Com o compasso em C e com a abertura em D, trace um arco em sentido anti-horário até encontrar o segmento de reta s, onde será marcado o ponto F. Em seguida, com o compasso em D e abertura em C, trace um arco de circunferência em sentido horário até encontrar a reta t, onde deve ser marcado o ponto E. Ligue o ponto F ao ponto E.



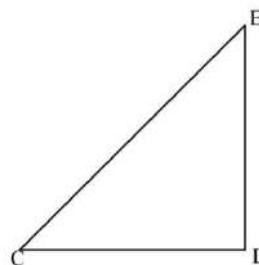
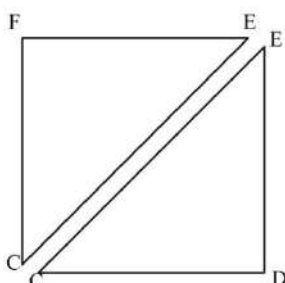
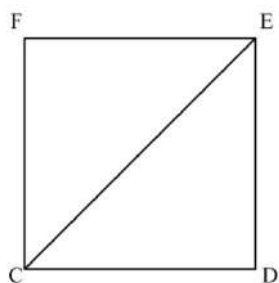
Observe que, se com o compasso déssemos a volta completa, formaríamos uma circunferência. A partir do desenho feito por você, como podemos definir arco de circunferência?

7. Temos, por esta feita, o nosso quadrado CDEF.



Como você deve saber, o polígono anterior é um quadrado. Com base na sua construção, como você define um quadrado?

Agora que temos um quadrado, vamos traçar uma de suas diagonais. Basta ligar, por exemplo, os pontos C e E. Observe que como o traçado da diagonal, obtemos dois triângulos retângulos. Vamos tomar o triângulo CDEF.

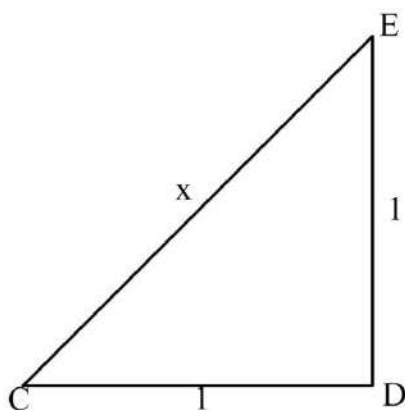


No quadrado CDEF foi traçada a diagonal $\overline{CE}$. O que é uma diagonal de um polígono?

Ao traçarmos a diagonal do quadrado, dividimo-lo em dois outros polígonos iguais. Sabendo disto, responda: uma diagonal sempre divide um polígono ao meio? Por quê?

O polígono formado pelos lados $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EC}$, recebe que nome? E de que forma ele é classificado, já que um de seus ângulos corresponde a um dos ângulos do quadrado?

Você deve estar lembrado que nosso quadrado tem lados que medem 1 unidade de medida. Determine a medida desta diagonal:



Está obtido através de um método geométrico seu primeiro número irracional. Durante algum tempo, o único número irracional conhecido foi $\sqrt{2}$.

Para provar que $\sqrt{2}$ é um Irracional, ou seja, não é Racional e, portanto, não pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, com $q \neq 0$, sendo p e q números inteiros e primos entre si, vamos atentar para o seguinte: se s é um número inteiro positivo, então, s^2 é par se, e somente se, s é par. Agora, vamos supor, para efeito de raciocínio, que $\sqrt{2}$ é Racional, isto é, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Temos, então:

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2}$$

$p = q\sqrt{2}$, e elevando ambos os os lados da igualdade ao quadrado:

$$(p)^2 = (q\sqrt{2})^2$$

$$p^2 = 2q^2. \text{ (I)}$$

Podemos concluir que p^2 é par, pois, é o dobro de um número inteiro. Fazamos $p = 2t$ em (I), daí :

$$(2t)^2 = 2q^2$$

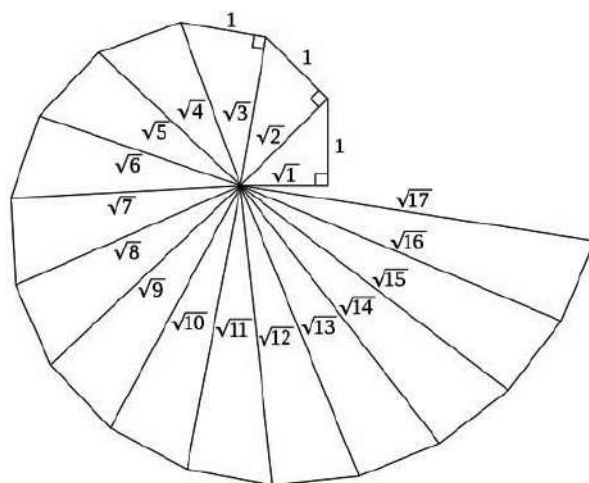
$$4t^2 = 2q^2, \text{ ou seja, } q^2 = 2t^2.$$

De onde podemos concluir que q^2 é par, pois, como p^2 é o dobro de um número inteiro. Mas isto é impossível, porque, inicialmente, admitimos que p e q são primos entre si.

Portanto, supor que $\sqrt{2}$ é racional leva a uma contradição e deve ser abandonada.



Segundo Platão, mais tarde, Teodoro de Cirene (465 a. C.) mostrou que $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$ são irracionais. Teodoro provou isto construindo uma espiral que leva seu nome. Você, utilizando o procedimento anterior pode construí-la.



Agora que conhecemos um pouco mais sobre os Números Racionais, podemos dizer, na verdade, o que queríamos ao introduzir o problema da Quadratura do Círculo era atentar para o fato de que quadrar o círculo consiste no estudo da natureza do número π . O que é este número π ? Por que não conseguimos construir um segmento de reta com a sua medida?

Curioso sobre este número que tem motivado o trabalho de matemáticos desde a antiguidade? Então, vamos, no próximo capítulo, conhecer um pouco mais sobre ele.

SAIBA MAIS

ARQUIMEDES



UMA BREVE BIOGRAFIA

“DÊ-ME UMA ALAVANCA E MOVEREI A TERRA.”

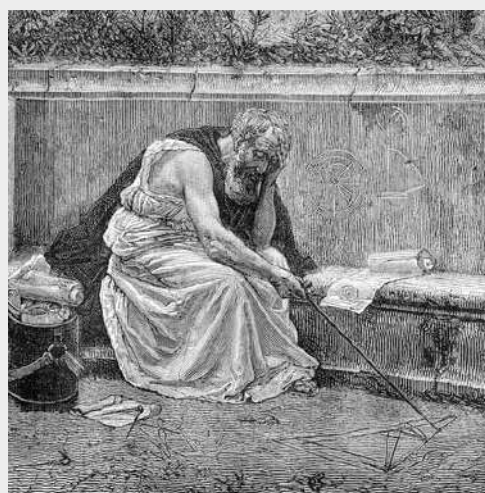
Arquimedes nasceu na cidade de Siracusa, localizada na ilha da Sicília, por volta de 287 a. C., e morreu, também, em Siracusa, durante o saque a esta cidade em 212 a.C.. Existem registros de que Arquimedes esteve por algum tempo no Egito, muito provavelmente, na Escola de Alexandria. Entre seus amigos figuravam Cônon, Dositeo e Erastótenes. Sendo os dois primeiros sucessores de Euclides e o último bibliotecário desta escola. Todos

frequentaram esta famosa escola. Há relatos feitos por historiadores romanos de muitas histórias sobre Arquimedes. Uma dessas histórias justifica a sua, talvez, mais conhecida frase: “Dê-me uma alavanca e moverei a Terra.”. Segundo a narrativa, Arquimedes conseguiu mover, sozinho e sem esforço algum, um navio pesadamente carregado que se encontrava no cais da cidade, usando apenas um sistema de polias compostas.



“EUREKA! EUREKA!”

Os relatos afirmam sua capacidade de imensa concentração mental para resolução de um problema, e, também, sua distração quando imerso nessa atividade. Como prova disto, temos a conhecidíssima história da coroa do rei Hierão. Consta que este rei mandou um ourives confeccionar uma coroa com dado peso de ouro. Mas, Hierão passa a suspeitar que foi enganado e que na coroa há, oculta, prata. A questão é passada a Arquimedes, que encontrou a solução para o problema quando se encontrava em um banho público, descobrindo, como consequência, a primeira lei da Hidrostática. Eufórico por ter descoberto a solução, Arquimedes esqueceu-se de vestir-se e saiu a correr nu pelas ruas, gritando “Eureka! Eureka!” (Achei! Achei!).



O CERCO SOB SIRACUSA

COM A AJUDA DE ARQUIMEDES, SIRACUSA RESISTIU POR QUASE TRÊS ANOS ÀS INVESTIDAS DO GENERAL MARCELO



Outro desses relatos refere-se ao sítio imposto à cidade de Siracusa pelos romanos comandados pelo general Marcelo. Conta-se que Arquimedes criou vários engenhos para ajudar na defesa da cidade, tais como, catapultas móveis e com alcance ajustável, que arremessavam pesos nos navios inimigos que da cidade se aproximavam; guindastes que levantavam do mar os mesmos navios inimigos que se aproximavam do porto da cidade; e enormes espelhos ustórios capazes de incendiar vasos de guerra inimigos. Por causa das engenhosas máquinas de guerra de Arquimedes, a cidade de Siracusa resistiu ao cerco por quase três anos. Consta que o general Marcelo desenvolveu, por esta razão, profundo respeito por Arquimedes.

**ARQUIMEDES CRIOU
CATAPULTAS MÓVEIS,
GUINDASTES E ENORMES
ESPELHOS USTÓRIOS**

O GRANDE MATEMÁTICO

ARQUIMEDES ESTÁ ENTRE OS MAIORES MATEMÁTICOS DE TODOS OS TEMPOS E, COM CERTEZA, FOI O MAIOR DE TODA A ANTIGUIDADE

Consideradas obras-primas de exposição matemática, os seus trabalhos lembram muito mais artigos das especializadas revistas modernas. Exibem originalidade, rigor nas demonstrações e habilidade computacional, refletindo o uso de uma linguagem objetiva e muito bem acabada. Há vestígios de que alguns de seus tratados estejam perdidos, mas, cerca de dez tratados foram conservados até atualmente. Sendo sua mais notável contribuição dada ao desenvolvimento inicial dos métodos do cálculo integral.

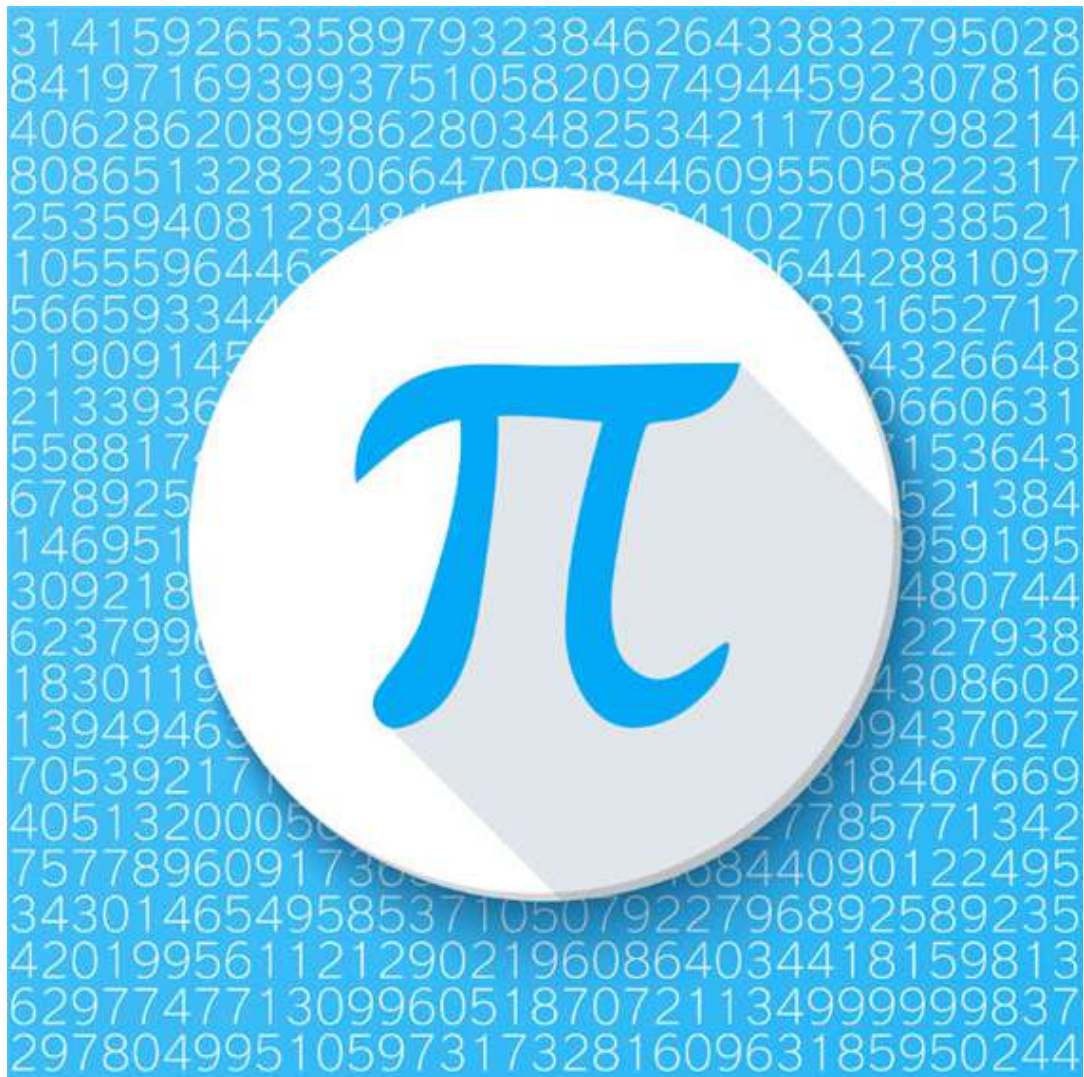
Entre muitos de seus trabalhos, três deles se dedicam à geometria plana: A Medida de um Círculo, A Quadratura da Parábola e Sobre Espirais. Foi no primeiros destes trabalhos que Arquimedes inaugura o método clássico para o cálculo de π . Dois outros trabalhos estão relacionados à geometria espacial: Sobre a Esfera e o Cilindro e Sobre os Cones e Esferóides.

Há dois opúsculos sobre aritmética. Um está perdido e o outro, introduziu um novo sistema de numeração. Há, também, trabalhos sobre matemática aplicada: Equilíbrio de Figuras Planas e Sobre os Corpos Flutuantes.

Arquimedes fazia a exploração de sua geometria em figuras desenhadas em cinzas da lareira ou no óleo que servia para besuntar, após o banho, o seu corpo. Foi devido a este costume e a sua habitual distração quando mergulhado na resolução de um problema, que Arquimedes encontrou a sua morte. No saque a Siracusa, um dos soldados que fazia a pilhagem se interpôs entre Arquimedes e um diagrama que ele traçava na areia. O geômetra teria ordenado ao soldado que se afastasse e o saqueador, sem titubear, o trespassou com a sua lança. Arquimedes está entre os maiores matemáticos de todos os tempos e, com certeza, foi o maior de toda a antiguidade.



A GÊNESE DO NÚMERO PI



A ideia do número π tal qual a constatação de que ele é um número representado por inúmeras casas decimais não veio pronta.

O número π é representado pela 16ª letra do alfabeto grego, sendo escolhida por ser a primeira letra da palavra “periféria” (περιφέρεια), que quer dizer, do grego, circunferência.

Vamos ver, inicialmente, como ocorreu a construção do número π , conhecendo como ele

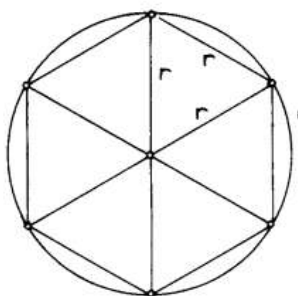
foi construído ao longo da História e por diferentes povos.

Cronologia de π

Os primeiros registros de uma história documentada da matemática datam de por volta de 2000 a. C. e são dos babilônicos e egípcios os primeiros povos que demonstram conhecimento

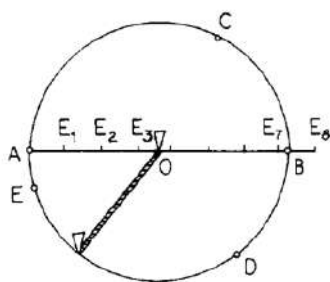
do número π . Para os babilônicos $\pi = 3\frac{1}{8} = 3,125$ e para os egípcios $\pi = 4 \cdot (\frac{8}{9})^2 = 3,16049...$ Não sabemos como estes povos antigos chegaram a estes valores. Mas podemos fazer algumas inferências.

Um consenso entre a maioria dos historiadores é de que a matemática surgiu na Mesopotâmia. Em uma tábua encontrada em 1936, os conhecimentos matemáticos dos sumérios demonstram a relação $\frac{6r}{c}$, onde r é o raio da circunferência e c é o comprimento da circunferência, conforme a figura seguinte:



Os babilônicos sabiam, portanto, que o perímetro do hexágono regular era igual a seis vezes o raio da circunferência circunscrita ao mesmo hexágono. Na tábua tem a informação de que há a proporção entre o perímetro do hexágono regular e a circunferência circunscrita ao mesmo hexágono de $\frac{57}{60} + \frac{36}{(60)^2}$ (notação sexagenal).

Os egípcios, por sua vez, acostumados a lidar com as constantes alagações do Rio Nilo, tiveram que desenvolver técnicas para remarcar as áreas destinadas às plantações e que haviam sido alagadas. O problema era que um agricultor não invadisse ou roubasse terras de outro e, para isto, na areia molhada era fincada uma estaca, onde era presa uma corda, que era esticada da estaca (o centro) até um ponto A e, novamente, da estaca até o ponto B, tendo uma unidade de medida AB, como na figura seguinte:



Com isto, os egípcios observaram que colocando uma das extremidades da corda em A e seguindo a circunferência desenhada no chão, chegava-se em C e, novamente realizando o mesmo procedimento partindo de C, chegava-se em D. Com o mesmo procedimento, chegava-se em E, e verificava-se que o comprimento da circunferência é igual a três vezes o diâmetro e mais um pouco.

Os egípcios observaram também que com o arco AE poderia ser colocado sobre o diâmetro AB de sete a oito vezes. Com isto obtiveram a aproximação para o comprimento do círculo entre $3\frac{1}{8}$ e $3\frac{1}{7}$. Obtendo:

$$3,125 < \pi < 3,142857...$$

Nenhum outro problema, provavelmente, exerceu sobre os matemáticos tanto fascínio e se mostrou tão duradouro quanto aquele de construir um quadrado de área igual à área de um círculo dado. Mesmo sendo demonstrado a impossibilidade de se quadrar o círculo, através de instrumentos euclidianos, a todo ano se renova a safra de “quadradores do círculo”.

Por volta de 1800 a. C. os egípcios haviam “resolvido” o problema. Para fazer isto, eles tomaram um quadrado de lado igual a $\frac{8}{9}$ do diâmetro do círculo dado. É do egípcio Ahmes, autor do famoso papiro de Rhind que vem a “solução”: “a área de um círculo é igual a de um quadrado cujo lado é igual a de um quadrado cujo lado (d) é o diâmetro (2r) do círculo subtraindo-se sua nona parte”. Isto é,

$$S = \left(\frac{8}{9} d\right)^2 = \frac{64}{81} d^2 = \frac{64 (2r)^2}{81} = \frac{256 r^2}{81}$$

Fazendo $S = \pi r^2$, temos:

$$\frac{256 r^2}{81} = \pi r^2. \text{ Daí, } \frac{256}{81} = \pi, \text{ ou seja, } \pi = 3,1604...$$

Na china antiga, muitos matemáticos se dedicaram a determinar o valor de π . É creditado



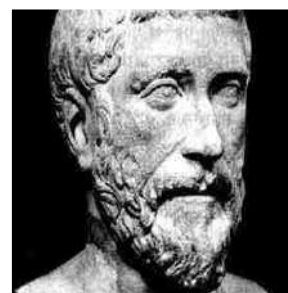
Liu Hui

a Wang Fan, general chinês do século III d. C., a aproximação racional $\frac{142}{45} = \pi$, ou seja, $\pi = 3,155$.

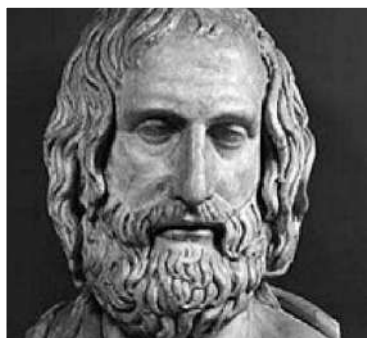
Nesta mesma época, **Liu Hui** escreveu o Manual de Matemática da Ilha Marítima, onde, em um material sobre mensuração, estabelece a relação $3,1410 < \pi < 3,1427$. Mas, após séculos, Tsu Ch'ung-Chi (430 – 501) com seu filho encontram $3,1415926 < \pi < 3,1415927$ e $\pi = \frac{355}{113}$,

o que nos dá uma aproximação racional com a precisão de seis casas decimais corretas. Esse feito só seria superado em 1425, pelo astrônomo Jamshid Al-Kashid de Samarcanda, com uma aproximação de dezesseis casas decimais corretas para π . No Ocidente, a aproximação de Tsu só foi superada em 1600.

Na Bíblia há duas citações que levam a crer que os judeus antigos atribuíam o valor 3 ao número π . No livro bíblico do Antigo testamento, 2 Crônicas, capítulo 4, versículo 2, temos a história de que o rei Salomão constrói um altar segundo as seguintes especificações: “[...] fez também o mar de metal fundido, redondo, com cinco metros de diâmetro e dois e meio de altura com quinze de circunferência”. Podemos encontrar esta mesma história, desta



Hípias de Elis

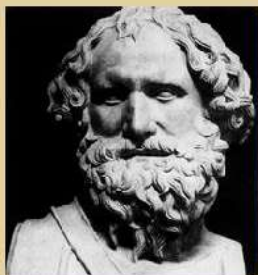


Anaxágoras

vez com o personagem Hiran, no Primeiro Livro de reis, capítulo 7, versículo 23. Estes últimos fatos ocorreram entre 971 e 561 a. C., semelhantemente à história de Salomão. Destes episódios, observamos que os judeus possuíam a aproximação para $\pi = \frac{15}{5} = 3$.

O primeiro grego a ter o nome ligado ao problema foi **Anaxágoras** (427 a. C.). A ele se seguiram: **Hípias de Elis** (425 a. C.) e Dinostrato (350 a. C.). Mas nenhum deles conseguiu uma solução tão elegante quanto Arquimedes (225 a. C.). Por esta realização estar estreitamente ligada ao problema da quadratura do círculo, iremos começar nossa cronologia de π , por ele.

UMA BREVE HISTÓRIA DE PI



240 A.C.

Arquimedes utiliza um método que tem como base os polígonos inscritos e circunscritos, ficando conhecido como o Método Clássico de Cálculo de π . O valor de $\pi = 3,14$.

150 D. C.

Através de uma tábua de cordas, **Claudio Ptolomeu**, no seu Syntaxis Mathematica, mas conhecido por Almagesto, atribui a $\pi = 3,1416$.



480

O mecânico chinês **Tsu Ch'ung-Chih** apresenta uma interessante aproximação para $\pi = 3,1415929$, correta até sua sexta casa decimal.

530

Aryabhata, um dos mais antigos matemáticos hindus, atribuiu a π o valor de 3,1416. Não se sabe como ele conseguiu esse valor.



1150

Outro matemático hindu, velho conhecido de outras fórmulas, **Bhaskara** também encontra o valor de $\pi = 3,1416$.



Utilizando o método clássico, **Al-Kashi**, de Samarcanda,, determina π até a sexta casa decimal.



1429



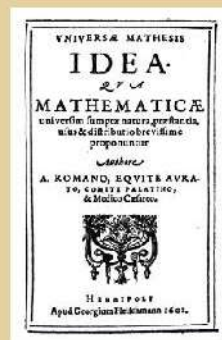
1579

O francês **Viète**, iminente matemático, corretamente encontra π até a nona casa decimal. Ele utiliza o método clássico usando um polígono com 396 216 lados.



1585

No que foi um aparente golpe de sorte, **Adriaen Anthoniszoon** descobriu o antigo valor de $\pi = 3,1416$



1593

Usando um polígono de 230 lados, o holandês **Adriaen Van Roomen**, através do método clássico, determina, corretamente, π até a décima casa.

1610

Num feito considerado extraordinário, onde o holandês **Ludolph Van Ceulen**, gastou parte de sua vida, pelo método clássico e usando um polígono de 262 lados, calculou π até a trigésima quinta casa decimal. Não a toa, até hoje, as vezes, π é chamado "número ludolphiano".



1621

O físico holandês **Willebrord Snell** descobre um aperfeiçoamento trigonométrico para o método clássico.



1630

Grienberger utilizando o refinamento de Snell calcula π até a trigésima nona casa. Esta foi a última tentativa de importância relevante para se calcular π usando o método clássico.



1650

A curiosa expressão

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \dots}$$

é obtida pelo inglês **John Wallis**.



1671

James Gregory, tentando provar que uma solução euclidiana para a quadratura do círculo chega à série infinita

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (-1 \leq x \leq +1)$$

Porém, passa despercebido a Gregory que, para $x = 1$, temos

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$



1699

Usando a série de Gregory para

$$x = \sqrt{1/3}$$

Abrahan Sharp encontrou, precisamente, as setenta e uma iniciais casas decimais de π .



1706

Usando novamente a série de Gregory, desta vez, **Jonh Machin** obtém π com cem casas decimais.



1737

Embora, anteriormente, matemáticos ingleses, tais como, William Oughtred, Isaac Barrow e David Gregory, e o escritor, também inglês, William Jones tenham usado π para expressar a circunferência e o diâmetro, o símbolo só passa a ter aceitação após **Euler** adotá-lo neste ano.

É escrita uma história do problema da quadratura por um dos primeiros historiadores da matemática, o francês **Jean Étienne Montucla**.



1754



1755

A **Academia de Ciências da França** se recusa a fazer o exame de resoluções para o problema da Quadratura do Círculo.



1767

Johann Heinrich Lambert consegue provar que o número π é irracional.



1777

No problema da agulha, concebido pelo **Conde de Buffon**, o valor de π é alcançado por métodos probabilísticos.

1794

Adrien-Marie Legendre consegue mostrar que o número π^2 é irracional.



1841

π é calculado com 208 casas decimais, das quais 1532 estão corretas. Para isto, o Inglês **William Rutheford** utilizou a série de Gregory juntamente com a relação ao lado

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctg \left(\frac{1}{5} \right) - \arctg \left(\frac{1}{70} \right) + \arctg \left(\frac{1}{99} \right)$$

1844

Zacharias Dase encontra π com 200 casas decimais. Novamente é utilizada a série de Gregory, sendo que desta vez em conjunto com a relação

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{8}\right).$$



1853

Retornado ao problema, **Rutherford** consegue calcular de maneira correta π com 400 casas decimais.



1882

F. Lindemann prova que π é um número transcendente.

1948

D. F. Ferguson e **J. W. Wrench** apresentam um valor de π com 808 casas decimais corretas e testadas. Wrench utilizou a fórmula de Machin e Ferguson usou a fórmula ao lado.

$$\frac{\pi}{4} = 3 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{20}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1985}\right).$$

1949

π é calculado com 2037 casas decimais pelo **ENIAC**, computador do Army Ballistic Research Laboratories de Aberdeen, Maryland.



1959

Usando um **IBM 704**, em Paris, **Francois Genuys**, calcula π com 16 167 casas decimais.



1961

Desta vez, utilizando um **IBM 7090**, **Wrench** e **Daniels Shanks**, de Washington, D. C., calculam π com 100 265 casas decimais.



1966

Os mesmos pesquisadores, agora usando um **CDC 6600**, conseguem uma aproximação para π com 500 000 casas decimais.



1973

Novamente a mesma equipe de franceses, mas desta vez usando um **CDC 7600**, aproximam π com um milhão de casas decimais.



1986

Fazendo o supercomputador **Cray-2** da NASA, **D. H. Bailey**, obtém π com 29360000 de casas decimais.



2009

Nós demos um salto na cronologia para o ano em que **Daisuke Takahashi** usando o computador **T2K Tsukuba System** calcula o valor de π com 2 576 980 370 000 casas decimais.



2019

Emma Haruka Iwao ao calcular 31,4 trilhões de dígitos da constante matemática Pi, utilizou potentes computadores por 121 dias para chegar ao resultado que exigiu 170 Terabytes de dados.



A título de curiosidade, existem várias frases e poemas, em diversas línguas, que, através de processos mnemônicos, ajudam a fixar um valor aproximado de π . Observe os verso iniciais do poema escrito pelo francês Maurice Decerf:

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages !

Glorieux Archimède, artiste ingénieur,

Toi de qui Syracuse aime encore la gloire,

Soit ton nom conservé par de savants grimoires !

Jadis, mystérieux, un problème bloquait

Tout l'admirable procédé, l'œuvre grandiose

Que Pythagore découvrit aux anciens Grecs.

O, quadrature ! Vieux tourment du philosophe !

Insoluble rondeur, trop longtemps vous avez

Défié Pythagore et ses imitateurs.

Comment intégrer l'espace bien circulaire ?

Former un triangle auquel il équivaudra ?

Nouvelle invention : Archimède inscrira

Dedans un hexagone, appréciera son aire,

Fonction du rayon. Pas trop ne s'y tiendra

Dédoublera chaque élément antérieur ;

Toujours de l'orbe calculée approchera ;

Définira limite ; enfin, l'arc, le limiteur

De cet inquiétant cercle, ennemi trop rebelle !

Professeur, enseignez son problème avec zèle !



Cada palavra, por sua quantidade de letras, corresponde a um algarismo do número π .

Temos exemplos em inglês:

Sir, I bear a rhyme excelling

In mystic force and magic spelling

Celestial sprites elucidade

All my own striving can't relate

Mais um exemplo em inglês de 1906, de autoria de A. C. Orr:

Now, I even, would celebrate

In rhymes inept, the great

Immortal Syracusan, rivaled nevermore,

Who in his wondrous lore,

Passed on before,

Left men his guidance, How to
circle mensurate.

Outro exemplo em inglês do ano de 1914:

See, I have a rhyme assisting my feeble brain, its tasks oft times resisting.

How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics.

May I have a large container of coffee?



Em espanhol:

Sol y Luna y Mundo proclaman al Eterno Autor del Cosmos.



E, para finalizar, em português:

Sou o medo e temor constante do menino vadio.

Acreditamos que deu para perceber a importância do número π para a história humana. Diversos povos antigos, separados pelos séculos e pela distância conseguiram, sem utilizar de complexos instrumentos de cálculo, encontrar valores para π até dezenas de casas decimais corretas. Isto é um feito notável. Durante a leitura da cronologia de π , você, com certeza, deve ter reparado que até o ano 1630 d. C. ainda se utilizava o método clássico para se calcular um valor para π . Dada sua importância para a matemática, veremos agora como Arquimedes fez para estimar, milênios atrás, uma aproximação para π .

Vamos lá! Pegue régua e compasso e mãos à obra!



SAIBA MAIS

PITÁGORAS E OS PITAGÓRICOS



NÃO, NÃO É UMA BANDA DOS ANOS 1960.

A ESCOLA PITAGÓRICA

NÚMEROS, ARITMÉTICA, GEOMETRIA, MÚSICA E ASTRONOMIA

Tudo indica que Pitágoras nasceu na ilha egeia de Samos, por volta de 572 a. C.. Ao que parece, pode ter sido discípulo de Tales, pois, vivia próximo a Mileto, cidade onde aquele residia. Há indicações que morou, durante um tempo, no Egito e, ao retornar a Samos, viu-a sob a tirania de Políacres e a Jônia sob o domínio persa. Isto o fez mudar para o porto marítimo de Crotona, colônia grega ao sul da Itália. Foi lá que fundou a famosa Escola Pitagórica, famoso centro de estudo de Filosofia, Matemática e Ciências. Além do que, era uma irmandade unida por cerimônias e ritos secretos. Com o tempo sua influência se tornou tão grande, que forças democráticas destruíram o prédio da escola, forçando os pitagóricos a fugirem. O próprio Pitágoras fugiu para Metaponto, onde, por fim, morreu entre os setenta e cinco e oitenta anos de idade. Porém, a irmandade, mesmo dispersa, continuou a existir por, pelo menos, mais dois séculos.

A filosofia pitagórica exaltavam as propriedades dos números e a aritmética, pois acreditavam serem os números inteiros a

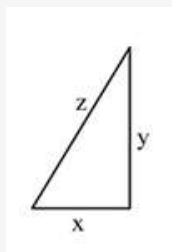
causa última das mais variadas características do homem e da matéria. Junto com os números e a aritmética, o programa de estudos dos pitagóricos incluía a Geometria, a Música e a Astronomia. A escola se caracterizava por transmitir seus ensinamentos completamente de forma oral e de atribuir todas as descobertas ao fundador, Pitágoras. Por causa disto, é muito difícil precisar o que foi descoberto pelo próprio Pitágoras ou por outros membros da irmandade.

Devemos à Escola Pitagórica contribuições riquíssimas à Matemática, tais como, a Aritmética Pitagórica e a descoberta dos números irracionais. Mas, sua contribuição mais conhecida é o Teorema de Pitágoras. Há a unanimidade em atribuir a Pitágoras a descoberta do teorema que leva o seu nome. O teorema diz que o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos. É certo que os babilônicos já conheciam o teorema desde os tempos de Hamurabi, cerca de mais de mil anos de Pitágoras, mas foi ele que fez sua primeira demonstração geral.

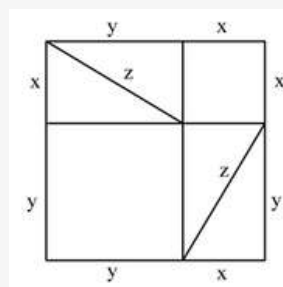
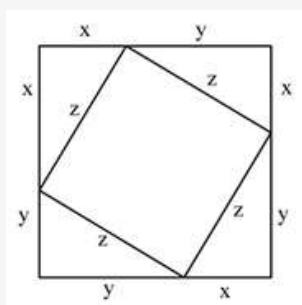
O TEOREMA DE PITÁGORAS

O método por decomposição utilizado por Pitágoras teria sido este:

Chamemos de x , y e z , respectivamente, os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo;

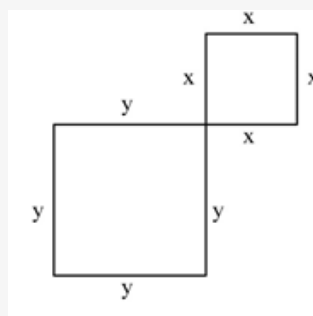
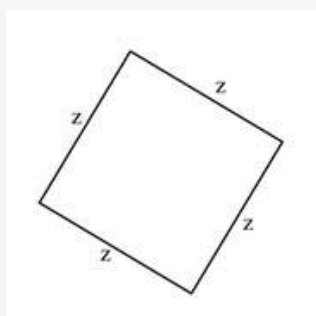


Considere, agora, os dois quadrados abaixo, cada um de lados $y + x$:



Observe que o primeiro quadrado está decomposto em seis polígonos: dois quadrados que possuem, por sua vez, lados que medem igual aos catetos do triângulo dado e quatro triângulos congruentes ao triângulo dado anteriormente. O segundo quadrado está decomposto em cinco polígonos: um quadrado de lado igual à medida da hipotenusa do triângulo dado e quatro triângulos congruentes a ele.

Dos quadrados que possuem a mesma área, vamos subtrair as figuras que são congruentes, restando:



Concluimos que a área do quadrado sobre a hipotenusa é igual à área do quadrado sobre os catetos.

Para Refletir!

Após a leitura, 10 questões para pensar.

1. Durante a leitura da cronologia do número π , percorremos, no tempo, várias sociedades diferentes, tais como, as sociedades escravistas, as sociedades asiáticas, sociedade feudal e, por fim, chegamos à sociedade capitalista. No seu avanço, cada sociedade, impôs a sua forma de pensar. Aparentemente, pode até parecer que determinados povos eram mais "inteligentes" do que outros. Porém, o que acontece é que, como dizia Paulo Freire, "quem detém o poder, detém o saber e vai dizer ao mundo como é.". Que reflexões podemos fazer sobre este pensamento, relacionando-o com os dias atuais?

2. Como você leu, hoje, com o uso de supercomputadores, podemos calcular π com a precisão de milhões de casas decimais. Porém, vivemos numa sociedade que, embora possa, por exemplo, enviar sondas exploratórias aos confins do espaço, não acabou com a fome, a desigualdade social, o racismo e tantas outras mazelas. Este fato, claro, não desqualifica as benesses trazidas pelos avanços científicos. Desta forma, na sua opinião, o que pode ser feito para mudar este quadro de disparidade enorme?

3. O antigo povo grego mantinha uma sociedade que era baseada na escravidão. Havia uma educação destinada aos homens livres, voltada para a formação intelectual e física. Os escravos não tinham acesso a ela, sua educação era assimilada pelo próprio processo de trabalho. Hoje, vivemos em uma realidade diferente, porém, não muito, pois, ainda vemos as diferenças entre as escolas públicas e as escolas particulares. Quais são os reflexos de um ensino de pouca qualidade na vida pessoal e profissional das pessoas?

4. Você deve ter observado que na história do número π são raríssimos os nomes de mulheres. Isto ocorre não apenas na Matemática, mas, em vários ramos das Ciências. O que isto revela sobre as várias formações societárias que percorremos? Será que, de forma alguma, as mulheres não tiveram participação na construção desta história?

5. Podemos observar, que, a partir de certa data, as buscas por aproximações mais exatas para o número π são mais exitosas nos países desenvolvidos economicamente. Que relação podemos estabelecer entre produção de ciência e o subdesenvolvimento de muitos países?

6. Embora π , hoje, possa ser calculado com exatidão até milhões de casas decimais, na verdade, tudo se iniciou com o trabalho de matemáticos que viveram na antiguidade e utilizavam instrumentos que hoje são considerados arcaicos. Desta forma, se constrói o conhecimento humano, sempre o novo degrau é construído sobre o degrau anterior. Às vezes, acontece que, antes de seguirmos na construção de outro lance de degraus, alcancemos um patamar e fazemos uma parada. Sabendo disto, na sua concepção o que é necessário para que haja o impulso que nos lança na construção de novos degraus de conhecimento?

7. Assim como os antigos egípcios que faziam matemática na lama do Rio Nilo após suas enchentes, muitos povos desenvolveram o conhecimento fazendo do trabalho a sua escola. O conhecimento era obtido conforme a necessidade de se desenvolver uma tarefa se colocava. O conhecimento era construído a partir do trabalho. Hoje, escola e trabalho, na maioria dos casos, são desvinculados e a maior parte dos jovens concluem seus estudos e não conseguem relacionar o conhecimento nem com o seu cotidiano. Faça uma breve reflexão sobre isto.

8. Durante a leitura do texto, observamos que a História destaca os reis, os cientistas e os sábios, por exemplo. O historiador russo Plekhanov nos diz que estes personagens são indivíduos que mudaram o rumo da História por se propor a responder questões que a própria História colocava para eles. Leia o poema de Bretsch, na página ao lado, e reflita sobre o papel dos indivíduos que não são citados pela História. Qual a importância de cada indivíduo?

9. A descoberta dos números irracionais pelos Pitagóricos foi um tanto traumática para eles, pois sua visão de mundo era totalmente baseada nos números inteiros. Mas, mesmo assim, eles saíram da sua zona de conforto, absorveram o novo conhecimento, o aceitaram ao constatar como verdadeiro e seguiram em frente, reforçando o conhecimento. Que lições o mundo de hoje, onde vemos a exacerbação do conservadorismo, pode tirar do exemplo dos Pitagóricos?

10. Durante muito tempo as artes, notadamente as pinturas e o cinema, deram traços europeus, aos líderes e povos que se destacaram em um dado período do tempo. Uma das perguntas que mais causa polêmica nos meios acadêmicos ou não, é se os antigos egípcios eram negros ou brancos. Neste caso, grupos distintos mantêm discursos distintos, numa disputa moderna por um objeto de prestígio - o Egito faraônico. Um povo importante do passado era branco ou negro? Importantes reis da antiguidade eram brancos ou negros? A resposta que se dá para estes questionamentos tem um forte cunho político e social. Reflita sobre como apresentar todos estes povos do passado como homens brancos tem influência sobre a forma como nós enxergamos estes povos e, ao mesmo tempo, nos enxergamos.

Perguntas De Um Trabalhador Que Lê

Bertolt Brecht

Quem construiu a Tebas de sete portas?
Nos livros estão nomes de reis:
Arrastaram eles os blocos de pedra?

E a Babilônia várias vezes destruída
Quem a reconstruiu tantas vezes?

Em que casas da Lima dourada moravam os construtores?
Para onde foram os pedreiros, na noite em que a Muralha da China ficou
pronta?

A grande Roma está cheia de arcos do triunfo:
Quem os ergueu?
Sobre quem triunfaram os Césares?

A decantada Bizâncio
Tinha somente palácios para os seus habitantes?

Mesmo na lendária Atlântida
Os que se afogavam
gritaram por seus escravos
Na noite em que o mar a tragou?

O jovem Alexandre conquistou a Índia.
Sozinho?

César bateu os gauleses.
Não levava sequer um cozinheiro?
Filipe da Espanha chorou,
quando sua Armada naufragou.
Ninguém mais chorou?

Frederico II venceu a Guerra dos Sete Anos.
Quem venceu além dele?
Cada página uma vitória.
Quem cozinhava o banquete?

A cada dez anos um grande Homem.
Quem pagava a conta?

Tantas histórias.
Tantas questões.

O MÉTODO CLÁSSICO DE ARQUIMEDES



Estamos chegando, agora, na parte que baseia este nosso estudo: a determinação de π utilizando o Método Clássico de Arquimedes. O método envolve a construção de polígonos regulares inscritos e circunscritos em uma circunferência e através dele obteremos fórmulas que nos serão úteis no capítulo seguinte

Para realizarmos a construção dos polígonos circunscritos e inscritos em uma circunferência

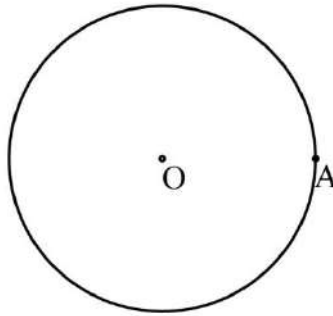
usaremos de técnicas de construção de polígonos do desenho geométrico. Para tanto, utilizaremos apenas um compasso e uma régua não graduada (os instrumentos euclidianos).

Como toda construção geométrica, seguiremos várias etapas, que serão descritas de forma pormenorizadas e que, portanto, necessitam de uma atenção maior. O que é totalmente diferente de afirmar que são de

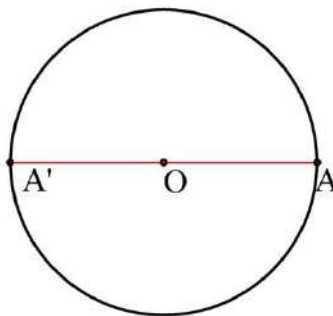
difícil construção, como veremos a seguir.

Numa folha de papel desenhe uma circunferência e inscreva nela um triângulo equilátero. Observe como procedemos para isto:

Marque o centro no ponto O e a partir dele trace, com o auxílio do compasso, uma circunferência, sobre a qual você deve marcar um ponto A:

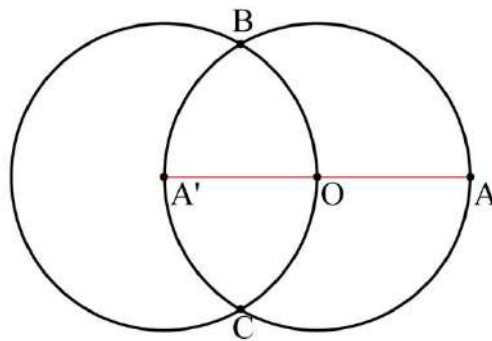


Com o auxílio da régua, desenhe um segmento de reta, que parta de A, passe pelo centro O e toque a circunferência no ponto que chamaremos de A' :

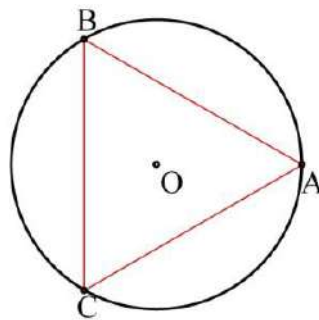


Qual relação de medida há entre o seguimento de reta $\overline{OA}$ e o segmento de reta $\overline{AA'}$?

Com o compasso no ponto A' e com a mesma abertura, marque na circunferência dois pontos, B e C:



Agora é só ligar os pontos A, B e C e teremos um triângulo equilátero inscrito na circunferência:



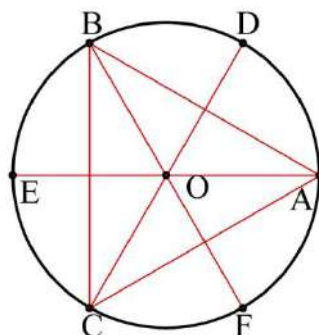
A palavra equilátero vem da junção de duas palavras latinas (*aequi* = igual e *lateralis* = relativo a lado) e serve para designar um tipo de triângulo. Quais as características deste tipo de triângulo, além de possuírem lados iguais?

Os pontos A, B e C dividiram a circunferência em partes iguais, cada uma delas é um arco de circunferência. O arco de circunferência delimitado, por exemplo, pelos pontos A e B é indicado por $\widehat{AB}$. Desta forma, levando em consideração a figura, quais

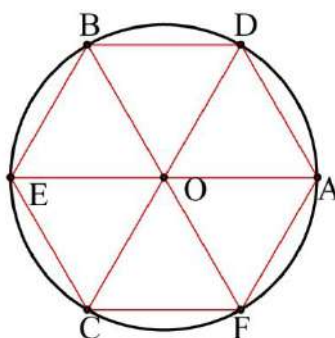
são os três arcos iguais delimitados pelos pontos A, B e C? Em relação à circunferência, quanto mede cada arco?

Passemos a segunda etapa. Você já deve ter observado que a circunferência ficou dividida em três arcos de mesmo comprimento. Vamos dividir estes arcos ao meio. Observe o procedimento:

Partindo dos pontos A, B e C, trace retas que passem pelo centro O. Na intersecção das retas com a circunferência, marque os pontos D, E e F:



Ligue cada ponto sobre a circunferência ao ponto vizinho mais próximo e teremos um hexágono inscrito na circunferência:

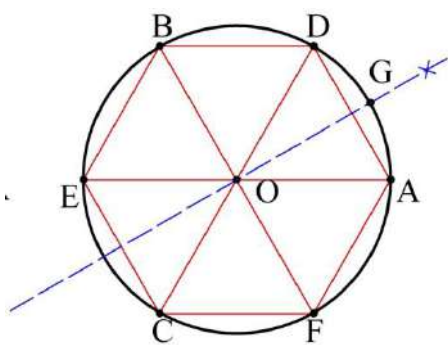


A palavra **hexágono** encontra correspondentes no latim e no grego, respectivamente, hexagonum e hexágonon, ambos denominam uma figura de seis lados. O hexágono da figura é um polígono regular, que é aquele que possui lados iguais e ângulos iguais. Como podemos observar o hexágono regular pode ser dividido em seis triângulos equiláteros. Então, sabendo disto, calcule a área do Hexágono considerando que a circunferência possui raio unitário:

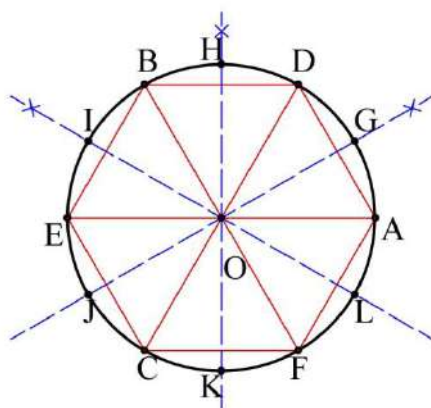
Que relação podemos fazer entre o perímetro do hexágono regular e o raio da circunferência onde ele está inscrito?

Deste momento em diante vamos dividir sempre os arcos de circunferência ao meio. Como faço isso? Siga as orientações seguintes:

Com centro em um dos vértices do hexágono, em A, por exemplo, abra o compasso um pouco mais do que a medida do raio. Trace um risco auxiliar entre A e D. Agora, como o compasso em D e mantendo a mesma abertura, trace um risco auxiliar entre D e A. Da intersecção dos dois riscos, trace uma reta que passe pelo centro O e cruze a circunferência. Aproveite para, entre A e D, no local onde esta nova reta interceptou a circunferência, para marcar o ponto G.



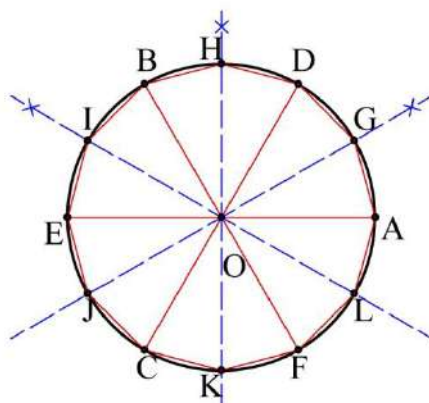
Realize o mesmo procedimento entre os pontos B e D e os pontos B e E. Marcando sobre a circunferência, como anteriormente, os pontos H e I. Observe que estas retas interceptaram a circunferência em pontos diferentes. Sobre eles devem ser marcados os pontos J, K e L.



Observe que cada segmento de reta traçado dividiu cada triângulo equilátero em dois novos triângulos. Por suas características, como são classificados estes tipos de triângulos?

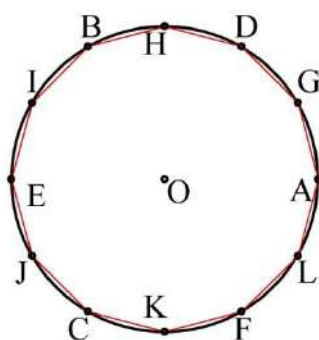
O segmento de reta $\overline{OK}$, por exemplo, dividiu o ângulo $\widehat{COF}$ ao meio, portanto é sua bissetriz; dividiu o segmento lado CF ao meio, portanto é, também, uma mediana; e forma um ângulo reto com o lado CF, contém, portanto, ao mesmo tempo, altura do triângulo e a sua mediatriz. Quanto mede $\overline{OK}$? Quanto mede o ângulo $\widehat{COF}$?

Agora, basta traçar segmentos de reta ligando cada ponto sobre a circunferência ao seu ponto vizinho:



O dodecágono também é um polígono regular que pode ser dividido em doze triângulos iguais, que também são classificados conforme os seus lados. Como é chamado este tipo de triângulo? Este triângulo pode ser classificado como sendo um polígono regular?

Eliminando os segmentos de reta internos ao polígono, obtemos nosso dodecágono inscrito na circunferência:

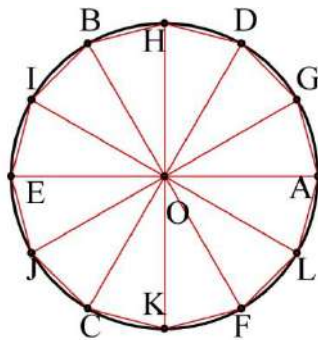


Arquimedes continuou realizando o mesmo procedimento e obteve polígonos com 24, 48 e 96 lados.

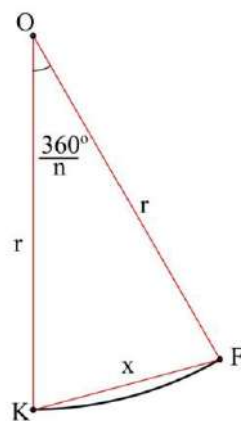
Aqui, onde Arquimedes fez sua primeira parada, vamos fazer a nossa segunda e também outra observação.

O que podemos afirmar em relação ao comprimento da circunferência e o perímetro do polígono nela inscrito?

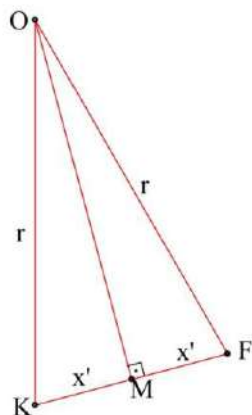
Dando continuidade ao método de Arquimedes, vamos calcular o perímetro deste polígono. Para isto, observe a figura a seguir:



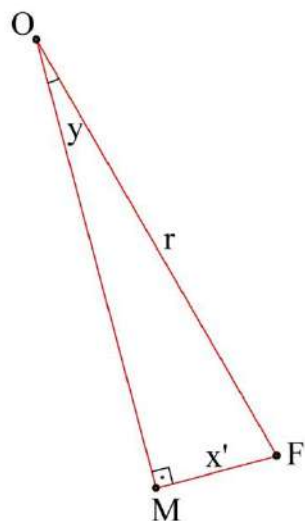
Como você pode observar o polígono inscrito na circunferência pode ser dividido de modo a formar vários triângulos isósceles. Vamos isolar um deles, por exemplo o triângulo KOF, onde n é igual ao número de lados do polígono inscrito, e obter a seguinte figura:



Observe que traçando a bissetriz do ângulo $K\hat{O}F$, dividimos o triângulo isósceles em dois outros triângulos, desta vez, triângulos retângulos. Basta, como mostra a figura, traçar uma reta perpendicular ao lado $\overline{KF}$ até o ponto O.



Vamos isolar um deles, por exemplo o triângulo $M\hat{O}F$, que vai ser a partir do qual você deverá encontrar o lado $x' = \overline{KF}$, em seguida o lado x e, por fim, o perímetro P_i do polígono inscrito. Para lhe ajudar, determine o valor do ângulo $M\hat{O}F$ e use a razão trigonométrica seno para este ângulo:



Fácil, não? Bem, agora vamos deixar a equação

$$P_i = 2 \cdot r \cdot n \cdot \text{sen} \left(\frac{360^\circ}{2n} \right)$$

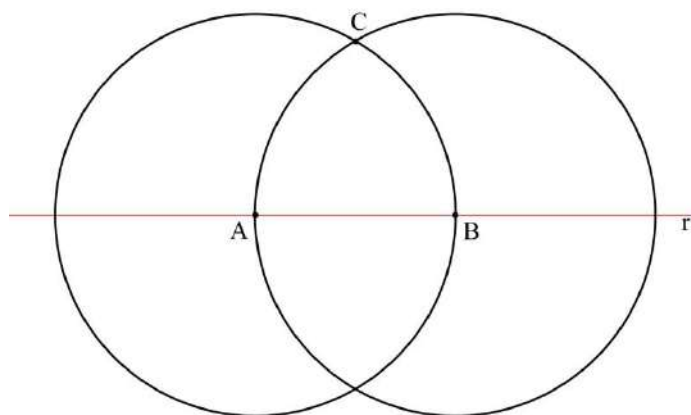
guardada e continuar dando prosseguimento ao método de Arquimedes. Faremos um procedimento semelhante ao anterior, mas, desta vez, construindo um triângulo circunscrito à circunferência. Vamos lá!

Agora, dando prosseguimento ao método de Arquimedes, faremos um procedimento semelhante ao anterior, mas, desta vez, construindo um triângulo circunscrito à circunferência. Vamos lá!

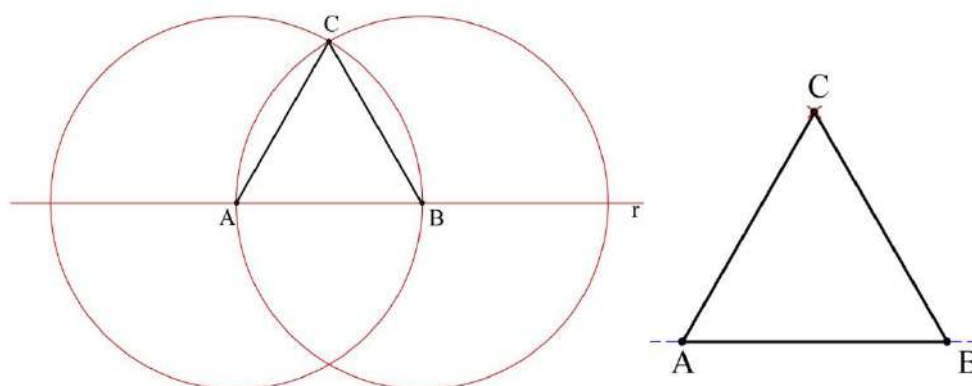
Antes de tudo, trace uma reta:



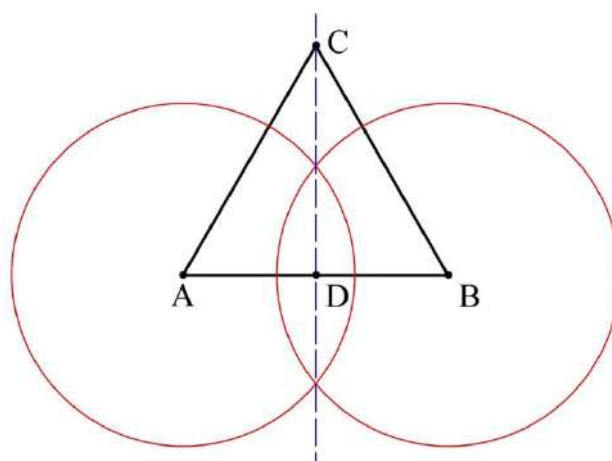
Sobre a reta r marque os pontos A e B. Sobre A, com o auxílio do compasso, e com abertura em B, trace uma circunferência. Com esta abertura e sobre o ponto B, trace outra circunferência. Em um dos pontos onde as duas circunferências se interceptam marque o ponto C:



Ligue, através de retas, os pontos A, B e C. Obtemos, desta forma um triângulo retângulo:



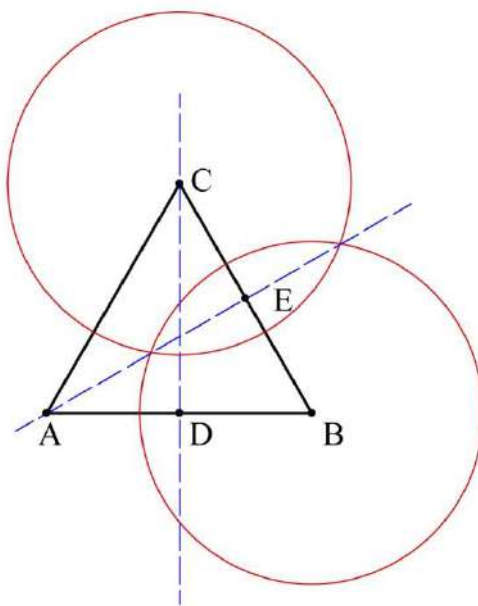
Aproveitando o desenho, trace um segmento de reta perpendicular ao lado AB do triângulo. Para isto, basta ligar os pontos de intersecção das duas circunferências. Observe que este segmento de reta passa por C e é perpendicular ao segmento de reta $\overline{AB}$.



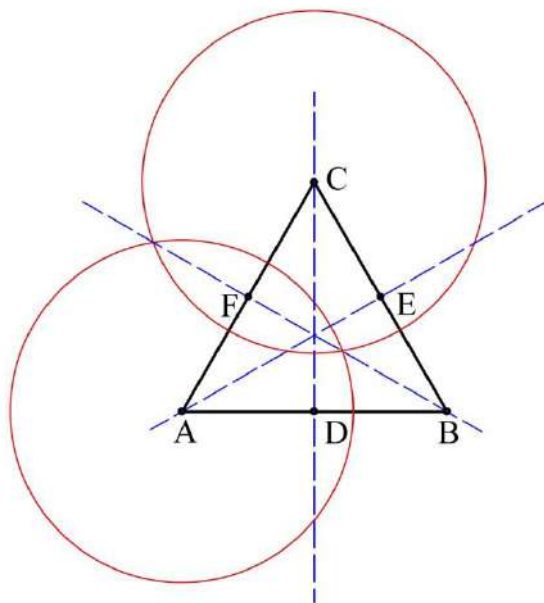
Que elemento do triângulo é o segmento de reta $\overline{CD}$?

Com o compasso com a mesma abertura e sobre C desenhe uma nova circunferência. Dos pontos de intersecção das circunferências de centro B e C, trace

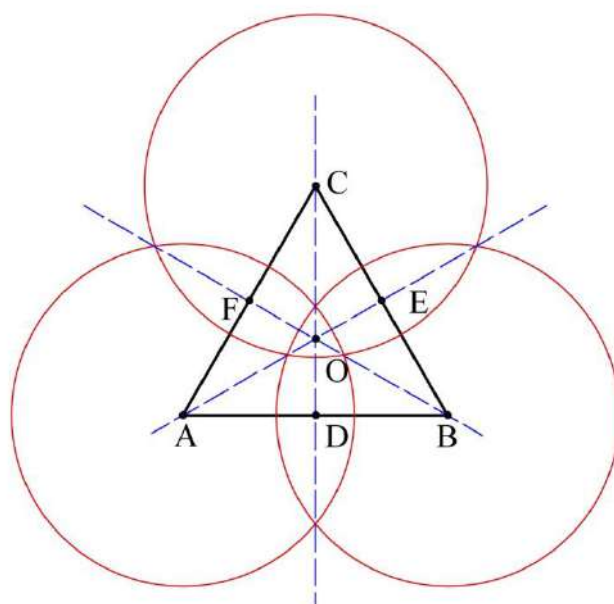
um segmento de reta perpendicular ao lado BC do triângulo. Onde este segmento de reta intercepta o lado BC do triângulo marque o ponto E.



Dos pontos de intersecção das circunferências de centro A e C, trace um segmento de reta perpendicular ao lado AC do triângulo. Onde este segmento de reta intercepta o lado AC do triângulo marque o ponto F.

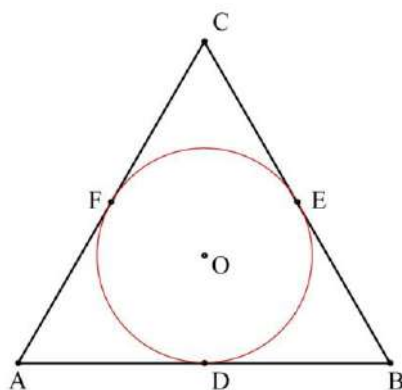


Na intersecção destes segmentos de reta, marque o ponto O.



Qual elemento do triângulo é o ponto O?

Utilizando o compasso e com centro em O, faça sua abertura coincidir como o ponto D e trace uma circunferência.



Temos um triângulo circunscrito a uma circunferência.

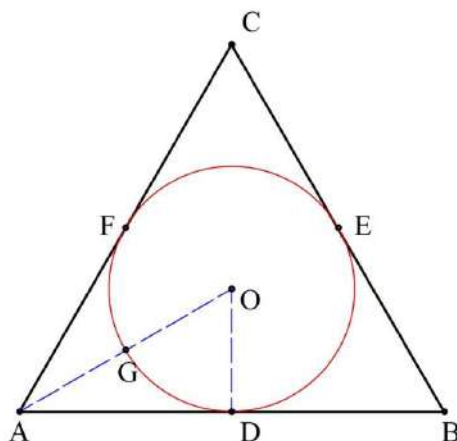
Agora que já desenhamos um polígono inscrito e um polígono circunscrito em uma circunferência, defina estas duas figuras:

Ao ligar os pontos D a E, E a F e F a D formamos um triângulo equilátero. Considerando a circunferência como tendo raio unitário, determine o perímetro e a área deste triângulo.

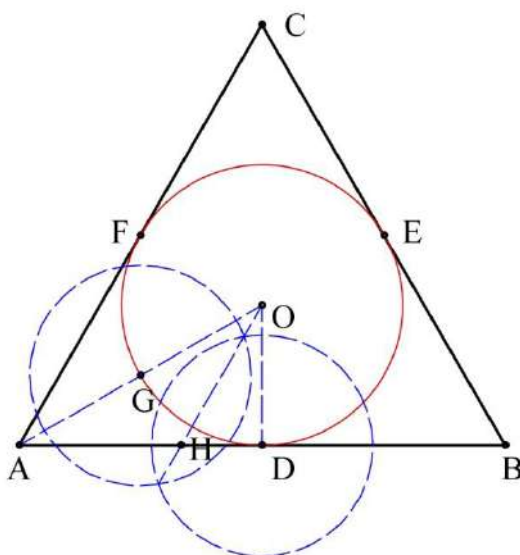
Considerando novamente a circunferência como tendo raio unitário, determine a área e o perímetro do triângulo ABC.

Dando continuidade ao método, vamos construir, a partir do triângulo, um hexágono circunscrito à circunferência.

Do ponto O, trace segmentos de reta que interceptem os pontos A e D. Na intersecção do segmento de reta $\overline{AO}$ com a circunferência marque o ponto G.

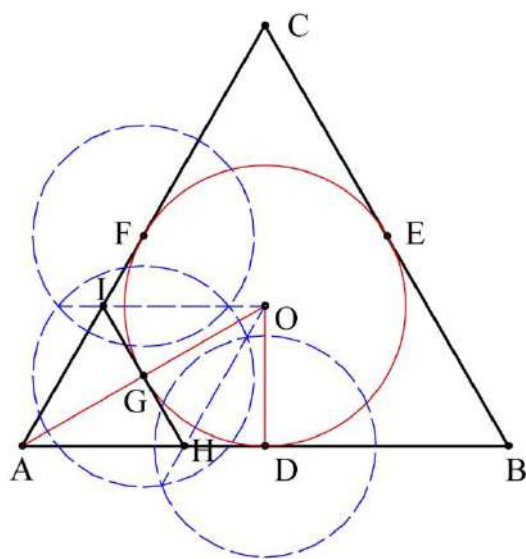


Usando a mesma abertura do compasso em D e G, construa duas outras circunferências. E nos pontos onde elas se interceptam, trace um segmento de reta. Este segmento vai também interceptar o segmento de reta $\overline{AB}$, é onde você deve marcar o ponto H.

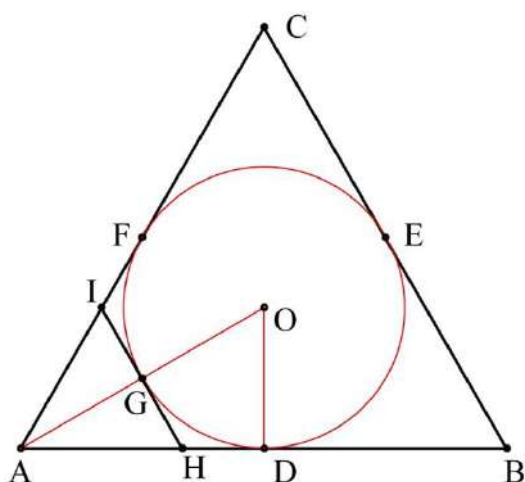


Sobre o ponto F desenhe uma circunferência e, dos pontos de intersecção dela com a circunferência de centro G, trace um segmento de reta e obtenha o ponto I, onde

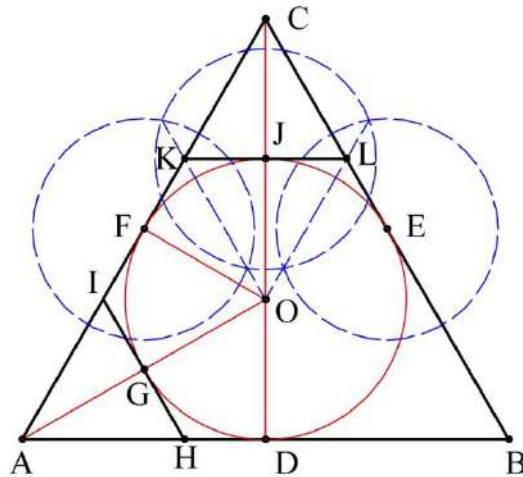
o segmento de reta intercepta o lado AC do triângulo. Em seguida, ligue o ponto H ao ponto I.



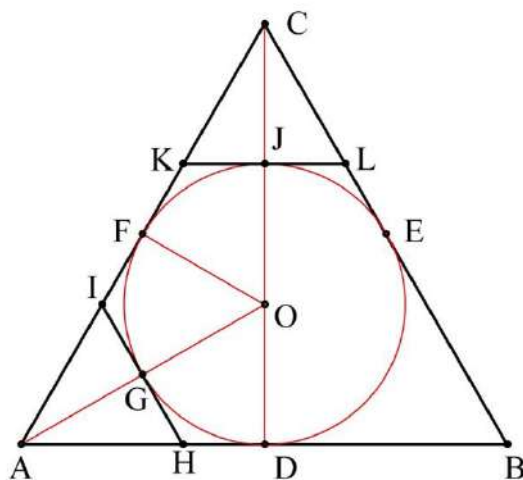
Até o momento sua figura deve estar assim.



Com centro em E e com a mesma abertura do compasso, desenhe uma nova circunferência. Dos pontos onde se interceptam as circunferências de centro J e E trace um novo segmento de reta, que ao interceptar o lado CB do triângulo dará origem ao ponto L. Marque este ponto e, em seguida, ligue-o ao ponto K.

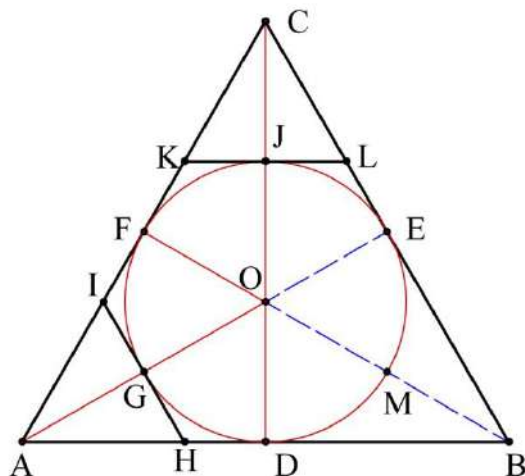


Sua figura até aqui deve estar assim.

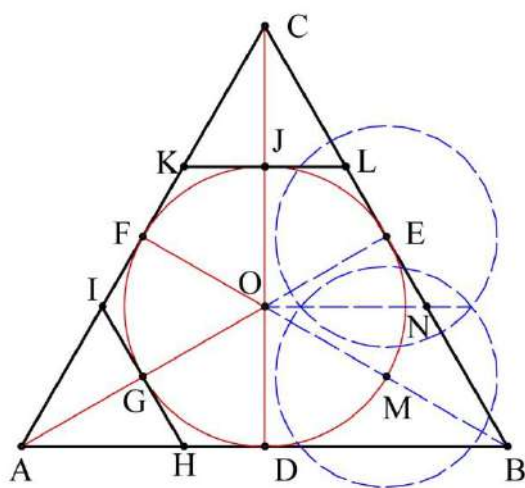


Vamos finalizar o desenho do hexágono regular.

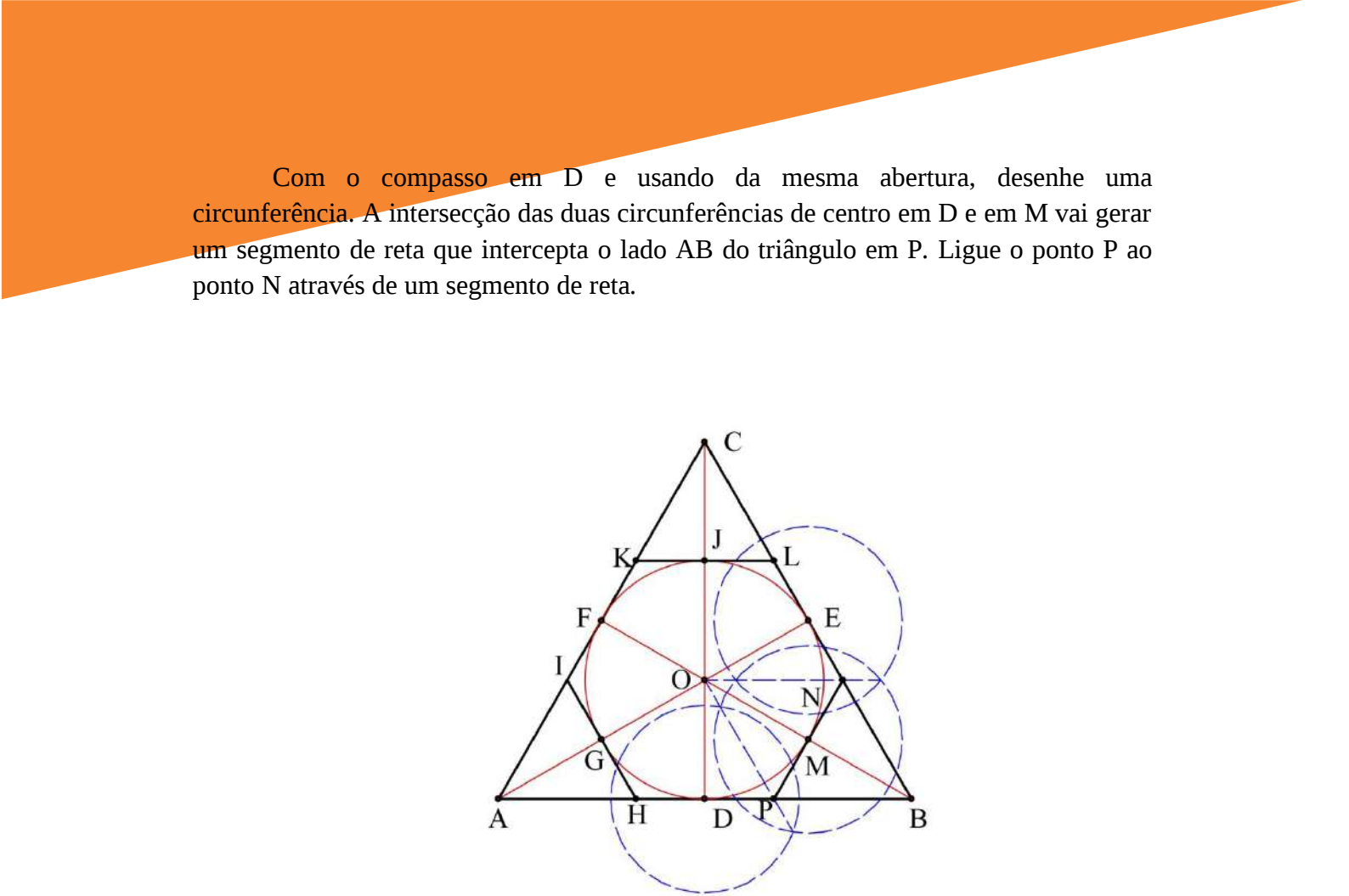
Trace segmentos de reta partido de O até os pontos E e M.



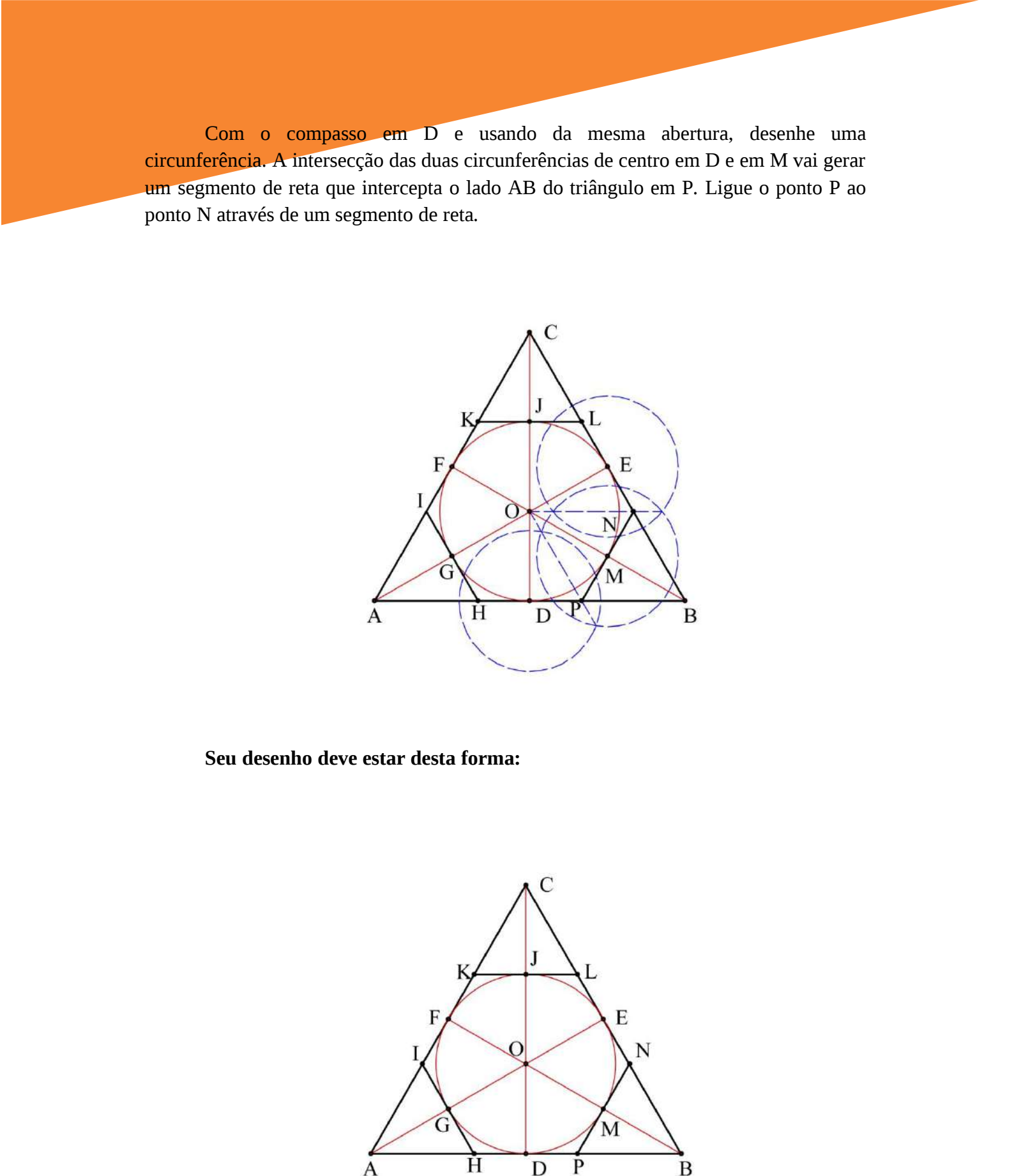
Com a mesma abertura do compasso e com centro nos pontos E e M, desenhe circunferências. Através dos pontos onde as duas novas circunferências se interceptam desenhe um segmento de reta, que ao interceptar o lado CB do triângulo gera o ponto N, o qual deve ser marcado.



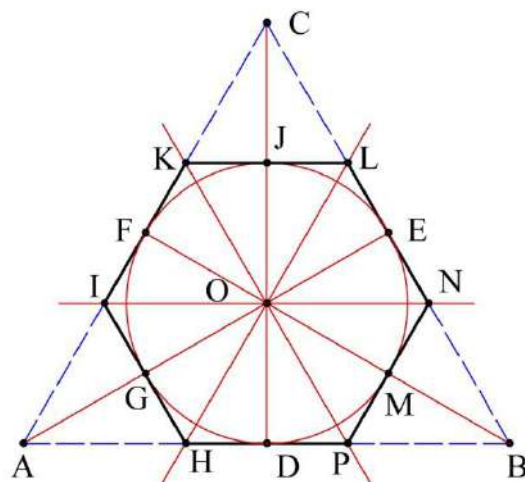
Com o compasso em D e usando da mesma abertura, desenhe uma circunferência. A intersecção das duas circunferências de centro em D e em M vai gerar um segmento de reta que intercepta o lado AB do triângulo em P. Ligue o ponto P ao ponto N através de um segmento de reta.



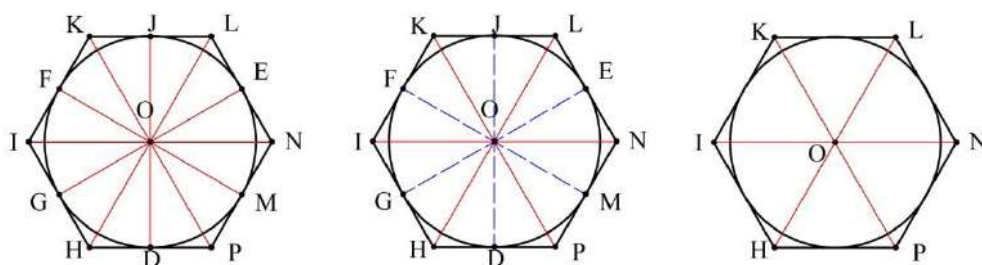
Com o compasso em D e usando da mesma abertura, desenhe uma circunferência. A intersecção das duas circunferências de centro em D e em M vai gerar um segmento de reta que intercepta o lado AB do triângulo em P. Ligue o ponto P ao ponto N através de um segmento de reta.



Destacando o hexágono, teremos a seguinte figura:



E, por fim:



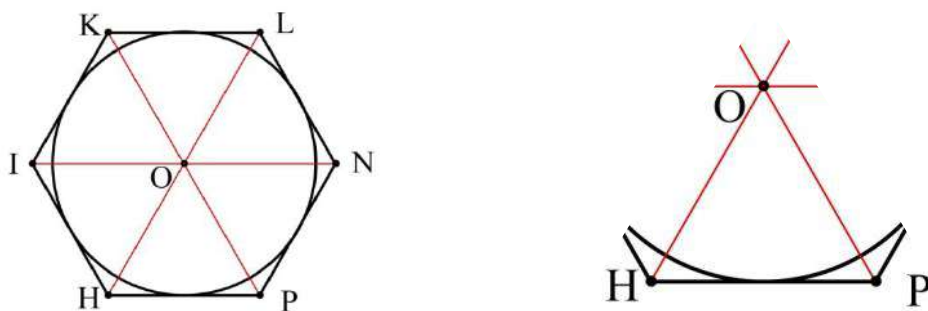
Arquimedes, novamente, continuou realizando o mesmo procedimento e obteve polígonos com 12, 24, 48 e 96 lados

Aqui, vamos fazer outra parada e outra observação:

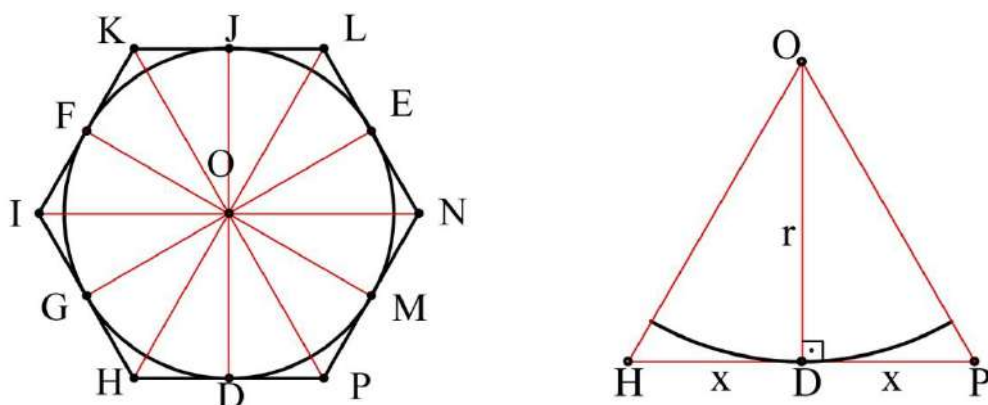
O que podemos afirmar em relação ao comprimento da circunferência e o perímetro do polígono nela inscrito?

Já estamos bem próximos aos resultados obtidos por Arquimedes. Vamos calcular o perímetro deste polígono.

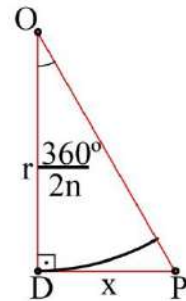
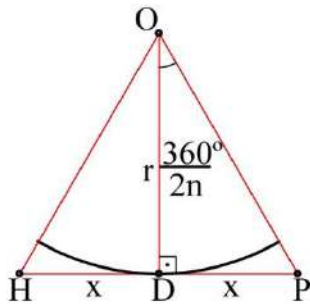
Como você pode observar o polígono circunscrito à circunferência pode ser dividido de modo a formar vários triângulos equiláteros. Isolaremos um dos triângulos equiláteros, por exemplo o triângulo HOP, para obter a seguinte figura:



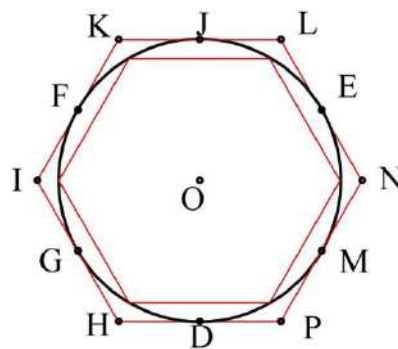
Observe que, tomando por base a figura da esquerda, o mesmo triângulo equilátero divide-se em dois outros triângulos retângulos. E que o segmento de reta $\overline{OD}$, tanto é a bissetriz e a altura do triângulo HOP quanto é o raio da circunferência inscrita no hexágono.



Isolando um deles, a partir do qual você deverá encontrar o lado “ x ”, em seguida o lado “ X ” e, por fim, o perímetro P_i do polígono inscrito. Sugestão: determine o valor do ângulo $\widehat{DOP}$ e use uma das razões trigonométricas.



Como você mesmo já deve ter observado, o comprimento da circunferência C vai estar compreendido entre o comprimento do polígono inscrito e o comprimento do polígono circunscrito à circunferência.



Ou seja,

$$P_i = 2 \cdot r \cdot n \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{360^\circ}{2n} \right) < C < P_c = 2 \cdot r \cdot n \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{360^\circ}{2n} \right)$$

Pronto para determinar, segundo o método de Arquimedes, o valor de π ?
 Para facilitar, construímos a seguinte tabela, a qual você deverá completar utilizando a calculadora. Vamos considerar apenas as oito primeiras casas decimais.

Nº de lados do polígono (n)	$\frac{P_i}{2 \cdot r} = n \cdot \text{sen} \left(\frac{360^\circ}{2n} \right)$	$\frac{P_c}{2 \cdot r} = n \cdot \text{tg} \left(\frac{360^\circ}{2n} \right)$	$\frac{P_c}{2 \cdot r} - \frac{P_i}{2 \cdot r}$
3			
6			
12			
24			
48			
96			

Os valores que Arquimedes encontrou, usando polígonos com 96 lados, para P_c é $3\frac{1}{7} \cdot d$ e para P_i é $3\frac{10}{71} \cdot d$. O que é equivalente aos nossos valores para $P_c = 3,14103195 \cdot 2 \cdot r$ e para $P_i = 3,1427146 \cdot 2 \cdot r$.

Que conclusões podemos tirar desses resultados? O que acontece se aumentarmos o número de lados dos polígonos?

Agora você sabe de onde vem e o porquê do valor de π ser aproximadamente 3,14.

E imagine que Arquimedes fez estes cálculos a mais de dois mil anos atrás e sem os recursos que temos hoje!

Muito interessante, não é mesmo?! Então, vamos agora um pouco além. Lembra daquelas perguntas iniciais? Agora que você está familiarizado com o Método de Arquimedes, vai nos ajudar a responder dois destes questionamentos

SAIBA MAIS

TRIGONOMETRIA



POR QUE SE CHAMAM DE SENO, COSSENO E TANGENTE?

A ORIGEM DAS PALAVRAS

DOS POVOS MESOPOTÂMICOS AOS GREGOS, DOS GREGOS AOS ÁRABES, E DOS ÁRABES ATÉ NÓS

As origens da trigonometria são um tanto obscuras e estão perdidas no tempo. Há indícios de estudos da trigonometria na Mesopotâmia antiga e astrônomos babilônicos dos séculos IV a V a. C. juntaram um conhecimento considerável sobre trigonometria, que foi, mais tarde, repassado aos matemáticos gregos. Esse conhecimento foi obtido através de uma astronomia primitiva, que deu origem a trigonometria esférica.

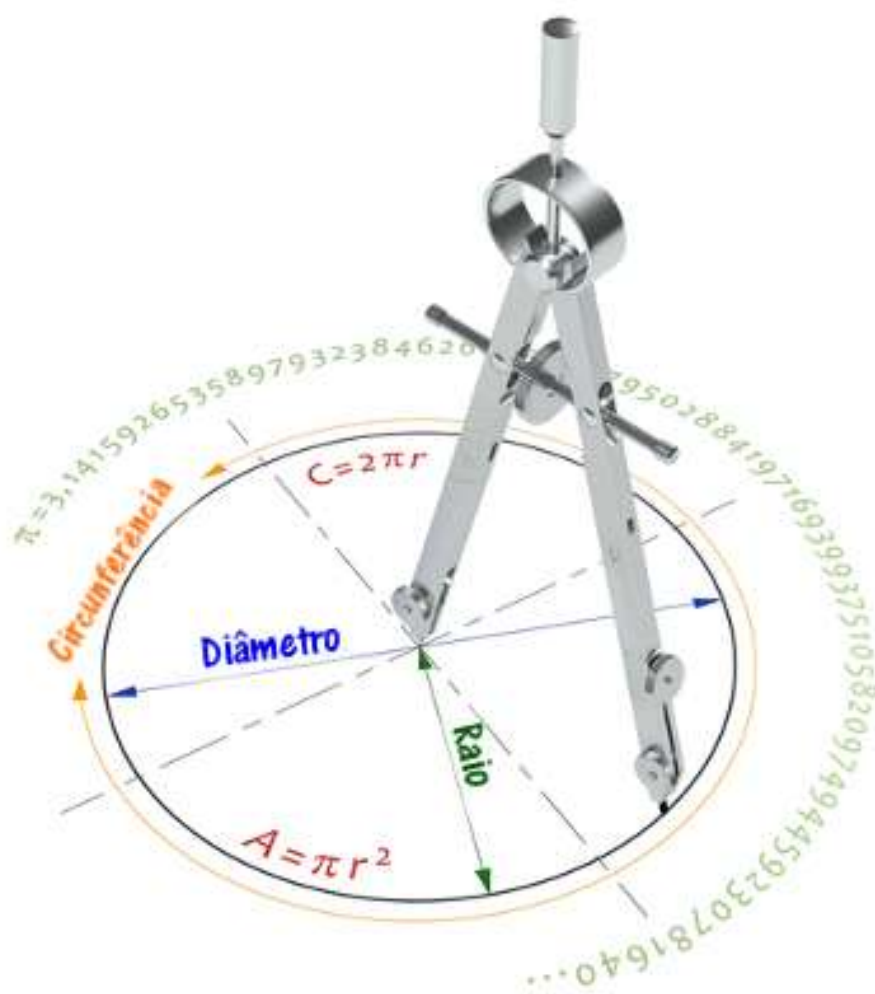
Os matemáticos árabes consideravam-se, antes de tudo, astrônomos e, desta forma, dedicavam considerável interesse pela trigonometria. É desse povo que se origina a palavra seno. Aryabhata usava a palavra *ardha-jya*, que quer dizer semicorda, para designar a razão trigonométrica seno. Outras vezes usava também a palavra *jya-ardha*, que quer dizer corda metade. E abreviando, Aryabhata escrevia apenas *jya*, que, traduzido, quer dizer

corda. Os árabes derivaram foneticamente *jya* para *jîba*, que pelo costume, entre eles, de omitir as vogais, ficava sedo apenas *jb*. Acontece que *jîba* é uma palavra que não tem mais sentido algum em árabe. Por este motivo, os escritores que se depararam com a palavra *jb* aproximaram-na para a palavra mais próxima, *jaib*, que quer dizer enseada ou baía. Quando, mais tarde, Gerardo de Cremona fez a tradução de *jaib* para o latim, empregou *sinus*, que é a palavra latina equivalente e originou a palavra seno.

A palavra cosseno é a junção do prefixo “co”, de complemento, com a palavra seno, ou seja, o cosseno é o complemento do seno. Já a razão trigonométrica tangente, tem a origem de seu nome explicada através da geometria:

Em um círculo de raio unitário, o valor da tangente de um ângulo θ é dado pelo comprimento do segmento "tangente" a este círculo.

CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO



Chegou o momento em que respondemos àqueles questionamentos iniciais. Este capítulo, apesar de curto, tal como o capítulo anterior, dentro deste trabalho, é muito importante.

É aqui onde faremos a demonstração de como através da utilização do Método Clássico de Arquimedes para o cálculo de π chegamos às fórmulas do cálculo do comprimento da circunferência e do cálculo

da área do círculo.

Já não será necessário a utilização de régua e compasso, pois não construiremos figuras geométricas. Apenas utilizaremos algumas daquelas fórmulas e figuras geométricas desenvolvidas no capítulo anterior. Conjuntamente a elas, utilizaremos, novamente, alguns conceitos de trigonometria para, por fim, chegarmos aos resultados que queremos.

COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA

Você já se perguntou por que $C = 2 \cdot \pi \cdot r$, não é isso? Para responder esta pergunta, vamos resgatar dois importantes resultados:

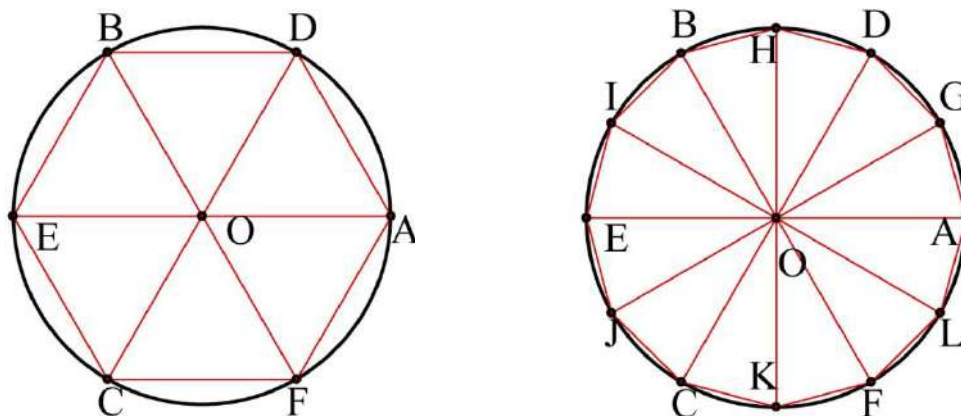
$$P_i = 2 \cdot r \cdot n \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{360^\circ}{2n} \right) \text{ e } P_c = 2 \cdot r \cdot n \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{360^\circ}{2n} \right)$$

Agora, em um exercício de imaginação, aumente, como fizemos anteriormente, o número de lados dos polígonos até o infinito. O que acontece? Os dois polígonos vão coincidir com a circunferência e teremos, então:

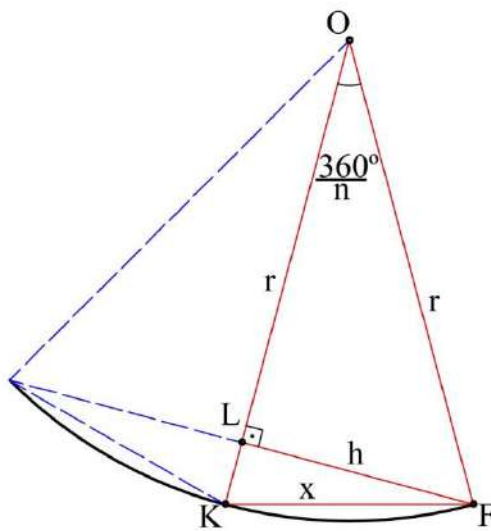
$$P_i = P_c = C = 2 \cdot r \cdot \pi$$

ÁREA DO CÍRCULO

Da mesma forma, você também já se perguntou por que $A = \pi \cdot r^2$? Para responder seu questionamento vamos precisar de duas figuras usada por nós anteriormente.



Lembra-se delas? Você deve encontrar uma fórmula para o cálculo da área do polígono. Sugestão: na figura abaixo calcule determine através de uma das razões trigonométricas a altura h do triângulo KOF e use a fórmula para o cálculo da área do triângulo $A_t = \frac{b \cdot h}{2}$, onde b é a base do triângulo e h a altura do triângulo.



Observe que h uma das alturas do triângulo KOF é um cateto do triângulo LOF. Portanto:

$$\text{sen} \left(\frac{360^\circ}{n} \right) = \frac{h}{r}$$

Daí,

$$h = r \cdot \text{sen} \left(\frac{360^\circ}{n} \right)$$

Lembrando que a área do triângulo KOF é dada por $A_t = \frac{b \cdot h}{2}$, temos:

$$A_t = r \cdot r \cdot \text{sen} \left(\frac{360^\circ}{n} \right) / 2$$

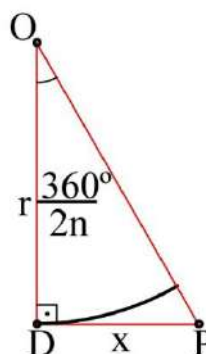
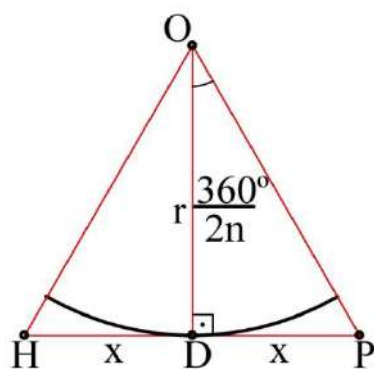
Logo, sendo A_n a área do polígono formado pela soma dos n triângulos,

$$A_n = n \cdot r^2 \cdot \text{sen} \left(\frac{360^\circ}{n} \right) / 2$$

e, rearranjando,

$$A_n = \frac{n}{2} \cdot \text{sen} \left(\frac{360^\circ}{n} \right) \cdot r^2 \quad (\text{I})$$

Deixemos esta equação por um tempo e vamos observar outras figuras por nós conhecidas. Você deve, novamente, encontrar uma fórmula para o cálculo da área do polígono. Siga a mesma sugestão anteriormente dada, ou seja, na figura abaixo calcule determine através de uma das razões trigonométricas a altura h do triângulo KOF e use a fórmula para o cálculo da área do triângulo $A_t = \frac{b \cdot h}{2}$, onde b é a base do triângulo e h a altura do triângulo.



Do triângulo DOP, temos:

$$\text{tg} \left(\frac{360^\circ}{2n} \right) = \frac{x}{r}$$

Isolando x :

$$x = r \cdot \text{tg} \left(\frac{360^\circ}{2n} \right)$$

Daí, a base do triângulo HOP é

$$\overline{HP} = 2 \cdot x = 2 \cdot r \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{360^\circ}{2n}\right).$$

Lembrando que a área do triângulo é dada por $A_t = \frac{b \cdot h}{2}$, temos:

$$A_t = \frac{2 \cdot r \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{360^\circ}{2n}\right) \cdot r}{2}$$

$$A_t = r^2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{360^\circ}{2n}\right)$$

Logo, sendo A_n a área do polígono formado por n triângulos,

$$A_n = n \cdot r^2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{360^\circ}{2n}\right)$$

e, rearranjando,

$$A_n = n \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{360^\circ}{2n}\right) \cdot r^2 \quad (\text{II})$$

Importante! Lembre-se que estamos considerando o raio como medindo uma unidade, portanto: $r = 1$, consequentemente, $r^2 = 1$.

Com as equações (I) e (II) e considerando as oito primeiras casas decimais, podemos completar a tabela seguinte:

Nº de lados do polígono (n)	$\frac{n}{2} \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{360^\circ}{n} \right)$	$n \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{360^\circ}{2n} \right)$	$[n \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{360^\circ}{2n} \right)] - [\frac{n}{2} \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{360^\circ}{n} \right)]$
3			
6			
12			
24			
48			
96			
192			
384			
768			
1536			

Com a tabela completa, que relação podemos estabelecer entre o número de lados dos polígonos e as equações (I) e (II)?

Observe que:

$$\frac{n}{2} \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{360^\circ}{n} \right) \cdot r^2 = A = n \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{360^\circ}{2n} \right) \cdot r^2$$

Fazendo, através da convergência, $\pi = \frac{n}{2} \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{360^\circ}{n} \right)$ e, também, $\pi = n \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{360^\circ}{2n} \right)$, então,

$$\pi \cdot r^2 = A = \pi \cdot r^2.$$

Com isto, temos provado que $A = \pi \cdot r^2$.

CONCLUSÃO

Inicialmente, para responder aqueles três questionamentos introdutórios, partimos de um problema prático: uma pessoa queria que sua piscina projetada para ter o formato de um círculo fosse construída no formato de um quadrado, mas que ocupasse a mesma área. Desta maneira, como colocado, estávamos diante do problema que há milhares de anos atrás e por muito tempo intrigou diversos matemáticos: O Problema da Quadratura do Círculo.

Na tentativa de resolver o problema nos deparamos com a necessidade de construirmos um segmento de reta que medisse $\sqrt{\pi}$. Mas, como vimos, tal segmento de reta não pode ser construído. Isto nos levou a conhecer um pouco mais sobre os Números Irracionais, provando sua existência tanto através de uma construção geométrica quanto por contradição. Com a impossibilidade de construir um segmento que mede $\sqrt{\pi}$, é impossível quadrar o círculo. Tudo bem, basta avisar ao proprietário da piscina que a alteração no projeto, da forma com ele quer, é impossível. Mas, se π é irracional qual o seu valor aproximado?

Para responder este novo questionamento, recorreremos ao Método Clássico de Arquimedes para a determinação do valor de π . O método utiliza polígonos inscritos e circunscritos em uma circunferência.

Foi através do Método Clássico de Arquimedes que, no capítulo anterior (página 58), demonstramos que, ao aumentar ao máximo o número de lados dos polígonos inscritos e circunscritos na circunferência de raio unitário, encontramos um valor para

$$\pi = 3,141592...$$

Foi através deste método, também, que pudemos provar que o comprimento P da circunferência é dado por:

$$P = 2\pi r.$$

E que a área do círculo A é dada por:

$$A = \pi r^2.$$

Portanto, através do uso da História da matemática demos resposta para aqueles nossos questionamentos. Além do que, no processo de construção destas respostas, ainda tivemos a oportunidade de discutir alguns outros conceitos da Geometria Plana.

POVOS DA ANTIGUIDADE

Uma breve visita a alguns povos da antiguidade e sua relação com a Matemática



OS POVOS QUE VISITAREMOS:

Os Povos da Mesopotâmia
Os Egípcios
Os Gregos
Os Chineses

AS COMUNIDADES PRIMITIVAS

Os povos primitivos viviam da caça e da coleta de alimentos. Devido à necessidade constante da busca por comida tornaram-se povos nômades. Desse longínquo período da humanidade, estão registrados limitados avanços tecnológicos e intelectuais. Não que faltasse a inteligência para estes povos, na verdade, faltava-lhes ainda a estrutura social e econômica. Nesta época, todos estavam ocupados demais trabalhando para tentar sobreviver. Era uma vida atarefada e curta demais para que houvesse tempo para ponderações filosóficas e científicas. Contudo, por volta de 20.000 a. C., uma certa cultura já havia sido desenvolvida, incluindo a confecção de ferramentas, a religião, a arte, o comércio, a música e a linguagem. Da coleta de alimentos derivou uma matemática primitiva baseada em um sistema de contagem primitivo.

Porém, este panorama muda com o fim da Idade da Pedra e com a Revolução Agrícola. Devido às mudanças climáticas o homem saiu das savanas em busca de melhores condições de vida e encontra terras férteis. Em decorrência, o homem deixa de ser exclusivamente caçador e coletor e passa a ser também agricultor. Logo, o alimento deixa de ser escasso e alguns povos e, dentre eles, alguns privilegiados, passam a ter tempo para o sedentarismo e o lazer. O estilo de vida muda e surgem novas civilizações.

MESOPOTÂMIA: A ORIGEM DAS CIVILIZAÇÕES

Os primeiros grupos humanos herdaram de seus antepassados o nomadismo, pois, basicamente, viviam da coleta de frutas e sementes e da caça. Com o passar do tempo, o homem descobriu a agricultura e passou a viver de forma mais fixa.

As primeiras civilizações se formaram por volta de 4000 anos a. C., no Oriente Médio. Localizada na estreita faixa entre os rios Tigre e Eufrates, onde, atualmente, está localizado o Iraque, a Mesopotâmia (do grego: meso = no meio; potamos = rio), foi uma região ocupada, de 4.000 a. C. a 539 a. C., por alguns povos antigos, tais como, Sumérios, Babilônicos, Hititas, Assírios e Caldeus. Estes povos, durante este período, se encontraram, relacionando-se e empreendendo guerras e conquistas.

A sociedade mesopotâmica era dividida em classes: os, nobres e governantes, os comerciantes, os sacerdotes e os militares, ou seja, os dominantes; os pequenos proprietários, pequenos artesãos, os camponeses e os escravos (dominados). A organização societária mudou durante os séculos, mas de forma geral tínhamos os dominantes exercendo seu poder através de sua riqueza, militarismo, saber e política; e os dominados sobrevivendo do que conseguiam produzir e entregando o excedente aos dominantes.



A MATEMÁTICA NA MESOPOTÂMIA

Matemática Agrária e comercial

Há registros em tábuas que o uso do sistema sexagesimal já estava estabelecido há muito tempo e que estes povos, pela necessidade de fazer a distribuição de produtos agrícolas e de realizar cálculos aritméticos baseados em transações comerciais, já dominavam operações envolvendo juros simples e compostos e lidavam com um sistema de pesos e medidas.

Álgebra

Próximo do ano 2.000 a. C. os babilônicos já haviam passado da aritmética para uma álgebra bastante desenvolvida. Eles eram capazes de resolver tanto equações quadráticas, seja pelo método de completar quadrados ou por um método similar ao de substituição em uma fórmula geral, quanto discutir equações cúbicas e biquadradas.



A MATEMÁTICA NA MESOPOTÂMIA

Geometria

Intimamente ligada com a mensuração prática, a geometria babilônica tinha como marca principal seu caráter algébrico. Deve-se, com certeza a estes povos a divisão da circunferência em 360° . Já por volta de 2.000 a. C. e 1.600 a. C. estes povos estavam familiarizados com as regras gerais para se calcular a área do retângulo, do triângulo retângulo e isósceles, e consideravam a medida da circunferência como o triplo da medida do diâmetro. Também tinham a área do círculo como sendo um duodécimo da área do quadrado de lado igual à circunferência respectiva.



SUMÉRIOS

Os Sumérios são um povo que existiram durante os anos de 4.000 a. C. e 1.600 a. C. na Mesopotâmia. Estes povos enfrentavam constantemente as cheias dos rios Tigre e Eufrates. Por esse motivo, para conter a força das águas, construíam diques, reservatórios, barragens e canais de irrigação, que aproveitavam a água, conduzindo-a para as regiões secas.

Aos Sumérios é atribuída a criação da escrita cuneiforme. O trabalho com metal, a lapidação de pedras preciosas e a confecção de esculturas eram atividades nas quais os Sumérios também se destacavam. Sua religião era politeísta e um forte aspecto na vida deste povo. Era, também, uma sociedade baseada na escravidão, embora o número de escravo fosse reduzido.

Apenas em 2.300 a. C. as cidades sumérias, que eram autônomas e possuíam governos independentes, foram unificadas. A unificação ocorreu sob o governo do rei Sargão I e, na cidade de Acad, surgiu o primeiro império da região.

BABILÔNICOS

Os Babilônicos foram um povo que viveu ao norte da região habitada pelos Sumérios, entre os anos de 1900 a. C. e 1600 a. C.. Os Babilônicos tinham um excelente conhecimento em astronomia, derivado da característica de serem, também, excelentes observadores de astros. Com isto, desenvolveram um relógio de sol muito preciso. Sendo atingidos pelas cheias do Rio Eufrates, os Sumérios pela necessidade de prever tal fenômeno e de conseguir melhores condições para o desenvolvimento da agricultura, criaram um preciso e rico calendário.

Foram dois os reis que se destacaram entre os que governaram este povo: Hamurabi e Nabucodonosor. Hamurabi, por volta de 1750 a. C. já havia conquistado toda a Mesopotâmia, governando um império tinha como capital a Babilônia. Uma das características de Hamurabi foi impor a mesma administração a todos os povos por ele dominados. Outra característica foi a sua legislação, baseada no princípio de talião (olho por olho e dente por dente). O conjunto de leis escritas, o mais antigo da história, ficou conhecido como Código de Hamurabi. Nabucodonosor é muito conhecido pela construção dos Jardins Suspensos da Babilônia. Além do que, no seu governo, os Babilônicos conquistaram o povo hebreu e a cidade de Jerusalm.



EGÍPCIOS

Por volta de 6.000 anos atrás, às margens do Rio Nilo, formou-se a civilização egípcia, que atingiu um complexo desenvolvimento na ciência, no comércio e na religião.

Não podemos falar do Egito sem falar do Rio Nilo, ao qual esse povo está fortemente ligado. Localizado na porção nordeste do continente africano, o Rio Nilo obedece a um regime de enchentes anuais durante os meses de junho a setembro. Neste período o rio transbordava e, ao secar, deixava seu leito fertilizado e pronto para o plantio.

O Egito localiza-se em uma região desértica de pouca chuva, mas, banhada pelos mares Vermelho e Mediterrâneo, limitada pelo Deserto da Líbia e pelo Sudão.

A cultura egípcia, mesmo sendo elaborada, apenas acentuava a desigualdade entre os que detinham posses e os que não as detinham.



A MATEMÁTICA NO EGITO ANTIGO

Aritmética e álgebra

Devido ao seu sistema de numeração, sua aritmética tinha o caráter de ser aditiva. Os problemas numéricos encontrados, referentes àquele período, são em sua maioria muito simples e de origem prática. Embora, já, neste período, sejam registrados alguns problemas de ordem teórica. Sendo alguns resolvidos através de uma equação linear simples. Há, também, o registro de problemas teóricos envolvendo progressões aritméticas e geométricas.

Geometria

A geometria dos Egípcios era também muito ligada a questões práticas, como, por exemplo, mensuração de terras e o cálculo do volume de grãos.



A MATEMÁTICA NA GRÉCIA ANTIGA

A Matemática

Com o declínio de impérios, como a Babilônia e o Egito, e ascensão de outros povos, como os Hebreus, Assírios, Fenícios e Gregos, aquele mundo passou por mudanças econômicas e políticas. Novas rotas comerciais se estabeleceram e as cidades localizadas neste percurso viram florescer uma nova civilização. Nela se instalou uma atmosfera de racionalismo, fazendo surgir a matemática no sentido moderno da palavra.

Neste período, tido como o berço da matemática demonstrativa, se sobressaem Tales de Mileto, segundo a tradição da geometria demonstrativa, e Pitágoras e os Pitagóricos, com sua aritmética pitagórica, o Teorema de Pitágoras e os Ternos pitagóricos, a descoberta dos números irracionais, as identidades algébricas, a utilização da álgebra geométrica para a resolução de equações quadráticas e a transformação de áreas, por exemplo.

Ainda merecem destaque o criador da famosa e duradoura escola de matemática de Alexandria, Euclides, com os seus Elementos.



GREGOS

A antiga Grécia compreendia uma região o sul dos Balcãs, as ilhas do Mar Egeu, colônias na costa da Ásia Menor, Península do Peloponeso e sul da península Itálica. Essa região que abarcava todo esse território chamava-se Hélade.

O mundo moderno herdou do povo grego um imenso legado cultural. Temos, notadamente, sua presença nas ciências, na Filosofia, no Direito, na grafia de algumas palavras, na literatura e nas artes em geral, para citar alguns exemplos.

Entre as cidades que se destacavam na Grécia, temos Esparta e Atenas. Muitos dos “pais” das ciências saíram da Grécia, tais como: Pitágoras (Pai da matemática), Heródoto (Pai da História) e Hipócrates (Pai da Medicina). Ainda merecem destaque os matemáticos Tales de Mileto, Arquimedes e Euclides, entre outros; e, na Filosofia, Platão, Sócrates e Aristóteles.

Um imenso legado cultural: Ciências, Artes, Filosofia, Direito, Literatura...



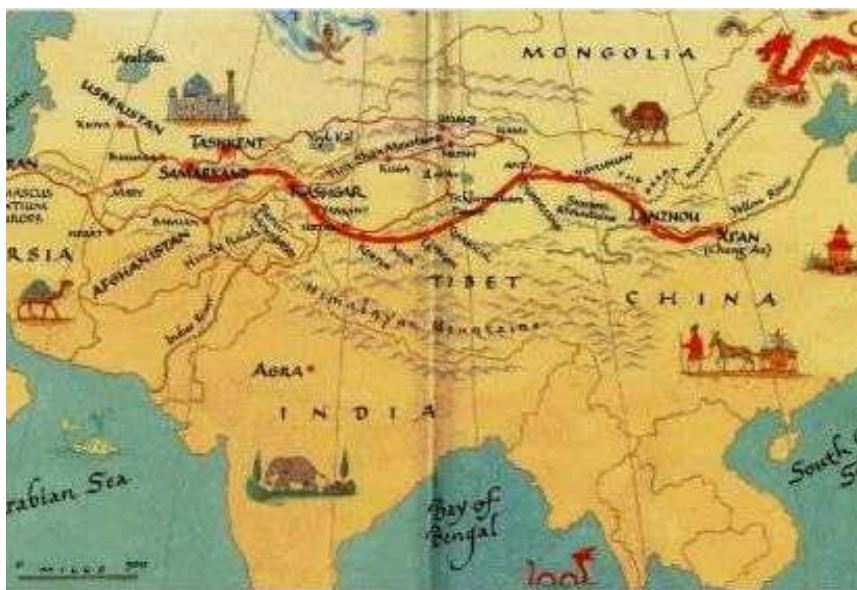
CHINESES

Estudos recentes dão como o início da civilização chinesa o período de 4.000 anos atrás. Mas, também, há registros que, a cerca de 6.000 anos, em Yangzhou, desenvolveu-se uma cultura neolítica, sendo o resultado do relacionamento de alguns povos que se agruparam nas proximidades de Rio Amarelo, desenvolvendo uma agricultura e pecuária rudimentares.

Os chineses foram responsáveis por muitas invenções e até o século XV se destacavam na produção intelectual e tecnológica.

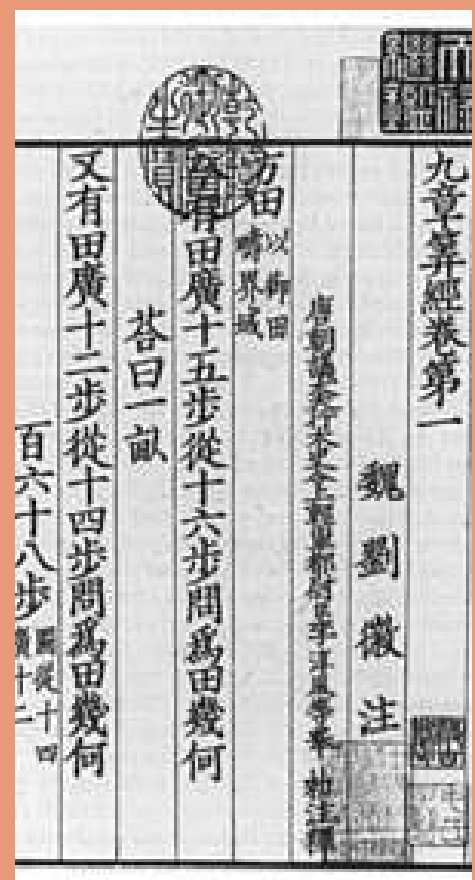
Entre suas criações, destacam-se a pólvora, a bússola e o compasso, por exemplo.

A Matemática voltada para a aplicabilidade, além de criações como a pólvora, a bússola e o compasso, são legados dos chineses.



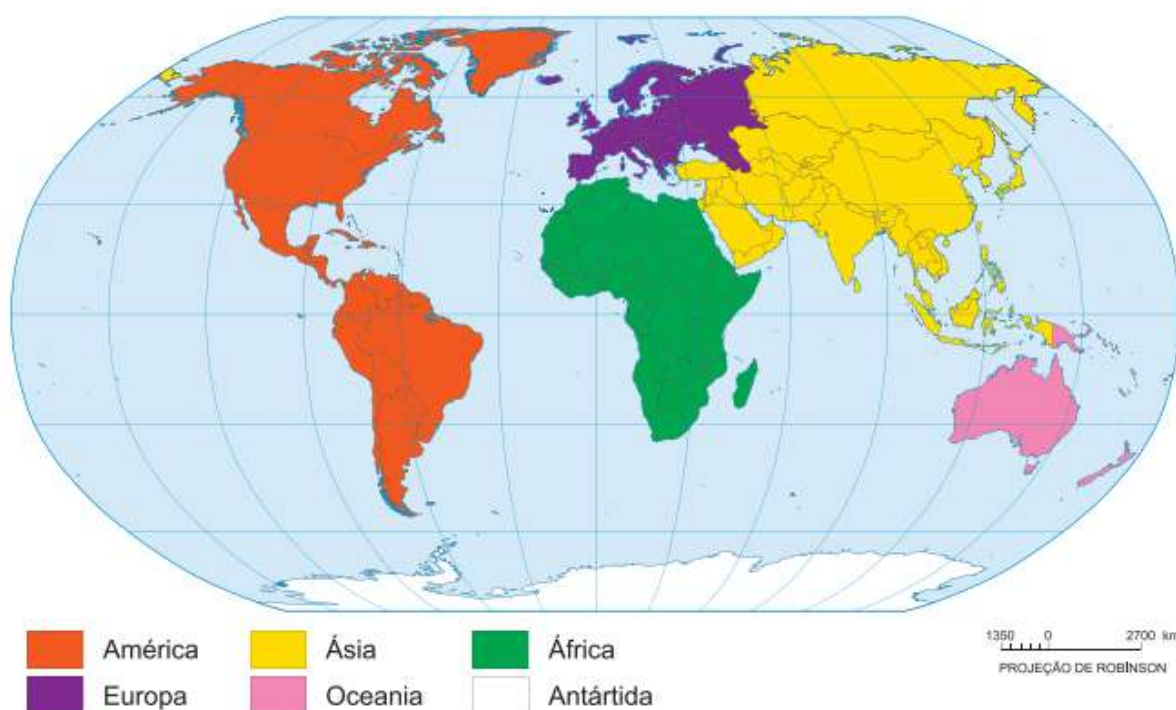
A MATEMÁTICA NA CHINA ANTIGA

A matemática chinesa antiga tinha como traço a aplicabilidade, ou seja, cálculos orientados numa sequência de problemas onde teoria e prática se ligavam. Eram problemas que envolviam porcentagem e proporção, regra de três, determinação de lados de figuras, o que incluía cálculos de raízes quadradas e cúbicas, volumes, sistemas de equação lineares e procedimentos matriciais.



DESAFIO

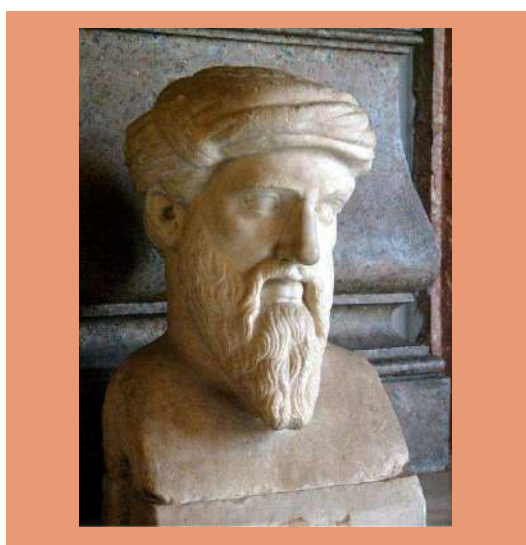
Durante a leitura desta seção você deve ter percebido que foram feitas referências a alguns povos da antiguidade. Entre estes povos, temos os que viveram na região da Mesopotâmia, no Egito, na Grécia e na China. Você é capaz de localizar, no mapa seguinte, os continentes habitados por estes povos?



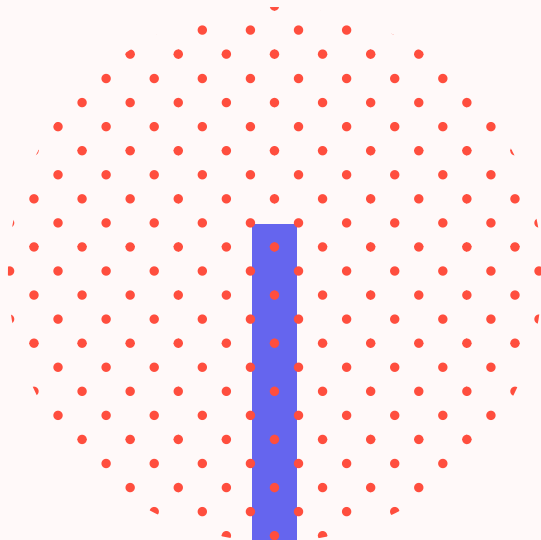
Você deve ter localizado o Egito no continente africano. Mas será que era apenas neste país de todo o continente que se fazia matemática? Pesquise sobre a contribuição dos povos africanos para a matemática e você encontrará muita coisa interessante.

REFLITA!

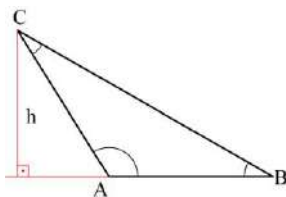
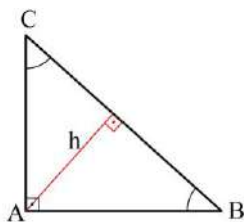
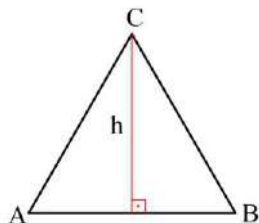
A imagem ao lado é de uma escultura que retrata Pítagoras, o Pai da Matemática. O termo "pai", desta forma, é usado para indicar o fundador de alguma área das Ciências. Mas estes filhos possuem apenas "pais"? Faça uma pesquisa sobre as "mães" das áreas das Ciências. Em seguida, reflita sobre a condição imposta à mulher tanto no campo científico quanto na sociedade.



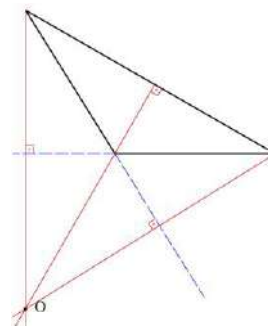
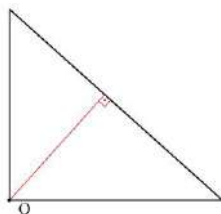
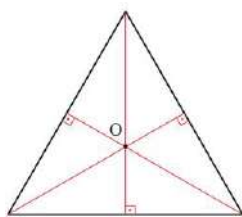
GLOSSÁRIO



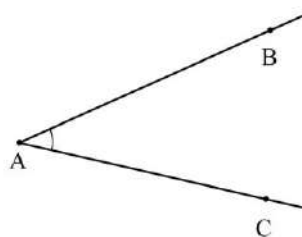
ALTURA DE UM TRIÂNGULO é o segmento de reta que une um vértice ao lado oposto ou ao prolongamento do lado oposto, formando com ele um ângulo de 90° .



Todo triângulo possui três alturas que se encontram em um único ponto denominado **ortocentro**.

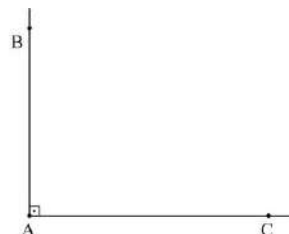


ÂNGULO é a região formada por duas semirretas que tem a mesma origem, o vértice. Usaremos letras do alfabeto grego para denominar os ângulos. E serão medidos em graus ($^\circ$).

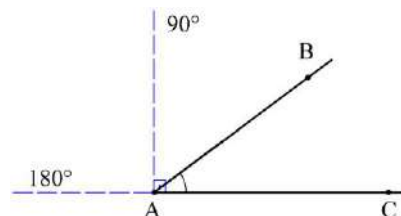


Um ângulo pode ser:

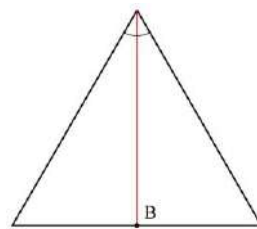
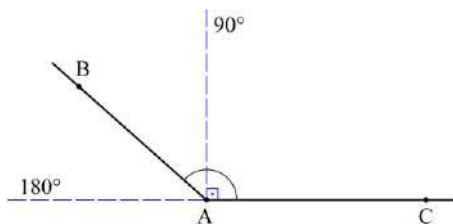
Reto – quando mede 90° ;



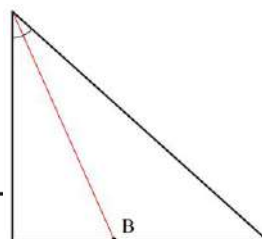
Agudo – quando mede menos do que 90° ;



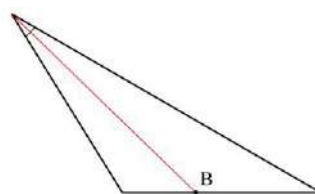
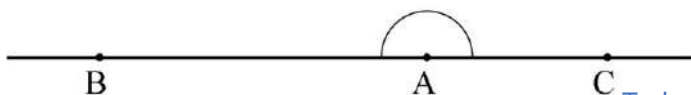
Obtuso – quando mede mais do que 90° .



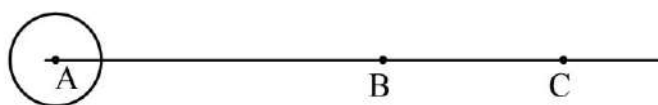
Nulo – quando mede 0° .



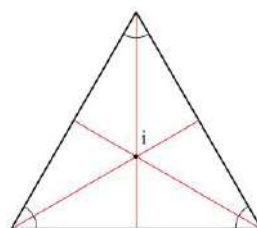
Raso ou de meia-volta – quando mede 180° .



De uma volta – quando mede 360° .

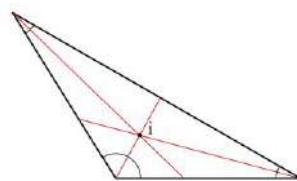
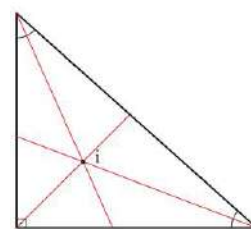
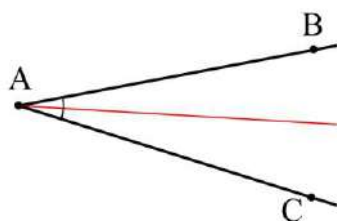


Todo triângulo possui três bissetrizes que se encontram em um único ponto denominado **incentro**.



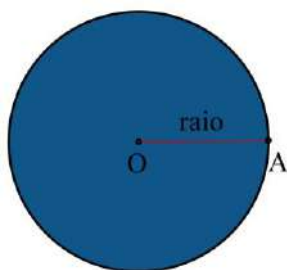
ÁREA é a medida da extensão de uma superfície, expressa em uma unidade padrão preestabelecida.

BISSETRIZ DE UM ÂNGULO é a semirreta de origem no vértice que, com os lados do ângulo determina dois ângulos de medidas iguais, isto é, congruentes.

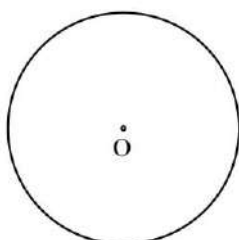


BISSETRIZ DE UM TRIÂNGULO é o segmento de reta que une o seu vértice ao lado oposto a ele, dividindo o ângulo desse vértice em dois outros de mesma medida.

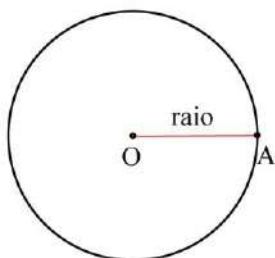
CÍRCULO é uma figura geométrica plana formada pela união da circunferência com todos os pontos internos a ela.



CIRCUNFERÊNCIA é a figura geométrica plana formada por todos os pontos do plano que distam r de um ponto central, que chamaremos de O , fixo.

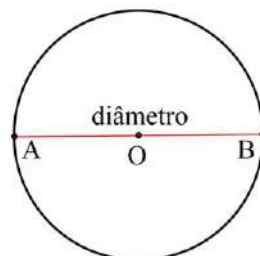


A distância r é o **raio** (r) da circunferência, ou seja, o raio é a distância entre o ponto O , que é o **centro** da circunferência, e um ponto tomado sobre ela.

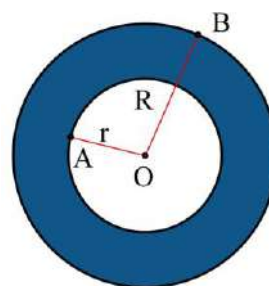


Uma **corda** é o segmento de reta que une dois pontos da circunferência. **Arco de uma circunferência** é uma das partes da circunferência delimitada por dois pontos tomados sobre ela.

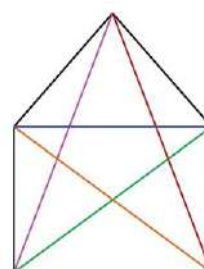
O **diâmetro** (d) da circunferência é a distância, passando sobre o centro, entre dois pontos sobre a circunferência, ou seja, $d = 2 \cdot r$, ou seja, é a maior corda da circunferência.



COROA CIRCULAR é a região delimitada por duas circunferências concêntricas e de raios distintos.



DIAGONAL DE UM POLÍGONO CONVEXO é o segmento de reta com extremidades em dois vértices não consecutivos.



Qual polígono não possui diagonal?

GEOMETRIA, do grego, Geo significa Terra, e metria significa medida, é o ramo da matemática que estuda as formas

geométricas, levando em consideração seu comprimento, área e volume.

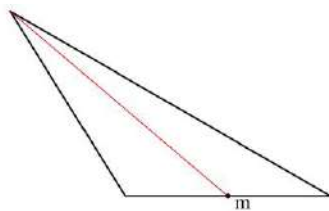
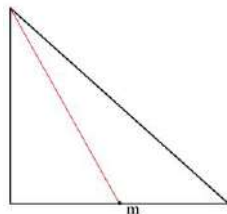
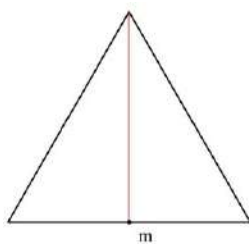
Divide-se em:

Geometria analítica: seu estudo acontece pela utilização de conceitos de geometria e álgebra através de um sistema de coordenadas;

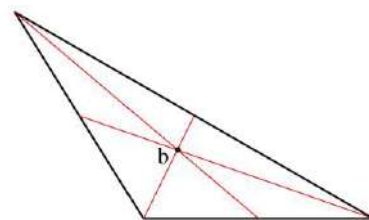
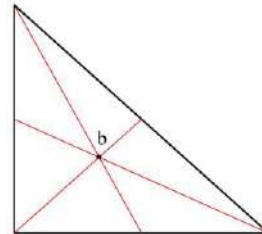
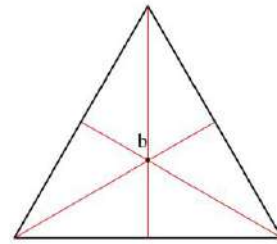
Geometria espacial: estuda as figuras geométricas que possuem volume e mais de uma dimensão;

Geometria Plana: estuda as figuras geométricas que não possuem volume.

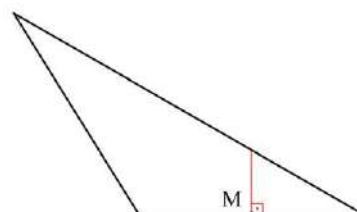
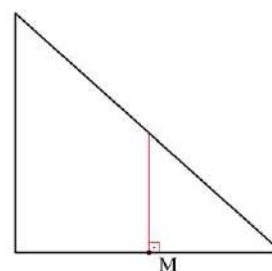
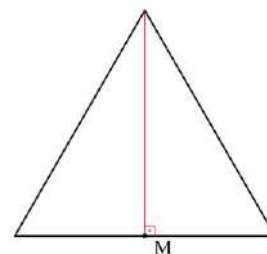
MEDIANA DE UM TRIÂNGULO é o segmento de reta que une o seu vértice ao ponto médio do lado oposto a ele. O ponto médio é o ponto que divide um lado em duas partes iguais.



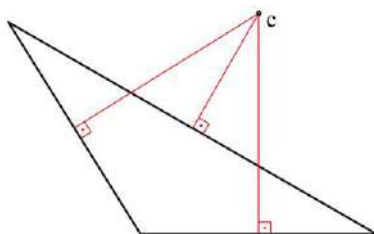
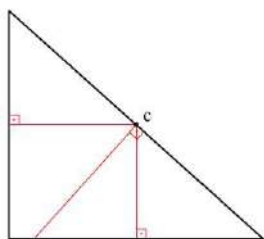
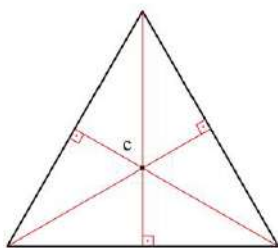
Todo triângulo possui três medianas que se encontram em um único ponto denominado **baricentro**.



MEDIATRIZ DE UM TRIÂNGULO é o segmento de reta que parte do ponto médio de um lado do triângulo e forma, com este, um ângulo de 90° .



Todo triângulo possui três mediatrizes que se encontram em um único ponto denominado **circuncentro**.



NOÇÕES PRIMITIVAS: Na geometria, algumas noções são aceitas sem definição, pois, são produto da mente humana e, portanto, são modelos usados para explicar a realidade. São eles:

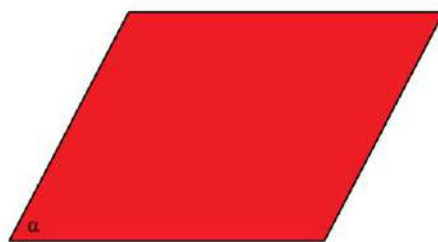
Ponto – não possui massa, dimensão ou volume. Será indicado por uma letra maiúscula.



Reta – geometricamente é representada por uma linha reta que não possui começo ou fim e nem espessura. Será indicado por uma letra minúscula..



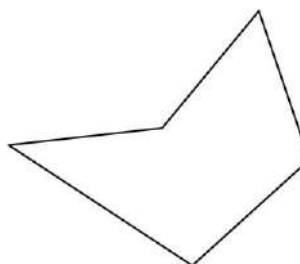
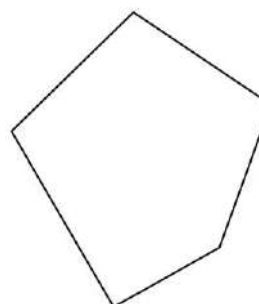
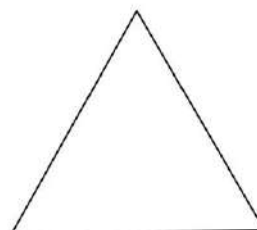
Plano – não possui espessura nem fronteiras. É, geralmente, indicado por letras gregas minúsculas.



Estas noções primitivas fazem parte do espaço, que é o conjunto dos infinitos pontos que existem.

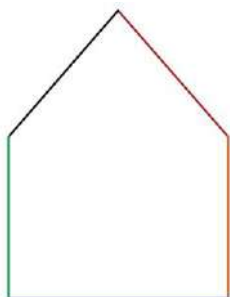
PERÍMETRO indica, nas figuras geométricas, a medida do seu contorno.

POLÍGONO é uma figura geométrica fechada e plana, formada apenas por segmentos de retas.



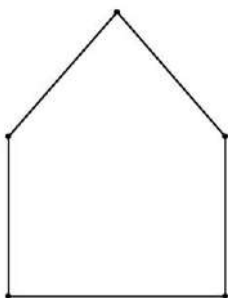
Elementos de um polígono:

Lado - cada um dos segmentos de reta que formam o polígono.

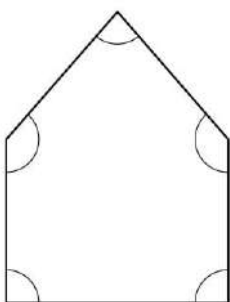


Lados consecutivos - lados que possuem em comum o mesmo vértice;

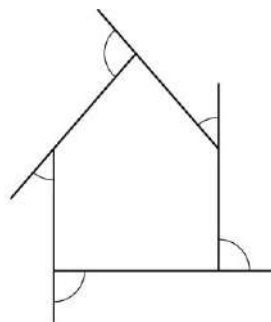
Vértice - o ponto comum a dois lados.



Ângulo interno - é o ângulo formado por dois lados consecutivos.



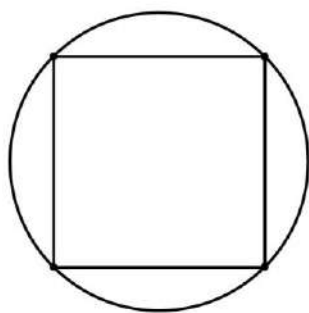
Ângulo externo - é o ângulo formado por um lado do polígono e a projeção do lado consecutivo a ele.



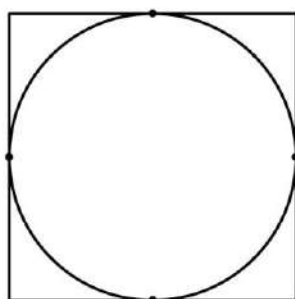
Nomenclatura dos polígonos utilizados com mais frequência:

Número de lados do polígono	Nome do polígono
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

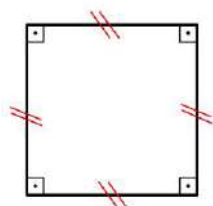
POLÍGONO INSCRITO EM UMA CIRCUNFERÊNCIA é aquele em que todos os seus vértices são pontos da circunferência.



POLÍGONO CIRCUNSCRITO EM UMA CIRCUNFERÊNCIA é aquele em que todos os seus lados tangenciam a circunferência.

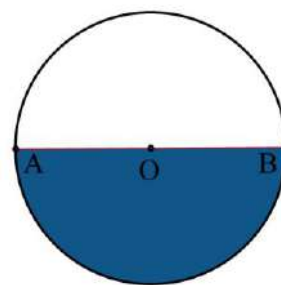


QUADRADO é um quadrilátero que possui propriedades bem específicas: seus quatro lados são congruentes, seus lados opostos são paralelos e seus ângulos internos medem 90° , ou seja, são ângulos retos.

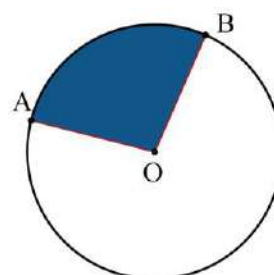


QUADRAR UMA REGIÃO é o processo de traçar, usando apenas régua e compasso, um quadrado que possua área igual à região dada.

SEMICÍRCULO é cada uma das metades do círculo.

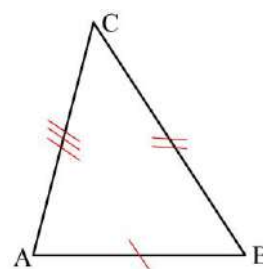


SETOR CIRCULAR é a uma parte do círculo delimitada por dois segmentos de retas distintos que partem do centro da circunferência.

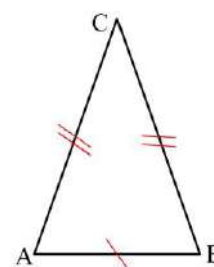


TRIÂNGULO é o polígono que possui três lados e, consequentemente, três ângulos internos e três vértices. Ele é classificado segundo as medidas dos lados em:

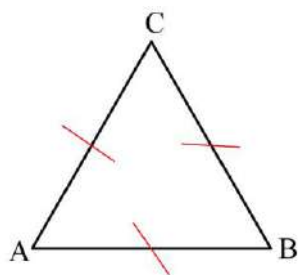
Triângulo escaleno – os seus três lados possuem, cada um, comprimentos diferentes.



Triângulo isóscele – aquele que possui dois lados de mesmo tamanho.

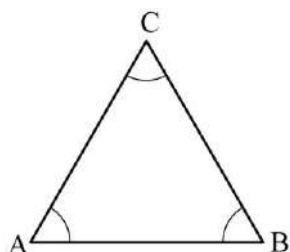


Triângulo equilátero – possui os três lados com mesmo comprimento.

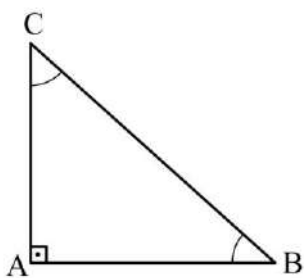


Quanto aos ângulos internos, os triângulos são classificados em:

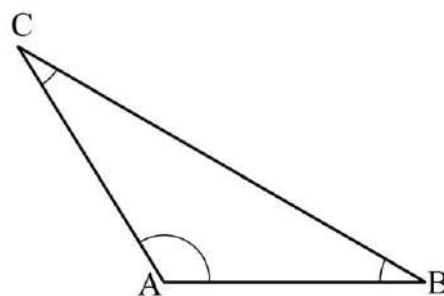
Triângulo acutângulo – possui três ângulos agudos.



Triângulo retângulo – possui um ângulo interno reto e dois agudos.

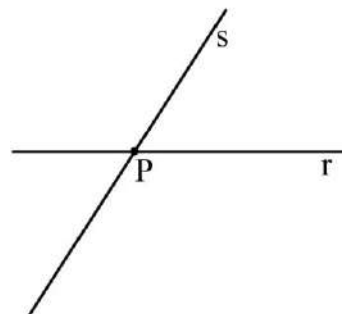


Triângulo obtusângulo – tem um ângulo interno obtuso e dois agudos.



Tipos de retas:

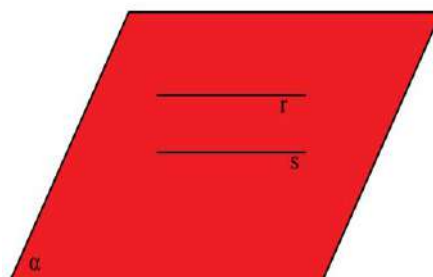
Retas concorrentes: duas retas são concorrentes quando possuem um único ponto em comum;



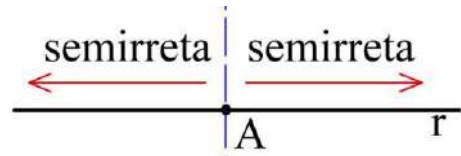
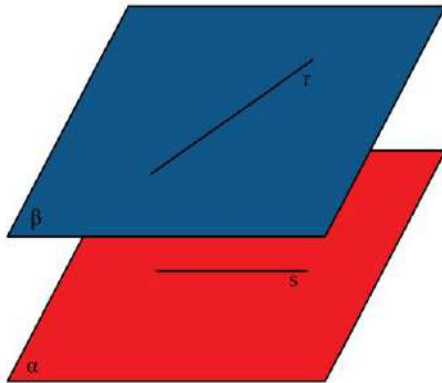
Retas coincidentes: duas retas são coincidentes quando têm em comum dois pontos distintos;



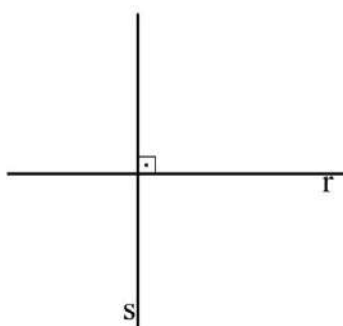
Retas paralelas: duas retas são paralelas estão contidas em um plano em comum e não possuem um único ponto em comum;



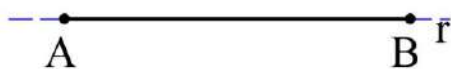
Retas reversas: duas retas são reversas quando não possuem ponto em comum e nem um plano em comum que as contenha;



Retas perpendiculares: duas retas são perpendiculares quando são concorrentes e formam ângulos retos.



SEGMENTO DE RETA é uma parte da reta que possui início e fim, ou seja, é uma parte da reta delimitada por dois pontos.



SEMIRRETA – Considere uma reta qualquer e sobre ela tome o ponto A . Este ponto vai dividir a reta em duas semirretas.

ÁREA DAS PRINCIPAIS FIGURAS PLANAS

CÍRCULO

Sendo **r** o raio de um **círculo qualquer**, a sua área **A** é dada por: **$A = \pi \cdot r^2$** .

Vejamos a seguir as fórmulas das partes do círculo:

- a) Sendo um círculo qualquer, a área **A** do **setor circular**, delimitado por dois raios **r** e um arco **a** da circunferência, é:

$$A = \frac{r^2 \cdot \alpha}{2} \text{ (}\alpha \text{ em radianos) ou}$$

$$A = \frac{a^2 \cdot r}{2}.$$

- b) Sendo um círculo qualquer de raio **r**, a área **A** do **segmento circular**, delimitado por uma reta secante e um arco **a** da circunferência, é:

$$A = \frac{r^2}{2} \cdot (\alpha - \text{sen } \alpha).$$

LOSANGO

Sendo **d** a diagonal menor e **D** a diagonal maior do **losango**, a sua área **A** é dada por: **$A = \frac{D \cdot d}{2}$** .

PARALELOGRAMO

Seja um paralelogramo de base **b** e **h** a altura relativa a esta base, a sua área **A** é dada por: **$A = b \cdot h$** .

QUADRADO

Sendo **a** a medida dos lados do quadrado, a sua área **A** é dada por: **$A = a \cdot a = a^2$** .

RETÂNGULO

Sendo **a** e **b** as medidas dos lados do retângulo, a sua área **A** é dada por:

$$A = a \cdot b.$$

TRAPÉZIO

Sendo **B** a base maior, **b** a base menor e **h** a altura relativa a estes dois lados do **trapézio**, sua área **A** é dada por:

$$A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}.$$

TRIÂNGULO

- a) A área **A** de um **triângulo qualquer** pode ser calculada em função da base **b** e da altura **h** relativa a esta base: **$A = b \cdot h$** .

- b) A área **A** de um **triângulo qualquer** pode ser calculada em função de dois lados, **a** e **b** e do ângulo α compreendido entre eles: **$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \text{sen } \alpha$** .

- c) A área **A** de um **triângulo qualquer** pode ser calculada em função de dois lados, **a**, **b** e **c**, sendo o semiperímetro

$$p = \frac{a+b+c}{2}. \text{ Então:}$$

$$A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}.$$

- d) A área **A** de um **triângulo equilátero** pode ser calculada em função do lado **a**:

$$A = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

REFERÊNCIAS

- BARROSO, Juliane Matsubara (ed.). *Conexões com a matemática*. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2010. v. 1.
- BARROSO, Juliane Matsubara (ed.). *Conexões com a matemática*. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2010. v. 2.
- BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. *Explorando o ensino de matemática*. Brasília, 2004. v. 1.
- EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.
- FERREIRA, Mariana de Lima. *Uma análise dos métodos empregados pelos egípcios para a quadratura do círculo*. 2016. 42 f. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João pessoa, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/4065/1/MLF07052018.pdf>. Acesso em: 17 jan. 2020.
- GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. *A conquista da matemática*, 8º ano. São Paulo: FTD, 2009.
- IEZZI, Gelso, et al. *Matemática: Ciência e aplicações*. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010. v. 1.
- IEZZI, Gelso, et al. *Matemática: Ciência e aplicações*. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010. v. 2.
- MACHADO, Djeison. *Propostas didáticas para o ensino do número π* . 2013. 66 f. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/126609/Djeison_Machado.pdf?sequence=1. Acesso em: 15 fev. 2020.
- SANTANA, Erivaldo Ribeiro. *A quadratura do círculo: Uma abordagem histórica sob a perspectiva atual*. 2015. 85 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2015. Disponível em: <https://tede.ufam.edu.br/bitstream/tede/4551/2/Disserta%C>.
- SANTOS, Júnio Cândido dos. *Histórias de circunferência e círculo: possibilidades didáticas na Educação Profissional e Tecnológica*. 2020. 156 f. (Mestrado Profissional em Educação Profissional e Tecnológica) - Instituto Federal da Paraíba, João Pessoa, 2020.
- SILVA, Alex Gomes da. *Construções geométricas com régua e compasso*. 2013. 132 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2013. Disponível em: <http://www.repositorio.ufal.br/bitstream/riufal/2432/1/Constru%C3%A7%C3%B5es%20geom%C3%A9tricas%20com%20r%C3%A9gua%20e%20compasso.pdf>. Acesso em: 29 nov. 2018.
- SILVA, Luiza Camile Rosa da; CARVALHO, Ana Márcia Tucci. *De lá para cá: tentativas de resolução da quadratura do círculo e suas potencialidades*. Encontro Paranaense de Educação Matemática, 2017. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XIV_EPREM/paper/viewFile/220/214 . Acesso em: 15 fev. 2020.
- SILVA JÚNIOR, Luís Pereira da. *Construções geométricas por régua e compasso e números construtíveis*. 2013. 40 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciência e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2013. Disponível em: <http://www.dme.ufcg.edu.br/PROFmat/TCC/Luis.pdf> . Acesso em: 15 fev. 2020.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. *Matemática: ensino médio*. 5. ed. São Paulo: Saraíva, 2007.

TAHAN, Malba. *O homem que calculava*. 58. ed. Rio de Janeiro: Record, 2002.

VENDEMIATTI, Aloísio Daniel. *A quadratura do círculo e a gênese do número π* . 2009. 145 f. *Dissertação (Mestrado em Matemática)– Pontífica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11374/1/Aloisio%20Daniel%20Vendeniatti.pdf>. Acesso em: 15 fev.2020.*

SITES VISITADOS

<https://www.sohistoria.com.br/>

<https://antigoegito.org/>

<https://revistagalileu.globo.com/Ciencia/noticia/2016/03/o-pi-aparece-nos-lugares-mais-inesperados.html>

<https://theconversation.com/pi-pops-up-where-you-dont-expect-it-55688>

<https://super.abril.com.br/mundo-estranho/para-que-serve-a-sequencia-do-%CF%80/>

<https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/numero-pi>

CRÉDITO DAS IMAGENS

Página 6; fonte: <https://www.matematica.pt/faq/problemas-famosos-antigos.php> . Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 16; *A Recusa de Arquimedes (1720)*; Autor: Sebastiano Ricci. fonte: <https://emaklabin.org.br/explore/obras/a-recusa-de-arquimedes/>. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 17; *A Morte de Arquimedes*; Autor: Gustave Courtois. fonte: https://www.correodelmaestro.com/publico/html5122016/capitulo6/rompecabezas_de_caminos.html. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 19; Detalhe da obra *A Recusa de Arquimedes (1720)* Autor: Sebastiano Ricci. fonte: <https://emaklabin.org.br/explore/obras/a-recusa-de-arquimedes/>. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 20; fonte: <https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-sao-numeros-reais.htm> . Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 21; Fonte:
https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/126609/Djeison_Machado.pdf?sequence=1. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 21; Fonte:
https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/126609/Djeison_Machado.pdf?sequence=1. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 23; Liu Hui; fonte: <http://f2018liuhui.blogspot.com/2018/11/a-greatest-mathematician-of-ancient.html> . Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 23; Anaxágoras; fonte: <https://www.escritas.org/pt/estante/anaxagoras> . Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 23; Hípias de Elis; fonte: <http://filangeles.blogspot.com/2019/09/los-sofistas.html> . Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 24; Arquimedes; fonte:
<https://sites.google.com/site/matematicaeureka/bibliografia-de-arquimedes-de-siracusa>. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 24; Cláudio Ptolomeu; fonte:
<https://educacao.uol.com.br/biografias/ptolomeu.jhtm> . Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 24; Tsu Ch'ung Chi; fonte: https://www.wikiwand.com/pt/Tsu_Ch%27ung_Chih . Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 24; Aryabhata; fonte:
<https://www.coolaboo.com/biography/mathematicians/aryabhata/> . Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 24; Bhaskara; fonte: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=1696>. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 24; Viète; fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Fran%C3%A7ois_Vi%C3%A8te . Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 24; Adriaen Anthoniszoon; fonte:
https://en.wikipedia.org/wiki/Adriaan_Anthonisz. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 24; Adrien Van Roomen;
fonte: https://www.wikiwand.com/pt/Adriaan_van_Roomen. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 24; Ludolph Van Ceulen;
fonte: <https://www.tricurioso.com/2019/04/15/ludolph-van-ceulen-matematico-possui-o-numero-pi-gravado-no-tumulo/>. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 24; Willebrord Snell;
fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Willebrord_Snel_van_Royen . Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 25; Grienberger; fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Christoph_Grienberger. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 25; John Wallis; fonte: <https://www.onthisday.com/people/john-wallis>. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 25; James Gregory; fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/James_Gregory . Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 25; Abrahan Sharp; fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Abraham_Sharp . Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 25; John Machin; fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/John_Machin . Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 25; Euler; fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler . Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 25; Jean Étienne Montucla; fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Jean-%C3%89tienne_Montucla . Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 25; Academia Francesa de Ciências; fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Acad%C3%A9mie_des_Sciences . Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 25; Johann Heinrich Lambert; fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Johann_Heinrich_Lambert . Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 25; Conde de Buffon; fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Georges-Louis_Leclerc,_conde_de_Buffon . Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 25; Adrien-Marie Legendre; fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Adrien-Marie_Legendre. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 26; Zacharias Dase; fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Zacharias_Dase . Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 26; F. Lindemann; fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ferdinand_von_Lindemann . Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 26; Conde de Buffon; fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/ENIAC> . Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 26; ENIAC; fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Georges-Louis_Leclerc,_conde_de_Buffon . Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 26; IBM 704; fonte: https://www.wikiwand.com/en/IBM_704 . Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 26; IBM 7090; fonte https://pt.wikipedia.org/wiki/IBM_7090 . Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 26; CDC 6600; fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/CDC_6600. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 26; CDC 7600; fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/CDC_7600 . Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 26; CRAY 2; fonte: <https://en.wikipedia.org/wiki/Cray-2>. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 26; T2K Tsukuba System; fonte: <https://www.popsci.com/scitech/article/2009-08/japanese-super-computer-calculates-pi-25-trillionth-decimal-point/>. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 26; Emma Haruka Iwao ; fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Emma_Haruka_Iwao. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 29; Pitagóricos celebram a aurora; Autor: Fyodor Bronnikov. fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Fyodor_Bronnikov. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 30; Detalhe da obra Pitagóricos celebram a aurora; Autor: Fyodor Bronnikov. fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Fyodor_Bronnikov. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 35; Archimedes Pensativo (1620); Autor: Domenico Fetti. fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Arquimedes>. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 60; Papiro Rhind, Museu de Londres. fonte: http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 60; Detalhe do Papiro Rhind, Museu de Londres. fonte: http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 61; fonte: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/comprimento-area-circunferencia.htm>. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 69; A escola de Atenas (1509 – 1511); Autor: Rafael Sanzio. fonte: <https://blogdoenem.com.br/grecia-antiga-legado-cultural-grego/>. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 70; Mapa da antiga Mesopotâmia; fonte: <https://www.sohistoria.com.br/ef2/mesopotamia/>. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 70; Registro em tábuas de argila. fonte: <https://sites.google.com/site/conjuntosnumericos2017/numeracao-babilonica>. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 71; Registro em tábuas de argila. fonte: https://www.correiobraziliense.com.br/app/noticia/ciencia-e-saude/2016/01/30/interna_ciencia_saude,515908/astrologia-babilonios-usavam-geometria-para-calculas-a-posicao-dos-as.shtml. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 71; A Babilônia. Ilustração moderna; Autor: Desconhecido. fonte: <https://www.apaixonadosporhistoria.com.br/artigo/73/a-cidade-da-babilonia>. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 72; Mapa do antigo Egito; fonte: <tps://www.sohistoria.com.br/ef2/mesopotamia/>. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 72; Papiro Rhind, Museu de Londres. fonte: http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 73; Estátua de Euclides no Museu de História Natural da Universidade de Oxford. fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Hist%C3%B3ria_da_geometria. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 73; Mapa da antiga Grécia. fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Arquimedes>. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 74; Mapa da antiga China. fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Arquimedes>. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 74; Os Nove Capítulos da Arte Matemática. fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1tica_chinesa. Acesso em: 17 jan. 2020.

Página 75; Imagem; fonte: <https://pixabay.com/pt/images/search/mapa%20mundi/>
Acesso em: 30 jul. 2020.

Página 75; os continentes ; fonte:
<https://suportegeografico77.blogspot.com/2017/09/continentes-mapa.html> Acesso em:
30 jul. 2020.

Página 75; Busto de pitágoras; Autor: Fyodor Bronnikov.
fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Pit%C3%A1goras> Acesso em: 30 jul. 2020.



:

