



P R O J E T O
Newton

Caderno de Exercícios

Cálculo I

2



Assessoria de Educação a Distância • UFPA

Cristina Lúcia Dias Vaz

Caderno 2: Exercícios de Cálculo I

1ª Edição



2017

Copyright © 2017 Editora EditAEDI Todos os direitos reservados.

Nenhuma parte deste livro poderá ser reproduzida, por qualquer processo, sem a permissão expressa dos editores.

REITOR

Emmanuel Zagury Tourinho

CONSELHO EDITORIAL

Presidente:

Dr. José Miguel Martins Veloso

Diretora:

Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz

Membros do Conselho:

Dra. Ana Lygia Almeida Cunha

Dr. Dionne Cavalcante Monteiro

Dra. Maria Ataíde Malcher

REVISÃO

Edilson dos Passos Neri Junior

CAPA

Giordanna De Gregoriis

DIAGRAMAÇÃO

Antônio Helder dos Santos da Costa

Israel Gonçalves Batista

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Vaz, Cristina Lúcia Dias

Caderno 2 de Exercícios: cálculo I / Cristina Lúcia Dias Vaz.

- Belém: AEDI/UFPA, 2017

ISBN E-book: 978-85-65054-45-4

1. Cálculo diferencial e integral

2. Exercícios de cálculo

3. Projeto Newton

Caderno de Questões - Cálculo I

Sumário

■	Funções	3
	Tópicos abordados nos exercícios	3
	Métodos e Técnicas	4
	Enunciado dos Exercícios	5
	Sugestões	7
	Respostas	8
■	Limite e continuidade	14
	Tópicos abordados nos exercícios	14
	Métodos e Técnicas	15
	Enunciado dos Exercícios	16
	Sugestões	23
	Respostas	24
■	Derivadas	43
	Tópicos abordados nos exercícios	43
	Métodos e Técnicas	44
	Enunciado dos Exercícios	45
	Sugestões	58
	Respostas	60
■	Integrais	110
	Tópicos abordados nos exercícios	110
	Métodos e Técnicas	111
	Enunciado dos Exercícios	112
	Sugestões	122
	Respostas	123

Funções

Plano	
Tópicos	04
Métodos e Técnicas	05
Enunciados	06
Sugestões	11
Respostas	12

Tópicos abordados nos exercícios

- Operações com funções e intervalos;
- Novas funções a partir de funções conhecidas;
- Problemas envolvendo funções;

Conteúdos essenciais para a resolução dos exercícios

- Função e suas propriedades;
 - Intervalos e suas propriedades;
-

Métodos e Técnicas

Modelagem de
Problemas utilizando
funções

- Na questão citada tem-se a modelagem de problemas por funções:

Exercício 1.4

Operações e
Transformações de
Funções

- Na questão citada efetua-se as operações de funções:

Exercício 1.3

- Na questão citada efetua-se as transformações de funções a partir de funções conhecidas:

Exercício 1.2

Enunciado dos Exercícios

● ○ ○ ○

1.1 Encontre o domínio das seguintes funções:

(a) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{3-x}$;

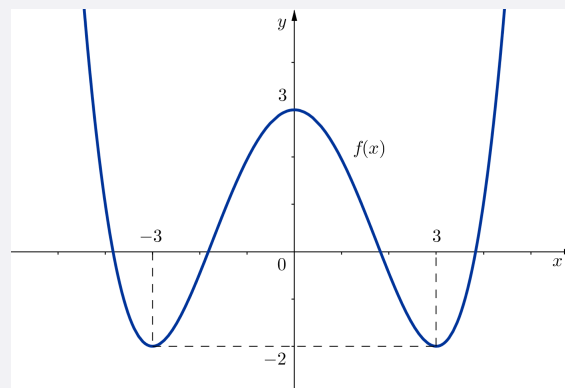
(b) $f(x) = \frac{5}{1 - \cos(x)}$;

(c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$;

(d) $f(x) = \frac{1}{|x^2 - 9|}$.

● ● ○ ○

1.2 Considere o gráfico da função $f(x)$ dado por



Use o gráfico de $f(x)$ para esboçar o gráfico das seguintes funções:

(a) $f(x + 1)$;

(b) $-f(x)$;

(c) $|f(x)|$;

(d) $f(x) - 3$.

• • ○ ○

1.3 Seja $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

- (a) Qual o domínio e a imagem de $f(x)$?
- (b) Encontre a composta $f(f(x))$. Qual o domínio desta função?
- (c) Encontre $f(f(f(x)))$. Qual o domínio desta função?
- (d) Desenhe o gráfico de $f(f(f(x)))$.

• ○ ○ ○

1.4 Estudos sobre a concentração de monóxido de carbono no ar indicam, em certas cidades, que essa concentração pode ser modelada por uma função do tipo $c(p) = 0,7p + 3$ partes por milhão para uma população de p mil habitantes. Por outro lado, pesquisas de desenvolvimento demográfico indicam que a população de uma cidade, em t anos, será de $p(t) = 3 + 0,3t^2$ mil habitantes.

- (a) Qual é a concentração de monóxido de carbono no ar em função do tempo?
- (b) Qual o tempo necessário para a concentração de carbono atingir o valor de 8,46 partes por milhão?

Sugestões

1.1 Verifique se as funções apresentam restrições nos denominadores e/ou raízes.

1.2 Use um aplicativo (*Geogebra*, por exemplo) e observe as transformações nos gráficos de uma função qualquer e as compare com o gráfico da função dada.

1.3 Verifique a restrição no denominador.

1.4 Faça $(c \circ p)(t) = c(p(t))$.

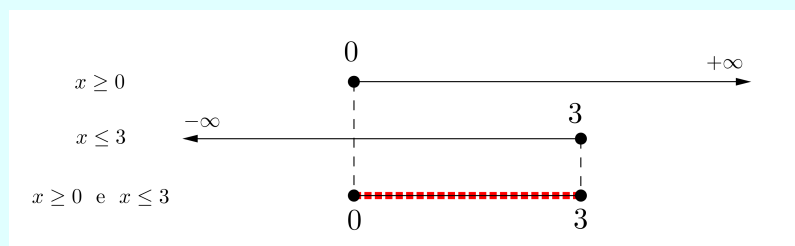
Respostas

1.1 Encontre o domínio das seguintes funções:

(a) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{3-x}$

Solução: O domínio de $f(x)$ são todos os valores reais de x tais que $x \geq 0$ e $3-x \geq 0$. Observe que $3-x \geq 0 \Rightarrow 3 \geq x \Leftrightarrow x \leq 3$.

Agora, fazendo a intersecção obtemos



Portanto, o domínio da função $f(x)$ é o seguinte intervalo:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 3\} = [0, 3]$$

(b) $f(x) = \frac{5}{1 - \cos(x)}$;

Solução: O domínio de $f(x)$ são todos os valores reais de x tais que o denominador é diferente de zero, ou seja,

$$1 - \cos(x) \neq 0$$

$$-\cos(x) \neq -1$$

$$\cos(x) \neq 1$$

$$x \neq \arccos(1)$$

$$x \neq 2n\pi \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Portanto, o domínio da função $f(x)$ será

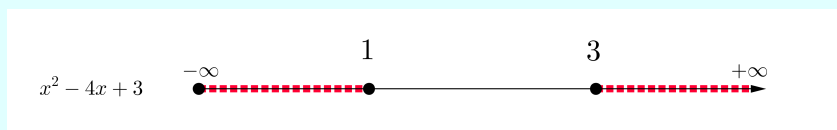
$$D_{f(x)} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2n\pi \text{ e } n \in \mathbb{N}\}.$$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$;

Solução: O domínio de $f(x)$ são todos os valores reais de x tais que $x^2 - 4x + 3 \geq 0$, ou seja, $x^2 - 4x + 3 \geq 0$. Vamos calcular as raízes da equação $x^2 - 4x + 3 = 0$ e analisar o sinal desta função. Assim,

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}.$$

Logo, as raízes são $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$. Fazendo a análise do sinal da função quadrática temos



Portanto, o domínio da função $f(x)$ é o seguinte conjunto:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } x \geq 3\} = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$$

(d) $f(x) = \frac{1}{|x^2 - 9|}$.

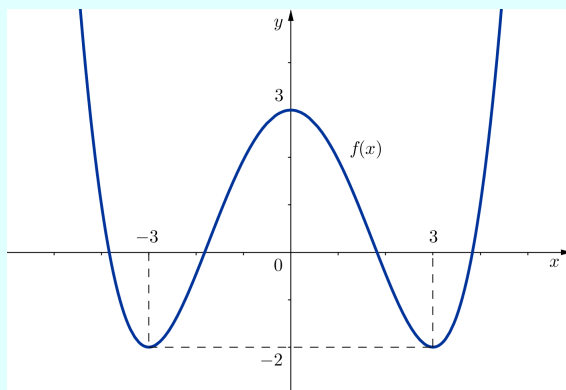
O domínio de $f(x)$ são todos os valores reais de x tais que o denominador é diferente de zero, assim

$$|x^2 - 9| \neq 0 \Rightarrow x^2 - 9 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 9 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{9} \Rightarrow x \neq \pm 3.$$

Portanto, o domínio da função $f(x)$ é o seguinte conjunto:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3 \text{ e } x \neq 3\} = \mathbb{R} - \{-3, 3\}.$$

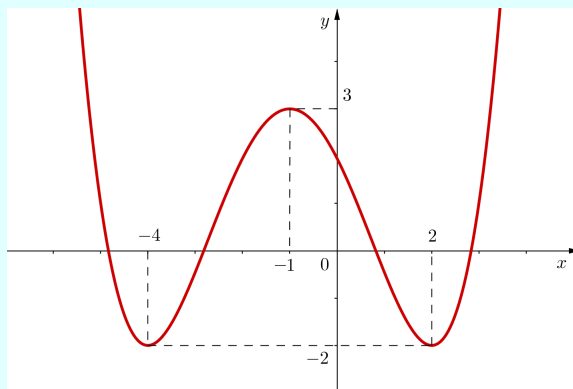
1.2 Considere o gráfico da função $f(x)$ dado por



Use o gráfico de $f(x)$ para esboçar o gráfico das seguintes funções:

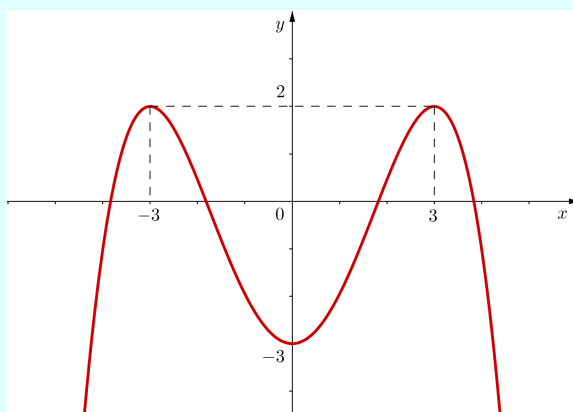
(a) $f(x + 1)$: deslocamento de 1 unidade para a esquerda.

Solução:



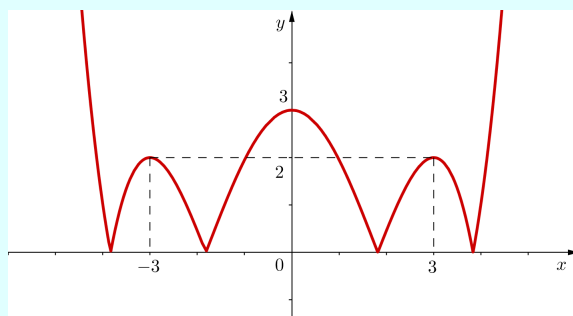
(b) $-f(x)$: reflexão no eixo x .

Solução:



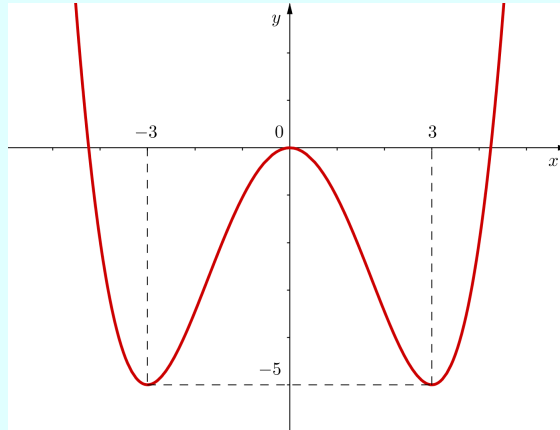
(c) $|f(x)|$: gráfico com valores $f(x) \geq 0$.

Solução:



(d) $f(x) - 3$: deslocamento de 3 unidades para baixo.

Solução:



1.3 Seja $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

(a) Qual o domínio e a imagem de $f(x)$?

Solução: O domínio de $f(x)$ são todos os valores reais de x tais que o denominador é diferente de zero, ou seja, $1 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$.

Além disso, observe que $\frac{1}{1-x} \neq 0$, isto é, $f(x) \neq 0$.

Logo, o domínio e a imagem de f são, respectivamente, $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$ e $Im_f = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$.

(b) Encontre a composta $f(f(x))$. Qual o domínio desta função?

Solução: Temos que:

$$g(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{-x}{1-x}} = \frac{x-1}{x}$$

Agora, observe que, além de $x \neq 1$, temos $x \neq 0$.

Logo, $D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ e } x \neq 1\}$.

(c) Encontre $f(f(f(x)))$. Qual o domínio desta função?

Solução: Sendo $g(x) = f(f(x))$, temos que:

$$h(x) = f(g(x)) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}}} = \frac{1}{1 - \frac{(x-1)}{x}} = \frac{1}{\frac{x-x+1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

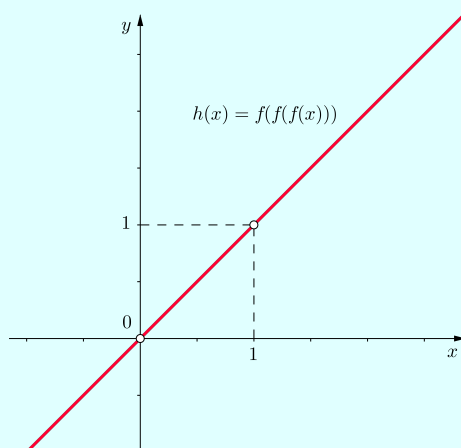
Logo, de maneira análoga ao item anterior, o domínio de $h(x)$ é $D_h = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ e } x \neq 1\}$.

(d) Desenhe o gráfico de $f(f(f(x)))$.

Solução: Sabemos que

$$h(x) = f(f(f(x))) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}}} = x.$$

Assim, considerando o seu domínio, esboçamos o seguinte gráfico:



1.4 Estudos sobre a concentração de monóxido de carbono no ar indicam, em certas cidades, que essa concentração pode ser modelada por uma função do tipo $c(p) = 0,7p + 3$ partes por milhão para uma população de p mil habitantes. Por outro lado, pesquisas de desenvolvimento demográfico indicam que a população de uma cidade, em t anos, será de $p(t) = 3 + 0,3t^2$ mil habitantes.

(a) Qual é a concentração de monóxido de carbono no ar em função do tempo?

Solução: A concentração de monóxido de carbono em função do tempo é dada pela composta

$$\begin{aligned} c(p(t)) &= 0,7(3 + 0,3t^2) + 3 \\ &= 2,1 + 0,21t^2 + 3 \\ &= 5,1 + 0,21t^2 \end{aligned}$$

Logo, a concentração de monóxido de carbono é $c(p(t)) = 5,1 + 0,21t^2$ partes por milhão.

- (b) Qual o tempo necessário para a concentração de carbono atingir o valor de 8,46 partes por milhão?

Solução: Fazemos

$$\begin{aligned}c(p(t)) &= 8,46 \\5,1 + 0,21t^2 &= 8,46 \\0,21t^2 &= 8,46 - 5,1 \\t^2 &= \frac{3,36}{0,21} = 16\end{aligned}$$

Logo, $t = 4$ anos é o tempo procurado.

Limite e continuidade

Plano

Tópicos	24
Métodos e Técnicas	25
Enunciados	26
Sugestões	30
Respostas	31

Tópicos abordados nos exercícios

- Inclinação da reta tangente por limite;
- Propriedades, limites infinitos e limites no infinito;
- Continuidade de uma função;
- Teorema do Valor Intermediário e Teorema do Confronto;

Conteúdos essenciais para resolução dos exercícios

- Funções e suas propriedades;
 - Limite e suas propriedades;
-

Métodos e Técnicas

Propriedades
Operatórias de Limite,
Limites Infinitos,
Limites no Infinito e
Continuidade.

- Nas questões citadas tem-se o uso das propriedades operatórias de limite:

Exercícios 2.1 ; 2.3 ; 2.5 ; 2.8

- Nas questões citadas usa-se limites infinitos e limites no infinito:

Exercícios 2.2 ; 2.5 (d)

- Na questões citadas usa-se continuidade de funções:

Exercícios 2.7 ; 2.9 ; 2.10

Teorema do Valor
Intermediário e Teorema
do Confronto

- Nas questões citadas usa-se o Teorema do Valor Intermediário e o Teorema do Confronto:

Exercício 2.6

Enunciado dos Exercícios

• • ○ ○

2.1 Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Em qualquer um dos casos, explique. Se for falsa explique ou dê um contra-exemplo.

- (a) A notação $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 10$ representa que o limite de $f(x)$, quando x aproxima-se de 2, é 10;
- (b) Se $f(3) = 9$ então o limite de $f(x)$, quando x aproxima-se de 3, é 9;
- (c) Se o limite de $f(x)$, quando x aproxima-se de 3, é 9 então $f(3) = 9$;
- (d) Quando x aproxima-se de 1, se os limites de $f(x)$ e $g(x)$ são, respectivamente, -1 e 2 , então o limite de $f(x) + g(x)$, quando x aproxima-se de 1, é 1.

• • ○ ○

2.2 Com suas próprias palavras, descreva o significado de um limite infinito. Podemos afirmar que ∞ é um número? Explique.

• • • ○

2.3 Encontre o limite. Se existir, cite as propriedades usadas. Se não existir, explique por quê:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{x - 1}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{x - 2}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^3 + 216}{x + 6}$

• • • • ○

2.4

- (a) Encontre os valores de α e β tais que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\alpha + \beta x^2} - \sqrt{2}}{x^2} = \sqrt{2}.$$

- (b) Seja

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{se } x \leq \alpha \\ x & \text{se } x > \alpha \end{cases}$$

Determine α tal que $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$.

• • • • ○

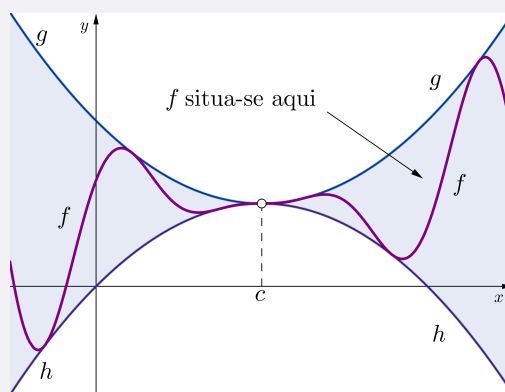
2.5 Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Se for verdadeira, explique ou dê um exemplo. Se for falsa dê um contra-exemplo.

- (a) Sejam $f(x)$ e $g(x)$ tais que $f(x)$ e $g(x)$ são iguais, exceto no ponto α , para todo $x \in (a, b)$, $x \neq \alpha$, com $\alpha \in (a, b)$. Se o limite de $g(x)$, quando x tende a α , é o valor L , então o limite de $f(x)$, quando x tende a α , também é L .
- (b) O limite de uma função racional $f(x)$, quando x tende a α , é sempre $f(\alpha)$.
- (c) Se o $\lim_{x \rightarrow \alpha} |f(x)| = |L|$ então $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L$.
- (d) Se $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = L > 0$ então $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)g(x) = +\infty$.

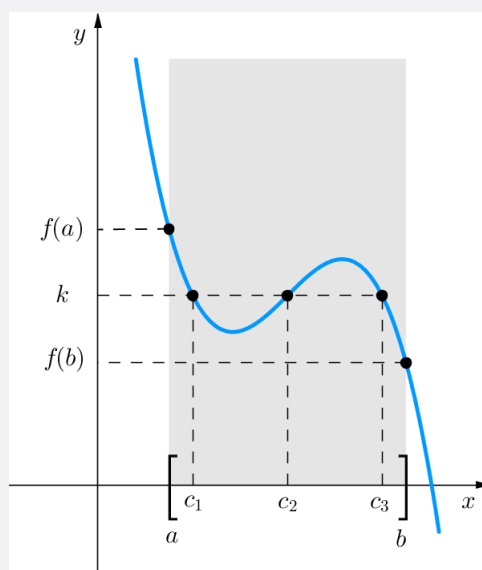
• • • ○

2.6 Com suas próprias palavras explique os teoremas ilustrados nas seguintes figuras:

(a)



(b)



Qual o nome de cada um destes teoremas?

• • • ○

- (c) Dê um exemplo da aplicação do teorema do item (a). Faça um desenho para ilustrar essa aplicação;
- (d) Use o teorema do item (b) para mostrar que a função polinomial $f(x) = x^3 + 3x - 2$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $[0, 1]$.

2.7

- (a) Descreva a diferença entre descontinuidade removível e aquela que não é removível. Em sua explicação, dê exemplos das seguintes situações:
 - (i) uma função com uma descontinuidade não removível em $x = 1$;
 - (ii) uma função com uma descontinuidade removível em $x = -1$;
 - (iii) uma função que tenha as duas descontinuidades descritas nos itens (i) e (ii).
- (b) Esboce o gráfico de uma função f qualquer tal que

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0.$$

Essa função é contínua em $x = 2$? Explique.

• • • ○

2.8 Encontre o limite das seguintes funções trigonométricas:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{3x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(1 - \cos(x))}{x}$

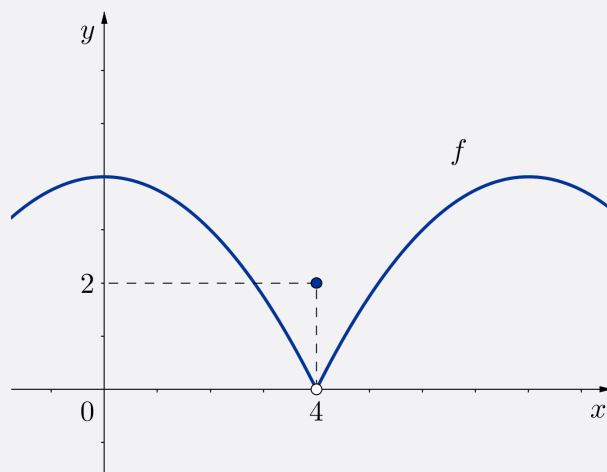
(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}^2(x)}{x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x)}{\text{sen}(3x)}$

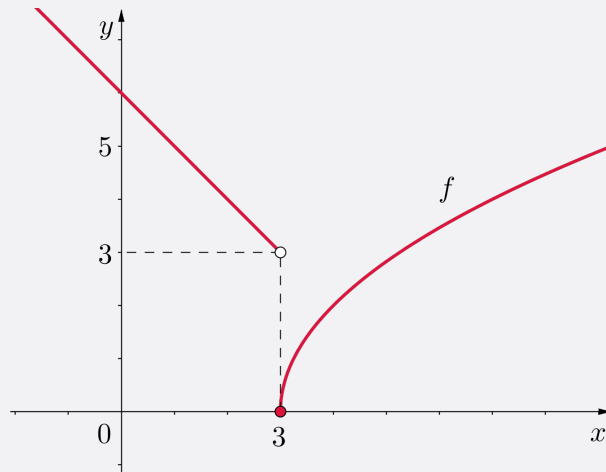
• • ○ ○

2.9 Nos exercícios abaixo, use o gráfico para determinar $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ e discuta a continuidade da função $f(x)$.

(a)



(b)



• • ○ ○

2.10 Encontre o(s) intervalo(s) no(s) qual (quais) a função $f(x)$ é contínua. Esboce o gráfico de f .

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$

(b) $f(x) = x\sqrt{x+4}$

(c) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

(d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 2 \\ x^2 - 3x + 1 & \text{se } x < 2 \end{cases}$

• • ○ ○

2.11 A função $s(t) = -5,9t^2 + 160$, chamada função deslocamento, descreve a altura (em metros) que um objeto cai, em t segundos, de uma altura inicial de 160 metros. Considere a velocidade no tempo $t = a$ dada por

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{s(a) - s(t)}{a - t}. \quad (1)$$

• • • ○

(a) Encontre a velocidade do objeto em $t = 6$. Qual a velocidade de impacto do objeto no solo?

(b) Sabendo que a velocidade média do objeto é $\Delta v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, dê uma interpretação da velocidade descrita por (1).

2.12 Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Se for verdadeira, explique. Se for falsa dê um contra-exemplo.

(a) O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função derivável f no ponto $(1, f(1))$ é dado por $\frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}$;

(b) Uma função que é contínua no ponto $(a, f(a))$ é também derivável em $(a, f(a))$;

(c) Uma função que é descontínua no ponto $(a, f(a))$ é também derivável em $(a, f(a))$;

(d) A reta tangente ao gráfico de uma função derivável f pode tangenciar o gráfico de f em dois pontos.

Sugestões

2.1 Tome como contra-exemplo uma função por partes. Por exemplo,

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{se } x \leq a \\ b & \text{se } x > a \end{cases}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$.

2.2 Leia a definição de limite infinito.

2.3 Lembre-se que

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

e que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

2.4 No primeiro item, racionalize utilizando o termo conjugado do numerador e tome $\alpha = 2$. No segundo item, calcule os limites laterais.

2.5 Tome como contra-exemplo a função

$$f(x) = \frac{x^2 - \alpha^2}{x - \alpha}, \quad \alpha \neq 0.$$

2.6 Leia sobre o Teorema do Valor Intermediário, o Teorema do Confronto e suas aplicações.

2.7 Para uma função com descontinuidade não removível em $x = a$, considere, por exemplo, uma função por partes do tipo

$$f(x) = \begin{cases} b & \text{se } x \leq a \\ -b & \text{se } x > a \end{cases}$$

e calcule os limites laterais $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

2.8 Use o limite fundamental

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1.$$

2.9 Lembre-se que uma função $f(x)$ é contínua em $x = a$ se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

2.10 Lembre-se que uma função é contínua em todos os pontos do seu domínio, assim, analise suas restrições e encontre os intervalos pedidos.

2.11 Calcule o limite para $a = 6$.

2.12 Tome a função $f(x) = |x|$ e calcule as derivadas laterais.

Respostas

2.1 Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Em qualquer um dos caso, explique. Se for falsa explique ou dê um contra-exemplo.

- (a) A notação $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 10$ representa que o limite de $f(x)$, quando x aproxima-se de 2, é 10;

Solução: Verdadeiro. A notação $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ representa que o limite de $f(x)$, quando x aproxima-se de a , é L .

- (b) Se $f(3) = 9$ então o limite de $f(x)$, quando x aproxima-se de 3, é 9;

Solução: Falso. Considere o seguinte contra-exemplo::

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x \leq 3 \\ 0 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Observe que $f(3) = 9$, mas o $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ não existe, pois $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 9$.

- (c) Se o limite de $f(x)$, quando x aproxima-se de 3, é 9 então $f(3) = 9$;

Solução: Falso.

1ª solução: De fato, de acordo com a definição, a função não precisa estar definida em $x = 3$, isto é, $f(3) = 9$, para que o limite exista. Considere, como contra-exemplo, a função:

$$f(x) = \frac{54x - 162}{x^2 - 9}.$$

Note que $x = 3$ não faz parte do domínio de f . Porém,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{54x - 162}{x^2 - 9} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{54\cancel{(x-3)}}{(x+3)\cancel{(x-3)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{54}{x+3} \\ &= \frac{54}{6} \\ &= 9. \end{aligned}$$

2ª solução: De fato, considere o seguinte contra-exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x < 3 \\ 9 & \text{se } x > 3 \\ 1 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

Observe que $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 9$, mas $f(3) = 1$.

- (d) Quando x aproxima-se de 1, se os limites de $f(x)$ e $g(x)$ são, respectivamente, -1 e 2 , então o limite de $f(x) + g(x)$, quando x aproxima-se de 1, é 1.

Solução: Verdadeiro. Considere a seguinte propriedade:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Assim, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)] = -1 + 2 = 1.$$

2.2 Com suas próprias palavras, descreva o significado de um limite infinito. Podemos afirmar que ∞ é um número? Explique.

Solução: Dizemos que o limite de uma função $f(x)$, quando x tende a a , é infinito, isto é,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

significa que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes (tão grandes quando quisermos) tornando x suficientemente próximo de a , mas não igual a a . Assim, o símbolo ∞ não trata-se de um número, mas corresponde a um valor muito grande.

2.3 Encontre o limite. Se existir, cite as propriedades usadas. Se não existir, explique por quê:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

Solução: O limite não existe. Como $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ temos que a soma cresce ilimitadamente, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty.$$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{x - 1}$

Solução: O limite existe. Observe que, $x - 1 = \sqrt[3]{x} - (1)^3$. Então

$$\frac{1 - \sqrt[3]{x}}{x - 1} = -\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = -\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{(\sqrt[3]{x})^3 - (1)^3}.$$

Agora, usando que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ vamos fatorar o denominador:

$$-\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{(\sqrt[3]{x})^3 - (1)^3} = -\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}.$$

Simplificando tem-se

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{(\sqrt[3]{x})^3 - (1)^3} &= -\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} \\ &= -\frac{\cancel{\sqrt[3]{x} - 1}}{(\cancel{\sqrt[3]{x} - 1})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}, \quad \text{se } x \neq 1 \\ &= -\frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}, \quad \text{se } x \neq 1. \end{aligned}$$

Usando que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$ para $f(x) = g(x)$, $\forall x, x \neq c$ e a propriedade do limite do quociente tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} \\ &= -\frac{1}{\sqrt[3]{1^2} + \sqrt[3]{1} + 1} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{x - 2}$

Solução: O limite não existe, pois os limites laterais são diferentes. De fato,

$$\frac{|x - 2|}{x - 2} = \begin{cases} \frac{(x - 2)}{x - 2} = 1 & \text{se } x > 2 \\ \frac{-(x - 2)}{x - 2} = -1 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2|}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} -1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x - 2|}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 = 1 \end{aligned}$$

(d) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^3 + 216}{x + 6}$

Solução: O limite existe. Observe que

$$\frac{x^3 + 216}{x + 6} = \frac{x^3 + (6)^3}{x + 6}.$$

Usando que $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + 216}{x + 6} &= \frac{x^3 + (6)^3}{x + 6} \\ &= \frac{(x + 6)(x^2 - 6x + 36)}{x + 6} \\ &= \frac{\cancel{(x + 6)}(x^2 - 6x + 36)}{\cancel{x + 6}} \quad \text{se } x \neq -6 \end{aligned}$$

Usando que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$ para $f(x) = g(x)$, $\forall x$, $x \neq c$ e as propriedades de limite da soma e limite do produto tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^3 + 216}{x + 6} &= \lim_{x \rightarrow -6} (x^2 - 6x + 36) \\ &= 36 + 36 + 36 \\ &= 216 \end{aligned}$$

2.4

(a) Encontre os valores de α e β tais que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\alpha + \beta x^2} - \sqrt{2}}{x^2} = \sqrt{2}.$$

Solução: Racionalizando, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\alpha + \beta x^2} - \sqrt{2}}{x^2} &= \frac{\sqrt{\alpha + \beta x^2} - \sqrt{2}}{x^2} \left(\frac{\sqrt{\alpha + \beta x^2} + \sqrt{2}}{\sqrt{\alpha + \beta x^2} + \sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{\alpha + \beta x^2 - 2}{x^2 (\sqrt{\alpha + \beta x^2} + \sqrt{2})} \end{aligned}$$

Escolhendo $\alpha = 2$ tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\alpha + \beta x^2} - \sqrt{2}}{x^2} &= \frac{\beta x^2}{x^2 (\sqrt{2 + \beta x^2} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{\beta}{(\sqrt{2 + \beta x^2} + \sqrt{2})}, \quad \text{se } x \neq 0. \end{aligned}$$

Então, para $\alpha = 2$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\alpha + \beta x^2} - \sqrt{2}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{(\sqrt{2 + \beta x^2} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{\beta}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Mas, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\alpha + \beta x^2} - \sqrt{2}}{x^2} = \sqrt{2}$, e logo,

$$\frac{\beta}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \beta = 4.$$

Portanto, $\alpha = 2$ e $\beta = 4$.

(b) Seja

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{se } x \leq \alpha \\ x & \text{se } x > \alpha \end{cases}$$

Determine α tal que $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$.

Solução: Observe que $f(\alpha) = 2 - \alpha^2$, $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = \alpha$ e $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = 2 - \alpha^2$. Como $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x)$ tem-se

$$\alpha = 2 - \alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 + \alpha - 2 = 0$$

Logo,

$$\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -2.$$

2.5 Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Se for verdadeira, explique ou cite o teorema. Se for falsa dê um contra-exemplo.

(a) Sejam $f(x)$ e $g(x)$ tais que $f(x)$ e $g(x)$ são iguais, exceto no ponto α , para todo $x \in (a, b)$, $x \neq \alpha$, com $\alpha \in (a, b)$. Se o limite de $g(x)$, quando x tende a α , é o valor L , então o limite de $f(x)$, quando x tende a α , também é L .

Solução: Verdadeira. Considere o seguinte exemplo: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ e $g(x) = x + 1$. Então, $f(x) = g(x)$, $\forall x, x \neq 1$. De fato,

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1, \text{ se } x \neq 1.$$

- (b) O limite de uma função racional $f(x)$, quando x tende a α , é sempre $f(\alpha)$.

Solução: Falsa. Considere a função:

$$f(x) = \frac{x^2 - \alpha^2}{x - \alpha}, \quad \alpha \neq 0.$$

Note que,

$$\frac{x^2 - \alpha^2}{x - \alpha} = \frac{(x + \alpha)(\cancel{x - \alpha})}{(\cancel{x - \alpha})} = (x + \alpha), \quad \text{se } x \neq \alpha$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^2 - \alpha^2}{x - \alpha} = \lim_{x \rightarrow \alpha} (x + \alpha) = 2\alpha.$$

Porém $f(x)$ não está definida em $x = \alpha$, pois o denominador se anula em α .

- (c) Se o $\lim_{x \rightarrow \alpha} |f(x)| = |L|$ então $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L$.

Solução: Falso. Considere a função:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Então, $|f(x)| = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 1 = |1|$. Mas, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$. Logo, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ não existe.

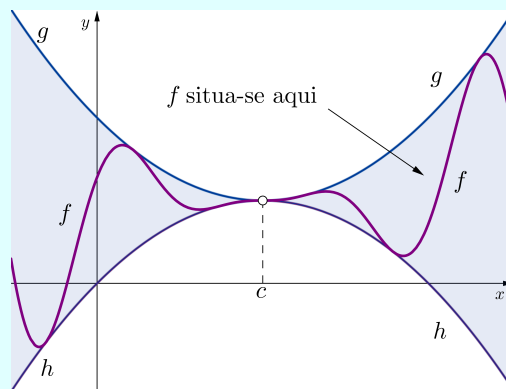
- (d) Se $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = L > 0$ então $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)g(x) = +\infty$.

Solução: Verdadeira. Considere o seguinte exemplo: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$. Então,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot 1 = +\infty.$$

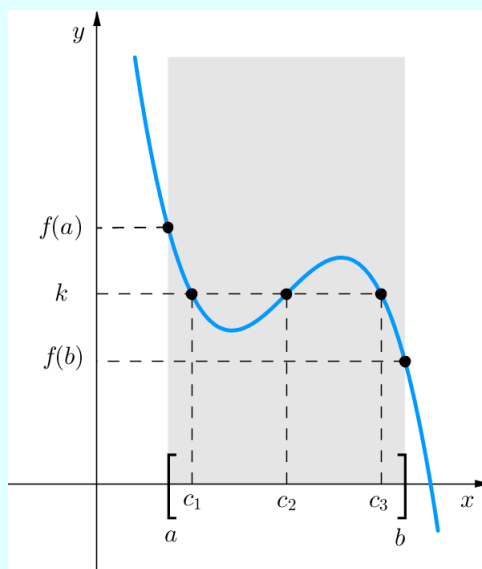
2.6 Com suas próprias palavras explique os teoremas ilustrados nas seguintes figuras:

(a)



Solução: O teorema chama-se *Teorema do Confronto* e afirma que se a imagem de uma função $f(x)$ encontra-se entre a imagem de duas funções $g(x)$ e $h(x)$ com $g(x) \leq h(x)$ para todo x numa vizinhança do ponto c , e se $g(x)$ e $h(x)$ tem limites iguais a L , quando x tende a c , então f terá limite L , quando x tende a c .

(b)



Solução: O teorema chama-se *Teorema do Valor Intermediário* e afirma que para uma função contínua $f(x)$ no intervalo compacto $[a, b]$ e $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) \leq k \leq f(b)$ existe pelo menos uma solução $c \in (a, b)$ da equação $f(x) = k$, ou seja, $f(c) = k$.

Observe que no caso da figura acima, a equação tem três soluções.

- (c) Dê um exemplo da aplicação do teorema do item (a). Faça um desenho para ilustrar essa aplicação.

Solução: Considere a seguinte função $f(x) = |x| \operatorname{sen}(x)$.

Como $-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $|x| \geq 0$ tem-se

$$-|x| \leq |x| \operatorname{sen}(x) \leq |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, fazendo $g(x) = -|x|$ e $h(x) = |x|$ tem-se

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

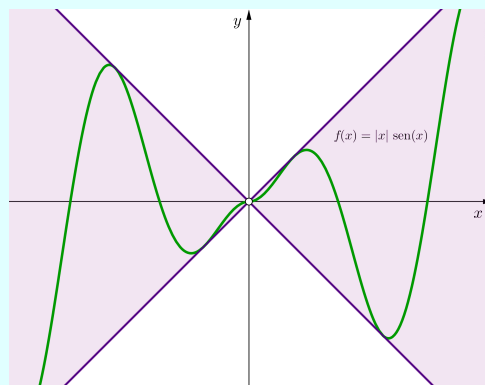
Alem disso,

$$g(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \geq 0 \\ x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

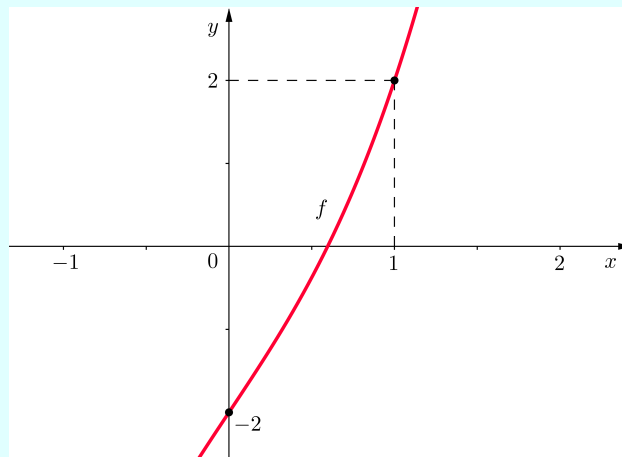
Logo, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$ e pelo Teorema do confronto $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

A seguinte figura ilustra o exemplo dado:



- (d) Use o teorema do item (b) para mostrar que a função polinomial $f(x) = x^3 + 3x - 2$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $[0, 1]$.

Solução: Calculando os valores que a função assume nas extremidades do intervalo, obtemos $f(0) = -2$ e $f(1) = 2$. Como $f(0) < 0 < f(1)$, concluímos que, pelo Teorema do Valor intermediário, deve existir um número real $c \in (0, 1)$, tal que $f(c) = 0$.



2.7

(a) Descreva a diferença entre descontinuidade removível e aquela que não é removível. Em sua explicação, dê exemplos das seguintes situações:

- (i) uma função com uma descontinuidade não removível em $x = 1$;
- (ii) uma função com uma descontinuidade removível em $x = -1$;
- (iii) uma função que tenha as duas descontinuidades descritas nos itens (i) e (ii).

Solução: Uma descontinuidade em c é chamada *removível* se f pode tornar-se contínua por uma definição (ou redefinição) apropriada do valor $f(c)$. Uma descontinuidade em c chama-se *não removível* se f está definida em c , mas o limite $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ não existe.

(i) Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq 1 \\ -2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Observe que $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$, e logo, o limite $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ não existe. Então, f tem uma descontinuidade não removível em $x = 1$.

(ii) Considere a função $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$. Observe que f não está definida em $x = -1$. Logo, é descontínua em $x = -1$. Mas, esta descontinuidade é removível, pois podemos definir $f(-1)$, por exemplo, por $f(-1) = -2$.

(iii) Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^2} & \text{se } x > -1 \\ \frac{1}{4} & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

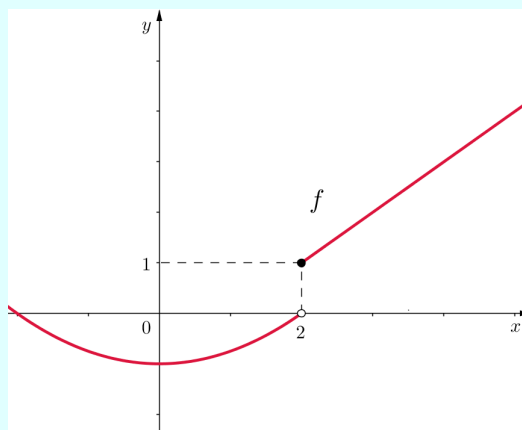
Observe que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ e f não está definida em $x = -1$. Logo, f é descontínua em $x = 1$ e $x = -1$. A descontinuidade de $x = 1$ não é removível. Mas em $x = -1$ é removível, pois podemos definir $f(-1) = 1/4$.

(b) Esboce o gráfico de uma função f qualquer tal que

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0.$$

Essa função é contínua em $x = 2$? Explique.

Solução: Temos o seguinte gráfico:



f não é contínua em $x = 2$, pois $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, e logo, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ não existe. Note que o gráfico apresenta um salto.

2.8 Encontre o limite das seguintes funções trigonométricas:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{3x}$

Solução: Para resolvermos este limite, iremos utilizar o limite fundamental $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$, e algumas propriedades dos limites.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\text{sen}(x)}{x} \right) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} \right) = \frac{1}{3} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} \right) \end{aligned}$$

Usando que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$ obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{3x} = \frac{1}{3}.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(1 - \cos(x))}{x}$$

Solução:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(1 - \cos(x))}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(3 \cdot \frac{1 - \cos(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos(x)}{x} \right) \left(\frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} \right) \\ &= 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x(1 + \cos(x))} = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x(1 + \cos(x))} \\ &= 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \sin(x) \cdot \frac{1}{1 + \cos(x)} \\ &= 3 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos(x)} \right) \\ &= 3 \left(1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2(x)}{x}$$

Solução:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \cdot \frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) \left(\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} \right) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} \right) = 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$$

Solução:

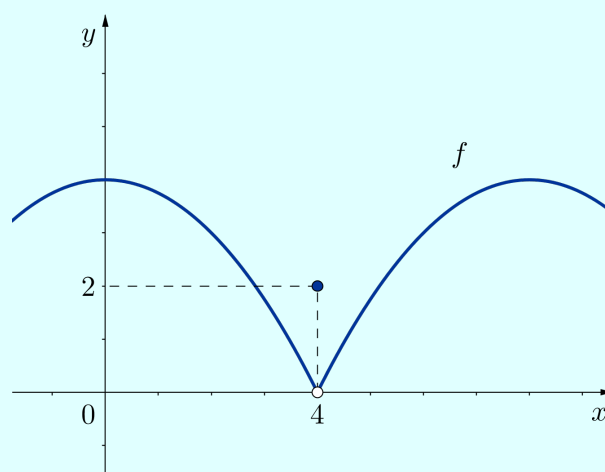
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(2x)}{x}}{\frac{\sin(3x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{\sin(2x)}{2x}}{3 \cdot \frac{\sin(3x)}{3x}} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x}} \end{aligned}$$

Fazendo $u = 2x$ e $v = 3x$ observe que, $x \rightarrow 0$ implica $u \rightarrow 0$ e $v \rightarrow 0$. Assim,

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(u)}{u}}{\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(v)}{v}} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

2.9 Nos exercícios abaixo, use o gráfico para determinar $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ e discuta a continuidade da função $f(x)$.

(a)



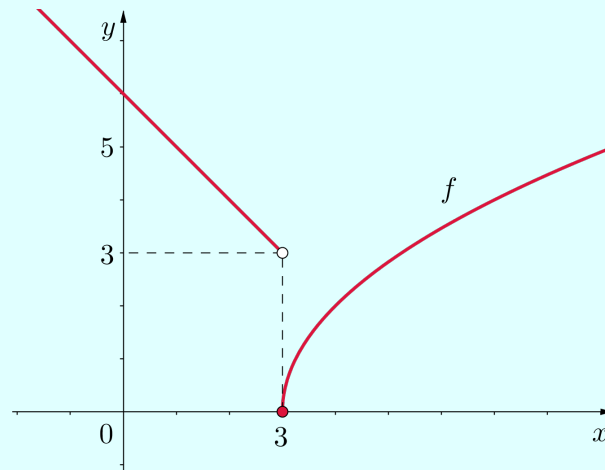
Solução: Sabemos que uma função $f(x)$ é contínua em $x = a$ se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Pelo gráfico temos que $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 0$. Logo, $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$.

Mas, pelo gráfico, $f(4) = 2$. Assim, $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) \neq f(4)$. Então, f é des- contínua em $x = 4$.

(b)



Solução: Sabemos que uma função $f(x)$ é contínua em $x = a$ se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Pelo gráfico temos que

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0.$$

Como os limites laterais são diferentes temos que $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ não existe. Logo, f é descontínua em $x = 3$.

2.10 Encontre o(s) intervalo(s) no(s) qual (quais) a função $f(x)$ é contínua. Esboce o gráfico de f .

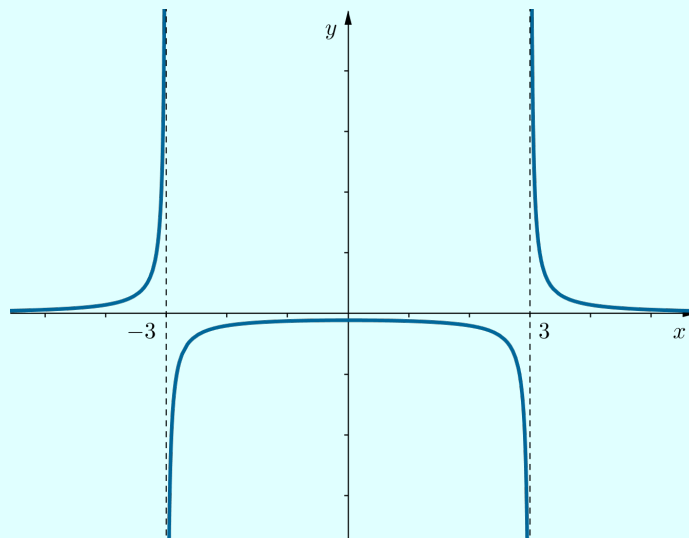
(a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$

Solução: Como f é uma função racional temos que seu denominador deve ser diferente de zero, ou seja,

$$x^2 - 9 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 9 \Rightarrow x \neq \pm 3.$$

Logo, a função f é contínua em todos os pontos do seu domínio exceto em $x = -3$ e $x = 3$. Portanto, f é contínua em $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$.

O gráfico de $f(x)$ é dado por



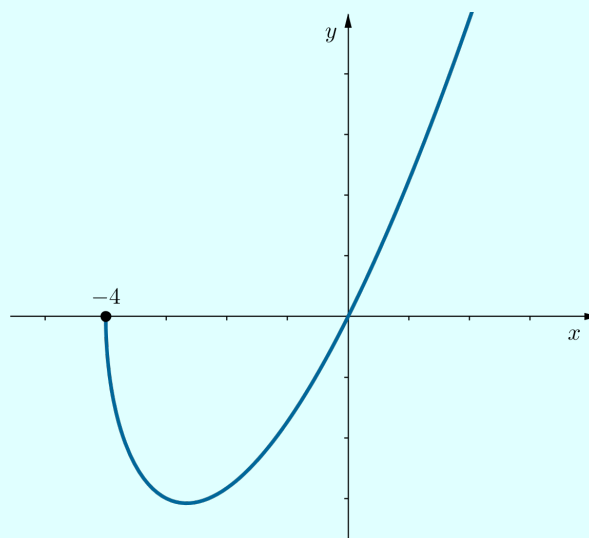
(b) $f(x) = x\sqrt{x+4}$

Solução: Observe que f é o produto das funções $g(x) = x$ e $h(x) = \sqrt{x+4}$. A função identidade $g(x) = x$ é contínua em $I_1 = (-\infty, +\infty)$ e a função $h(x) = \sqrt{x+4}$ está definida para

$$x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4.$$

Logo, a função $h(x) = \sqrt{x+4}$ é contínua em $I_2 = [-4, +\infty)$. Portanto, f será contínua na interseção $I_1 \cap I_2$. Portanto f é contínua em $[-4, +\infty)$.

O gráfico de $f(x)$ é dado por



(c) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

Solução: Como f é a função tangente dada por

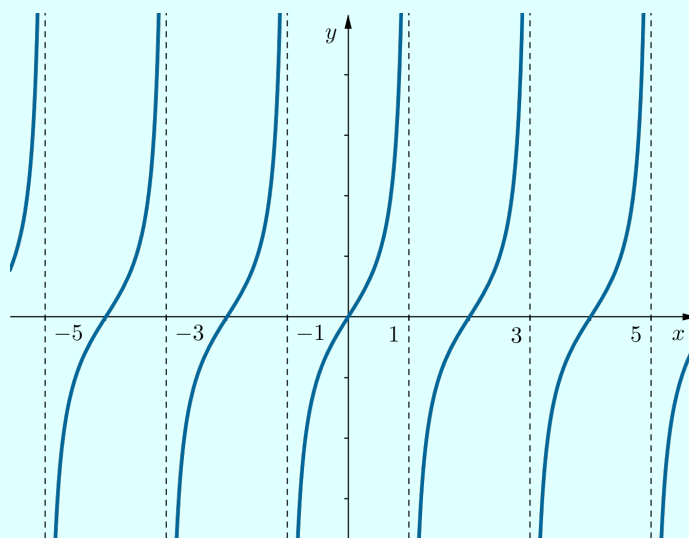
$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)},$$

temos que $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \neq 0$, ou seja, $\frac{\pi x}{2} \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots$, o que implica,

$$x \neq \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$$

Logo, f é contínua para todo x exceto para $x = 2n - 1$ com $n \in \mathbb{Z}$.

O gráfico de $f(x)$ é dado por



$$(d) f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 2 \\ x^2 - 3x + 1 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

Solução: Como a função f é definida por partes temos que analisar os seguintes casos:

(i) $x \neq 2$ e $x > 2$;

(ii) $x \neq 2$ e $x < 2$;

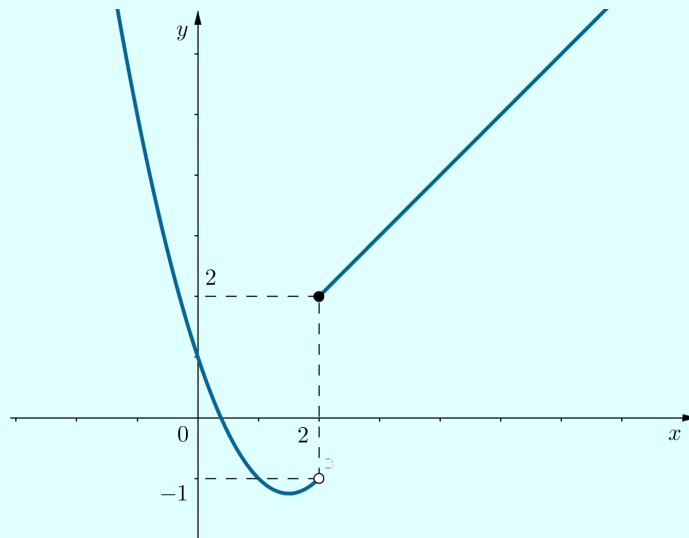
(iii) $x = 2$.

Para o caso (i), f é a função identidade $f(x) = x$ que é contínua em $(-\infty, +\infty)$. Para o caso (ii), f é a função quadrática $x^2 - 3x + 1$ que é contínua em $(-\infty, +\infty)$.

Para o caso, (iii) temos que $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1$ e $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$, e como os limites laterais são diferentes tem-se $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ não existe. Logo, f é descontínua em $x = 2$.

Portanto, f é contínua em $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

O gráfico de $f(x)$ é dado por



2.11 A função $s(t) = -5,9t^2 + 160$, chamada função deslocamento, descreve a altura (em metros) que um objeto cai, em t segundos, de uma altura inicial de 160 metros. Considere a velocidade no tempo $t = a$ dada por

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{s(a) - s(t)}{a - t}. \quad (2)$$

(a) Encontre a velocidade do objeto em $t = 6$. Qual a velocidade de impacto do objeto no solo?

Solução: Para obtermos a velocidade em $t = 6$, substituímos $a = 6$ em (2). Assim, escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{s(6) - s(t)}{6 - t}$$

Note que $s(6) = -52,4$. Então,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 6} \frac{s(6) - s(t)}{6 - t} &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{-52,4 - (-5,9t^2 + 160)}{6 - t} \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{5,9t^2 - 212,4}{6 - t} \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{5,9(t+6)(t-6)}{-(t-6)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} -5,9(t+6) \\ &= -5,9(6+6) \\ &= -70,8. \end{aligned}$$

Logo, a velocidade do objeto em $t = 6$ é $-70,8 \text{ m/s}$.

- (b) Sabendo que a velocidade média do objeto é $\Delta v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, dê uma interpretação da velocidade descrita por (2).

Solução: Seja $s(t)$ a função que descreve o deslocamento de um objeto. Considere este objeto deslocando-se no intervalo de tempo t e $t = a$, a variação na posição será dada por $s(a) - s(t)$. A velocidade média neste intervalo é

$$\Delta v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(a) - s(t)}{a - t}.$$

Suponhamos, agora, que a velocidade média seja calculada em intervalos cada vez menores $[a, t]$, isto é, quando t aproximar-se de “ a ”. Se estas velocidades aproximam-se de um certo valor, digamos, α , dizemos que α é a velocidade instantânea em $t = a$. Neste caso, escrevemos $v(a) = \alpha$ e representamos este processo por

$$v(a) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{s(a) - s(t)}{a - t}.$$

Isso significa que a velocidade instantânea no instante $t = a$ é o limite das velocidades médias quando t aproxima-se de “ a ” (ou quando a variação do tempo Δt aproxima-se de zero).

2.12 Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Se for verdadeira, explique. Se for falsa dê um contra-exemplo.

- (a) O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função derivável f no ponto $(1, f(1))$ é dado por $\frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}$;

Solução: Falso. Observe que:

$$\frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} \tag{3}$$

pode ser reescrita, fazendo $x = 1 + \Delta x$, como:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

Assim, fica evidente que (3) corresponde ao coeficiente angular da reta secante ao gráfico de f nos pontos $(x, f(x))$ e $(1, f(1))$, $x \neq 1$.

Além disso, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, f(1))$ é dado pelo limite:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}.$$

- (b) Uma função que é contínua no ponto $(a, f(a))$ é também derivável em $(a, f(a))$;

Solução. Falso. Considere, por exemplo, a função:

$$f(x) = |x|.$$

Note que f é contínua em $(0, f(0))$. De fato,

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = |0| = 0.$$

Entretanto, em $x = 0$, as derivadas laterais, dadas por

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

e

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

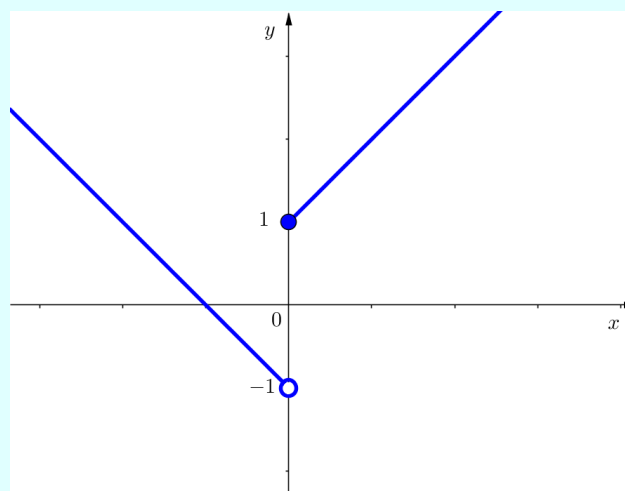
são diferentes, isto é, $f'(0)$ não existe. Logo, f não é derivável em $(0, f(0))$.

- (c) Uma função que é descontínua no ponto $(a, f(a))$ é também derivável em $(a, f(a))$;

Solução: Falso. Considere, por exemplo, a função:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -x - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Cujo gráfico é da seguinte forma:



Note que f é descontínua em $(0, f(0))$.

Entretanto, em $x = 0$, as derivadas laterais, dadas por

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{(-\Delta x - 1) - (-0 - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

e

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{(\Delta x + 1) - (0 + 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

são diferentes, isto é, $f'(0)$ não existe. Logo, f não é derivável em $(0, f(0))$.

- (d) A reta tangente ao gráfico de uma função derivável f pode tangenciar o gráfico de f em dois pontos.

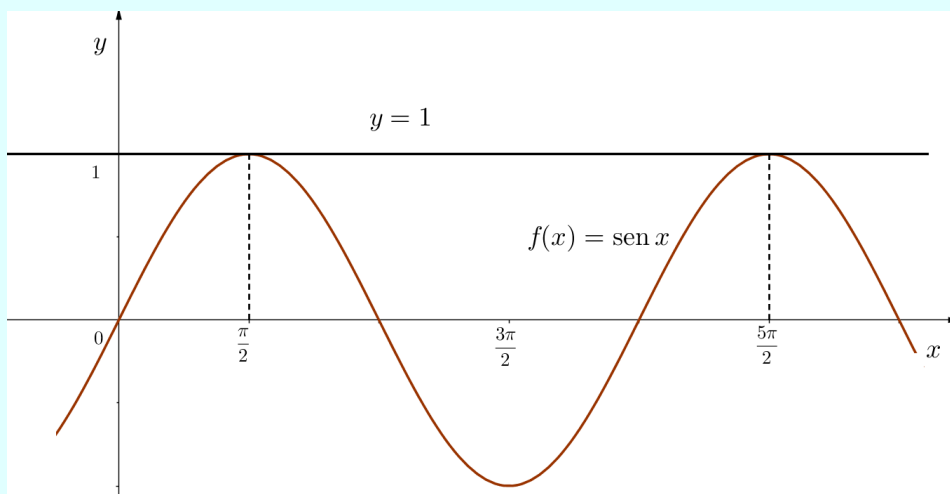
Solução: Verdadeiro. Considere a função $f(x) = \sin x$, então $f'(x) = \cos x$. Tomando os pontos $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ e $(\frac{5\pi}{2}, f(\frac{5\pi}{2}))$, note que:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0.$$

Logo, a reta tangente nestes dois pontos será dada por

$$y - 1 = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)(x - 1) \Rightarrow y = 0 \cdot (x - 1) + 1 \Rightarrow y = 1.$$

Veja o gráfico:



Derivadas

Plano	
Tópicos	41
Métodos e Técnicas	42
Enunciados	43
Sugestões	46
Respostas	47

Tópicos abordados nos exercícios.

- Definição de derivada;
- Equação da reta tangente e linearização;
- Regras de derivação;
- Primitivação;

Conteúdos essenciais para resolução dos exercícios.

- Limite e suas propriedades;
 - Regra de L'Hospital;
 - Regra da cadeia e derivação implícita;
 - Primitiva de uma função;
-

Métodos e Técnicas

Regra de L'Hospital

- Na questão citada verifica-se o uso correto da regra de L'Hospital:

Exercício 3.21 (b)

Regra da Cadeia

- Nas questões citadas usa-se a regra da cadeia e/ou considera-se y uma função implícita de x :

Exercícios 3.2 ; 3.3 ; 3.4 ; 3.7; 3.25 ; 3.30

Primitivação

- Nas questões citadas efetua-se a primitivação para encontrar o valor da função:

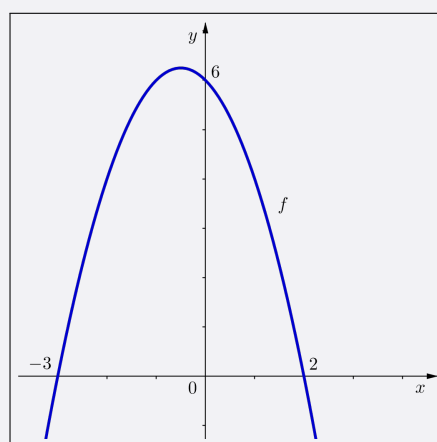
Exercícios 3.9 ; 3.10 ; 3.11 ; 3.12

Enunciado dos Exercícios

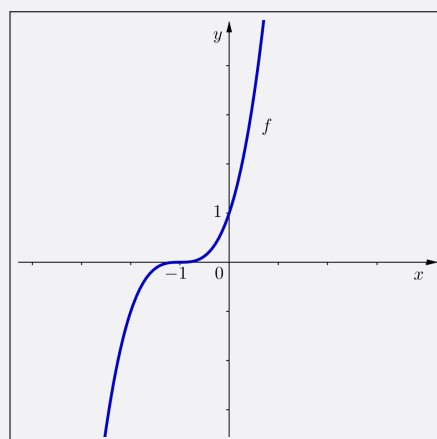
• • ○ ○

3.1 Nos itens abaixo são dados os gráficos da função f . Faça um esboço do gráfico de f' e f'' .

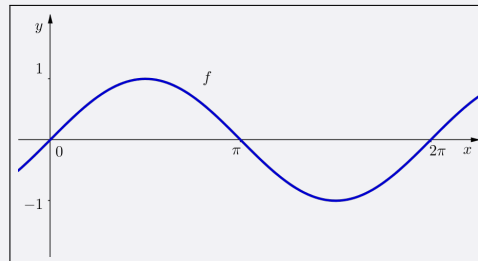
(a)



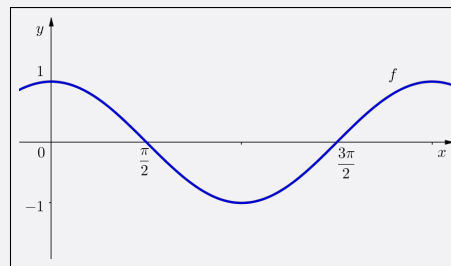
(b)



(c)



(d)



• • • •

3.2 Calcule a segunda derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = 5(x^3 - 3)^4$

(b) $f(x) = \left(\frac{x^2 - 4}{x + 2}\right)^3$

(c) $h(x) = f(x^3)$

(d) $f(x) = \sin(\cos(x))$

• • • •

3.3 Considere a função $f(x) = \cos(\beta x)$ com β uma constante.

(a) Calcule f' , f'' , $f^{(3)}$, $f^{(4)}$, $f^{(5)}$, $f^{(6)}$

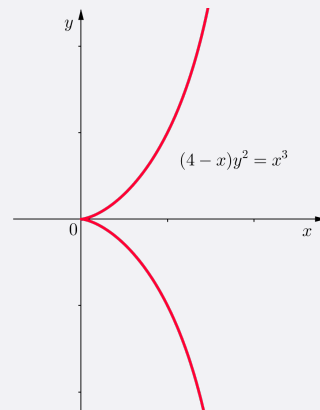
(b) Usando os resultados do item (a), escreva uma fórmula geral para as derivadas de ordem par $f^{(2k)}(x)$ e as de ordem ímpar $f^{(2k-1)}(x)$.

Dica: $(-1)^k$ é positivo para k par e negativo para k ímpar.

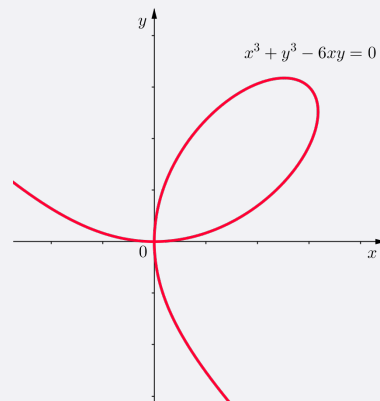
• • ○ ○

3.4 Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da equação dada no ponto dado.

(a) $(4 - x)y^2 = x^3$; ponto: $(2, 2)$



(b) $x^3 + y^3 - 6xy = 0$; ponto: $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$



• • ○ ○

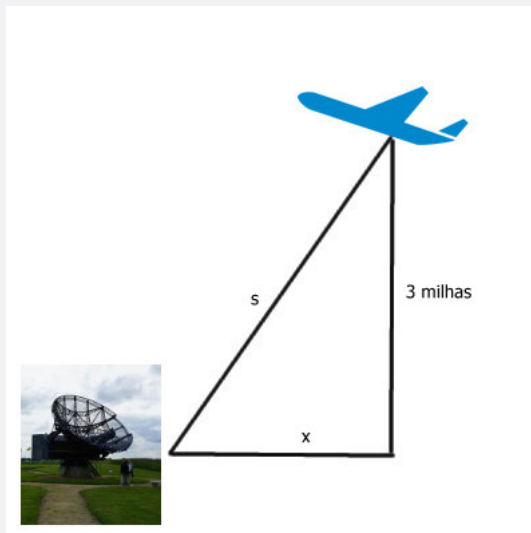
3.5

- (a) Defina aproximação linear e diferencial;
- (b) Usando diferenciais, calcule uma aproximação de $\sqrt[3]{42}$;
- (c) Calcule o diferencial de $f(x) = x \sin(x)$;
- (d) Calcule o diferencial de $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

• • ○ ○

3.6

- (a) Um pequeno balão esférico é introduzido numa artéria obstruída e inflado à uma taxa de $0,002\pi \text{ mm}^3/\text{min}$. Qual a taxa de aumento do raio do balão quando o raio é $0,005 \text{ min}$?
- (b) Um avião segue uma rota que passa sobre uma estação de rastreamento por radar, como ilustra a figura abaixo. Sabendo-se que s decresce a uma taxa de $800 \text{ milhas por hora}$ quando s é 5 milhas , qual a velocidade escalar do avião?



• • • ○

3.7 Calcule a segunda derivada das seguintes funções:

- (a) $f(x) = 3 \sec^2(\pi x - 1)$
- (b) $f(x) = \sin(\sqrt[3]{x}) + \sqrt[3]{\sin(x)}$
- (c) $f(x) = \cos(3x) + \cos^3(x)$
- (d) $f(x) = \sqrt{\tan(4x)}$

• • • ○

3.8 Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Se for verdadeira, explique. Se for falsa dê um contra-exemplo.

- (a) Se $f''(x) = g''(x)$ então $f(x) = g(x)$
- (b) A terceira derivada representa a taxa de variação da segunda derivada.
- (c) Se a velocidade de um objeto é constante então a sua aceleração é nula.
- (d) $f g'' + f'' g = (f g)''$.

• • ○ ○

3.9

- (a) Defina a primitiva de uma função $f(x)$ e descreva a notação.
- (b) Calcule as primitivas da função $f(x) = x^2$.

• • • ○

3.10 Usando o conceito de primitiva e seus conhecimentos de Cálculo, resolva o seguinte problema:

Uma bola é jogada para cima com velocidade inicial v_0 m/s de uma altura inicial h_0 m. Sabendo-se que a aceleração da gravidade é aproximadamente $a = 10$ m/s², encontre a função posição $s(t)$ que descreve a altura da bola em função do tempo.

• • • ○

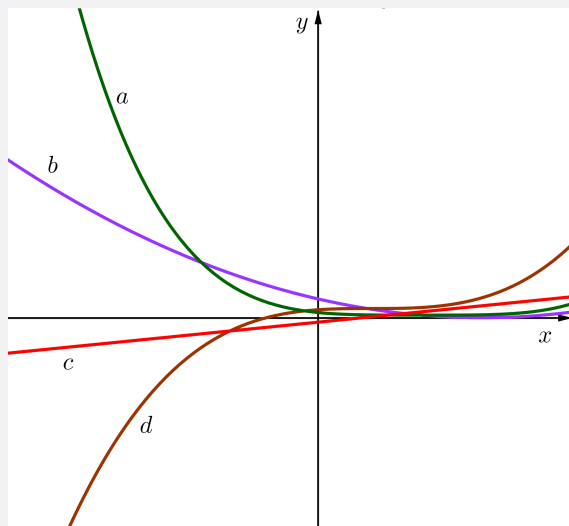
3.11 Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Se for verdadeira, explique. Se for falsa dê um contra-exemplo.

- (a) Se $F(x)$ e $G(x)$ são primitivas de $f(x)$ então $F(x) = G(x) + C$;
- (b) Se $f'(x) = g'(x)$ então $\int g(x) dx = f(x) + C$;
- (c) $\int f(x) g(x) dx = \int f(x) dx \int g(x) dx$;
- (d) A primitiva de uma função é única.

• • • •

3.12 Se “ a ” é a aceleração de um objeto, definimos o *impulso* “ j ” por $j = a'(t)$.

- (a) Dê uma interpretação física para “ j ”;
- (b) Um veículo se desloca segundo a função posição $s(t) = -8.25t^2 + 66t$. Calcule “ j ” deste veículo;
- (c) Na figura abaixo são descritos os gráficos da função posição, da velocidade, da aceleração e do impulso de um objeto. Identifique cada um deles e explique o critério usado para fazer a identificação.



• • ○ ○

3.13 Uma pedra lançada num lago parado produz ondulações na forma de círculos concêntricos. O raio “ r ” do círculo interno aumenta a uma taxa de um pé por segundo (um pé = 30,48 cm). Quando o raio medir 4 pés, qual será a taxa de variação da área A da parte ondulada?

• • • ○

3.14

- (a) Defina a concavidade e ponto de inflexão de uma função f ;
- (b) Faça uma interpretação geométrica da concavidade para cima de f .

• • • • ○

3.15 Suponha que a função f representa a venda semanal de um produto. O que podemos afirmar sobre f' e f'' para cada uma das seguintes situações:

- (a) A taxa de variação das vendas é crescente;
- (b) As vendas estão estabilizadas;
- (c) As vendas atingiram o mínimo e começaram a crescer;
- (d) A taxa de variação das vendas é constante.

• • • • •

3.16

- (a) Enuncie e faça a interpretação geométrica do Teorema do valor médio - TVM.
- (b) Faça a interpretação Física (cinemática) do Teorema do valor médio.
- (c) Determine se o Teorema do valor médio pode ser aplicado a função $f(x) = \frac{x+1}{x}$ em $[1, 2]$.
Caso afirmativo, encontre o(s) valor(es) de “c” em $[1, 2]$ que satisfaz(em) o TVM e ache a equação da reta tangente em “c”.
- (d) Um ciclista começa uma corrida de 40 Km às 6 horas e termina 4 horas depois. Explique por que existem pelo menos dois instantes durante a corrida que a velocidade do ciclista é de 8 Km/h.

Dica: Aplique o TVM.

• • • • ○

3.17

- (a) Descreva um procedimento para encontrar extremos relativos da função f usando apenas informações de f' .

Dica: Estude o teste da primeira derivada.

Aplique este procedimento as seguintes situações:

(b) Encontre os extremos relativos de $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$;

(c) Resolva o seguinte problema:

Tossir força a traquéia a se contrair, o que afeta a velocidade “v” do ar que passa por ela. A velocidade do ar durante a tosse é

$$v = k(R - r)r^2 \quad 0 \leq r < R.$$

com k uma constante, R o raio normal da traquéia e r o raio durante a tosse. Qual o raio produzirá a velocidade máxima do ar?

• • • ○

3.18

(a) Descreva um procedimento para encontrar extremos relativos da função f usando informações de f' e f'' .

dica: estude o teste da segunda derivada.

(b) Aplique (se possível) este procedimento para encontrar os extremos relativos de $f(x) = \sin(x) + x$ em $[0, 2\pi]$;

(c) Existem números de $[0, 2\pi]$ para os quais o procedimento acima não se aplica? Caso afirmativo, sem usar o gráfico de f e usando informações de f' , como você faria para verificar se o número é ou não extremo relativo de f ?

• • ○ ○

3.19

(a) Defina assíntotas verticais, horizontais e oblíquas;

(b) Determine as assíntotas da função $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$.

• ○ ○ ○

3.20

Ache o comprimento e a largura de um retângulo que tem perímetro de 100 metros e área máxima.

• • • •

3.21

- (a) Dê exemplo de uma função cujo gráfico tem assíntota vertical em $x = 4$ e assíntota oblíqua em $y = x + 1$.
- (b) Na resolução do limite abaixo, a regra de L'Hospital foi incorretamente usada. Descreva o erro:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \cos(\pi x)}{1} = \pi.$$

Para as questões 3.22 e 3.23, considere a seguinte função

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}.$$

• • • •

3.22 Faça a seguinte análise:

- domínio de f :
- pontos de intersecção como o eixo x :
- pontos de intersecção com o eixo y :
- primeira derivada f' :
- segunda derivada f'' :
- assíntotas verticais:
- assíntotas horizontais:
- assíntotas oblíquas:
- Limites no infinito:
 - (i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:
 - (ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:
- pontos críticos:
- pontos de inflexão:
- intervalos da análise:

• • • • ○

3.23

- (a) Faça um resumo da análise da questão 2 completando a seguinte tabela:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	propriedades do gráfico

- (b) Usando a tabela acima, faça um esboço do gráfico de f .

• • • • •

3.24

- (a) Para a função $f(x) = x^4 - 12x^3 + 4x^2 - 64x$, faça a seguinte análise:

- domínio de f :
- pontos de intersecção como o eixo x :
- pontos de intersecção com o eixo y :
- primeira derivada f' :
- segunda derivada f'' :
- assíntotas verticais:
- assíntotas horizontais:
- assíntotas oblíquas:
- Limites no infinito:
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:
- pontos críticos:
- pontos de inflexão:
- intervalos de teste:

- (b) Faça um resumo da análise do item (a) completando a seguinte tabela:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	propriedades do gráfico

- (c) Usando a tabela do item (b), faça um esboço do gráfico de f .

• • • ○

3.25 Determine a derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = \ln(\sec(x) + \operatorname{tg}(x))$

(b) $f(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x))$

(c) $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1 + e^x}\right)$

(d) $f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}$

• • • ○

3.26 Calcule a área do maior retângulo que pode ser inscrito sob a curva $f(x) = e^{-x^2}$, no primeiro e segundo quadrantes.

• • • ○

3.27 Considere a função $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

(a) Encontre, se possível, os pontos extremos de f ;

(b) Encontre, se possível, os pontos de inflexão de f .

• • • ○

3.28 Considere a função $f(x) = \log_{10} x$.

(a) Qual o domínio de f ?

(b) Encontre f^{-1} ;

- (c) Dados $f(x_1) = 3n$ e $f(x_2) = n$, calcule $\frac{x_1}{x_2}$;
- (d) Encontre o intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que $f(x) < 0, \forall x \in I$.

• • • • ○

3.29

- (a) Defina as funções $\sinh(x)$ e $\cosh(x)$;
- (b) Verifique a identidade $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$;
- (c) Mostre que: $\frac{d}{dx}(\sinh(x)) = \cosh(x)$ e $\frac{d}{dx}(\cosh(x)) = \sinh(x)$;
- (d) Verifique que a função $y = a \sinh(x)$ satisfaz a equação diferencial $y''' - y' = 0$.

• • • • ○

3.30

- (a) Seja $y^x = x^y$. Calcule y' ;
- (b) Encontre o coeficiente angular da reta tangente à curva $y^x = x^y$ nos pontos (a, a) e $(2, 4)$;
- (c) Em qual ponto do gráfico de $y^x = x^y$ a reta tangente não existe? Explique.

• • • • •

3.31 Um lago tem 500 peixes e sua população cresce de acordo com a função logística

$$p(t) = \frac{10.000}{1 + 19 e^{-t/5}}$$

com t medido em meses.

- (a) Qual o tamanho limite para a população de peixes?
- (b) A que taxa a população de peixes está variando no final do primeiro mês?

- 
- (c) A que taxa a população de peixes está variando no final de 10 meses?
 - (d) Depois de quantos meses a população cresce mais rapidamente?

Sugestões

3.1 Os gráficos dados são de funções conhecidas, sendo que os dois primeiros correspondem às funções polinomiais e os dois últimos correspondem às funções trigonométricas.

3.2 Utilize a regra da cadeia.

3.3 Utilize a regra da cadeia e observe o padrão nas derivadas de ordem superior.

3.4 Considere $y = f(x)$ e derive implicitamente.

3.5 Leia sobre aproximação linear, diferencial e suas aplicações.

3.6 Considere volume V e raio r como funções do tempo t e derive com relação à t . No segundo item, utilize o Teorema de Pitágoras e, analogamente, derive com relação à t .

3.7 Use a regra da cadeia.

3.8 Considere usar funções polinomiais no item (a). Lembre-se que $(fg)' = f'g + fg'$.

3.9 Leia sobre primitivação.

3.10 Observe que a velocidade é a primitiva da aceleração, ao passo que a posição é a primitiva da velocidade, isto é,

$$v(t) = \int a(t) dt + c_1 \quad \text{e} \quad s(t) = \int v(t) dt + c_2$$

com c_1 e c_2 constantes.

3.11 Considere funções polinomiais como contra-exemplo.

3.12 O *impulso*, ou *arranque*, é a terceira derivada da função posição. Suponha que os gráficos correspondem às funções polinomiais.

3.13 Considere a área A e o raio r como funções do tempo t e derive com relação à t .

3.14 Leia sobre concavidade e ponto de inflexão.

3.15 Interprete f' e f'' como taxas de variação e relacione com os conceitos de concavidade e ponto de inflexão.

3.16 Leia sobre Teorema do Valor Médio e suas aplicações.

3.17 Estude o teste da primeira derivada.

3.18 Estude o teste da segunda derivada.

3.19 Estude a definição de assíntota.

3.20 Relacione a expressão do perímetro com a expressão da área.

3.21 Considere uma função racional $f(x)$ cujo numerador é uma função $g(x)$ e o denominador é o termo $(x - 4)$. Utilize a propriedade

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = \infty.$$

3.22 Utilize as definições estudadas nos exercícios anteriores.

3.23 Estude o sinal de f , f' e f'' nos intervalos em que f está definida, isto é, no seu domínio.

3.24 Utilize um aplicativo para obter as raízes de f .

3.25 utilize a regra da cadeia.

3.26 Sob o gráfico de f esboce um retângulo com altura $h = e^{-x^2}$ e base $b = 2x$, cuja área $A = bh$ deverá ser maximizada.

3.27 Faça $f'(x) = 0$ (Teorema de Fermat) e utilize os testes da primeira e da segunda derivada.

3.28 Estude a definição de função logarítmica.

3.29 Leia sobre funções trigonométricas hiperbólicas.

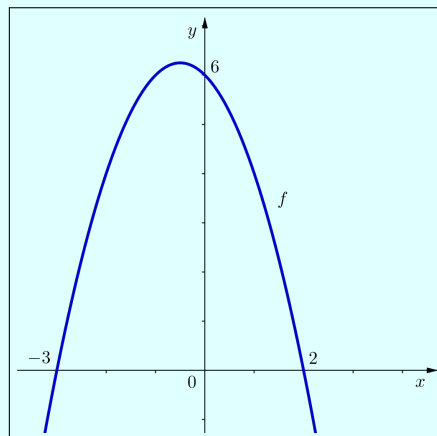
3.30 Faça $y^x = x^y \Leftrightarrow x \ln(y) = y \ln(x)$ e derive implicitamente.

3.31 No item (d), $p''(t)$ é a função que deverá ser maximizada.

Respostas

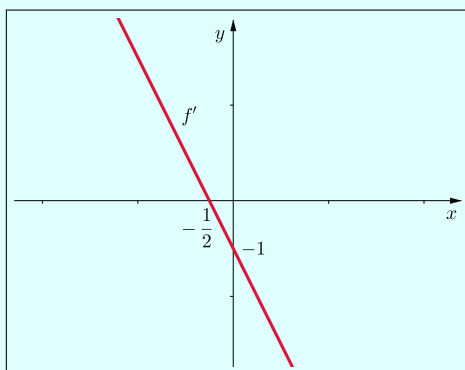
3.1 Nos itens abaixo são dados os gráficos da função f . Faça um esboço do gráfico de f' e f'' .

(a)

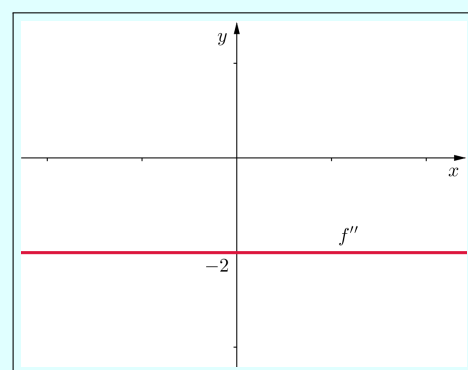


Solução:

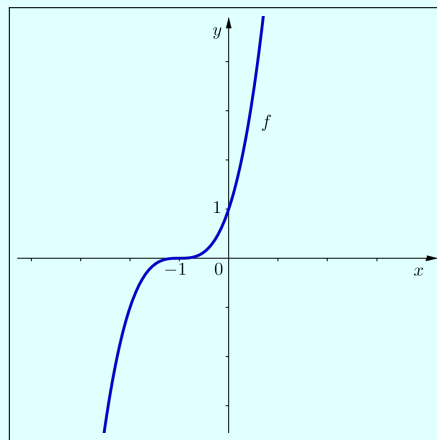
$f'(x)$



$f''(x)$

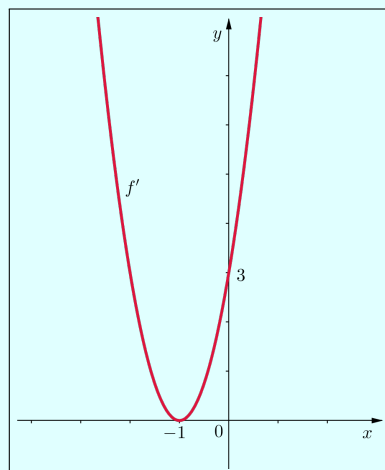


(b)

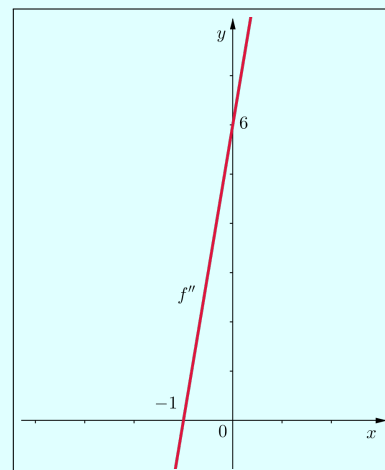


Solução:

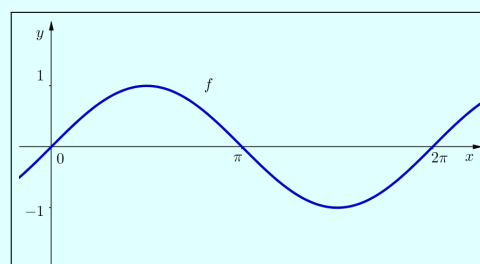
$f'(x)$



$f''(x)$

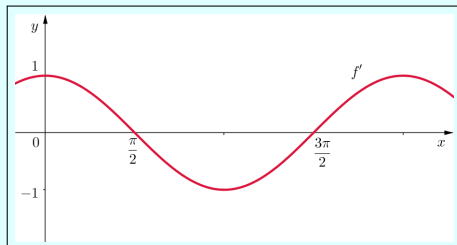


(c)

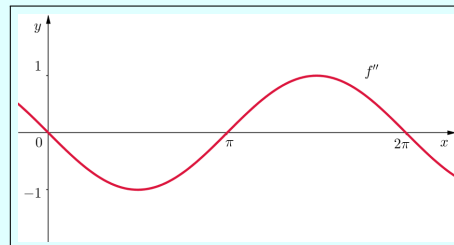


Solução:

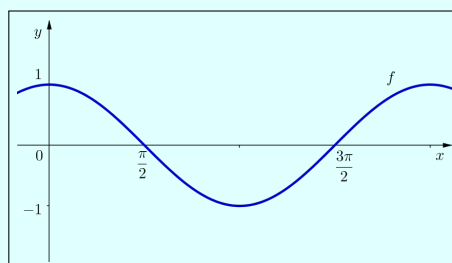
$f'(x)$



$f''(x)$

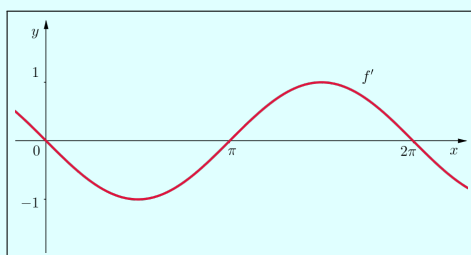


(d)

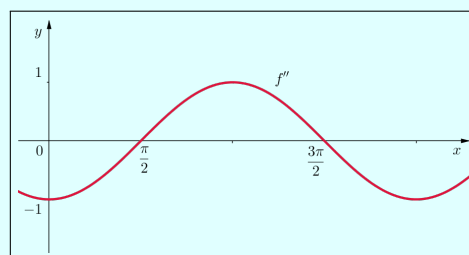


Solução:

$f'(x)$



$f''(x)$



3.2 Calcule a segunda derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = 5(x^3 - 3)^4$;

Solução:

Primeira derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \cdot 4(x^3 - 3)^3 \cdot 3x^2 \\ &= 60x^2(x^3 - 3)^3. \end{aligned}$$

Segunda derivada:

$$\begin{aligned}f''(x) &= 120x(x^3 - 3)^3 + 60x^2 \cdot 3(x^3 - 3)^2 \cdot 3x^2 \\&= 120x(x^3 - 3)^3 + 540x^4(x^3 - 3)^2 \\&= 60x(x^3 - 3)^2 [2(x^3 - 3) + 9x^3] \\&= 60x(x^3 - 3)^2(11x^3 - 6).\end{aligned}$$

(b) $f(x) = \left(\frac{x^2 - 4}{x + 2}\right)^3$;

Solução:

Função f :

$$f(x) = \left(\frac{x^2 - 4}{x + 2}\right)^3 = \left(\frac{(x - 2)\cancel{(x + 2)}}{\cancel{(x + 2)}}\right)^3 = (x - 2)^3.$$

Primeira derivada:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3(x - 2)^2 \cdot 1 \\&= 3(x - 2)^2.\end{aligned}$$

Segunda derivada:

$$\begin{aligned}f''(x) &= 3 \cdot 2(x - 2) \cdot 1 \\&= 6x - 6.\end{aligned}$$

(c) $h(x) = f(x^3)$

Solução:

Primeira derivada:

$$\begin{aligned}h'(x) &= f'(x^3) \cdot 3x^2 \\&= 3x^2 f'(x^3).\end{aligned}$$

Segunda derivada:

$$\begin{aligned}h''(x) &= 6x f'(x^3) + 3x^2 f''(x^3) \cdot 3x^2 \\&= 6x f'(x^3) + 9x^4 f''(x^3).\end{aligned}$$

(d) $f(x) = \text{sen}(\cos(x))$.

Solução:

Primeira derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(\cos(x)) \cdot [-\text{sen}(x)] \\ &= -\text{sen}(x) \cos(\cos(x)). \end{aligned}$$

Segunda derivada:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\cos(x) \cos(\cos(x)) + \{-\text{sen}(x) \cdot [-\text{sen}(\cos(x))] \cdot [-\text{sen}(x)]\} \\ &= -\cos(x) \cos(\cos(x)) - \text{sen}^2(x) \text{sen}(\cos(x)). \end{aligned}$$

3.3 Considere a função $f(x) = \cos(\beta x)$ com β uma constante.

(a) Calcule f' , f'' , $f^{(3)}$, $f^{(4)}$, $f^{(5)}$, $f^{(6)}$;

Solução:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\beta \text{sen}(\beta x) \\ f''(x) &= -\beta^2 \cos(\beta x) \\ f^{(3)}(x) &= \beta^3 \text{sen}(\beta x) \\ f^{(4)}(x) &= \beta^4 \cos(\beta x) \\ f^{(5)}(x) &= -\beta^5 \text{sen}(\beta x) \\ f^{(6)}(x) &= -\beta^6 \cos(\beta x). \end{aligned}$$

(b) , Usando os resultados do item (a), escreva uma fórmula geral para as derivadas de ordem par $f^{(2k)}(x)$ e as de ordem ímpar $f^{(2k-1)}(x)$.

Solução:

Fórmula geral para as derivadas de ordem par:

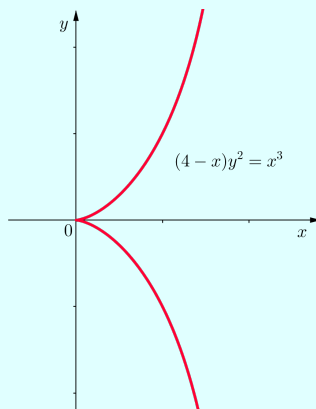
$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \beta^{2k} \cos(\beta x).$$

Fórmula geral para as derivadas de ordem ímpar:

$$f^{(2k-1)}(x) = (-1)^k \beta^{2k-1} \text{sen}(\beta x).$$

3.4 Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da equação dada no ponto dado.

(a) $(4 - x)y^2 = x^3$; ponto: $(2, 2)$



Solução:

Derivação implícita ($y = y(x)$):

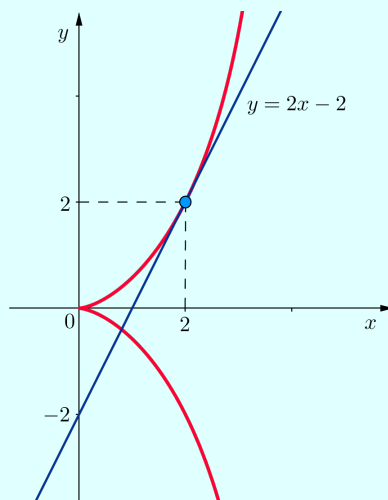
$$\begin{aligned} ((4-x)y^2)' &= (x^3)' \\ -y^2 + (4-x)2yy' &= 3x^2 \\ 2y(4-x)y' &= 3x^2 + y^2 \\ y'(x) &= \frac{3x^2 + y^2}{2y(4-x)}. \end{aligned}$$

Calculando a derivada no ponto $(2, y(2)) = (2, 2)$:

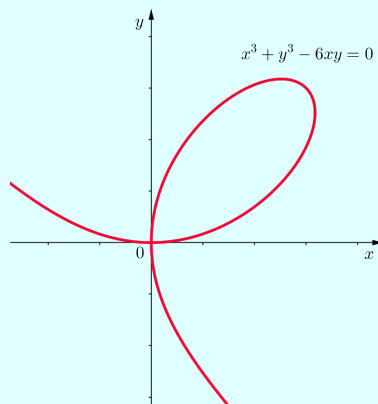
$$\begin{aligned} y'(2) &= \frac{3 \cdot 2^2 + 2^2}{2 \cdot 2(4-2)} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Equação da reta tangente ao gráfico da equação dada no ponto $(2, 2)$:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 2.$$



(b) $x^3 + y^3 - 6xy = 0$; ponto: $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$



Solução:

Derivação implícita ($y = y(x)$):

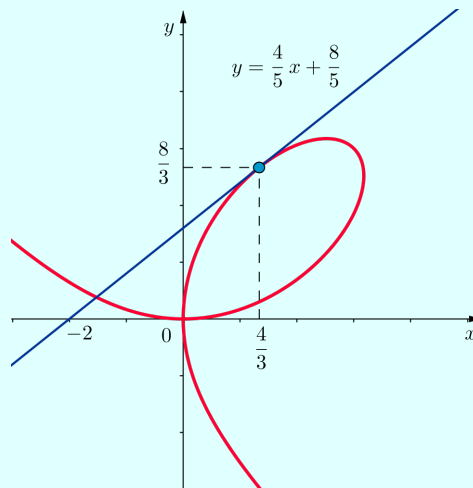
$$\begin{aligned} (x^3 + y^3 - 6xy)' &= (0)' \\ 3x^2 + 3y^2y' - 6y - 6xy' &= 0 \\ y^2y' - 2xy' &= 2y - x^2 \\ y'(x) &= \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}. \end{aligned}$$

Calculando a derivada no ponto $\left(\frac{4}{3}, y\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$:

$$\begin{aligned} y'\left(\frac{4}{3}\right) &= \frac{2 \cdot \frac{8}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^2}{\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{4}{3}} \\ &= \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Equação da reta tangente ao gráfico da equação dada no ponto $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow \left(y - \frac{8}{3}\right) = \frac{4}{5}\left(x - \frac{4}{3}\right) \Rightarrow y = \frac{4}{5}x + \frac{8}{5}.$$



3.5

- (a) Defina aproximação linear e diferencial;

Solução:

- (i) Seja

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(a, f(a))$.

A aproximação

$$f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

é denominada aproximação linear ou aproximação pela reta tangente de f em a .

- (ii) Se $f(x)$ é uma função derivável, então o diferencial dy é definida por equação.

$$dy = f'(x)dx.$$

- (b) Usando diferenciais, calcule uma aproximação de $\sqrt[3]{42}$;

Solução:

Seja $f(x) = \sqrt[3]{x}$, então $f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$.

Temos que encontrar uma aproximação para $f(42) = \sqrt[3]{42}$.

Note que $f(42,875) = 3,5$ e $f'(42,875) \approx 0,027$

- (i) Por aproximação linear:

Adotando $a = 42,875$, temos que

$$f(x) \approx f(42,875) + f'(42,875)(x - 42,875)$$

Assim,

$$f(x) \approx 3,5 + 0,027(x - 42,875)$$

Logo,

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{42} = f(42) &\approx 3,5 + 0,027(x - 42,875) \\ &\approx 3,47.\end{aligned}$$

(ii) Por diferenciais:

Podemos reescrever a aproximação

$$dy \approx f(x + \Delta x) - f(x)$$

Como

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x) dx.$$

Substituindo $dy = \frac{dx}{3x^{\frac{2}{3}}}$, temos

$$f(x) \approx f(x + \Delta x) - \frac{dx}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

Logo, adotando $x = 42$ e $dx = \Delta x = 0,875$, temos

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{42} = f(42) &\approx f(42,875) - \frac{0,875}{3 \cdot 42^{\frac{2}{3}}} \approx 3,5 - 0,024 \\ &\approx 3,476.\end{aligned}$$

(c) Calcule o diferencial de $f(x) = x \operatorname{sen}(x)$;

Solução: Temos que

$$f'(x) = \operatorname{sen}(x) + x \cos(x)$$

Logo

$$\begin{aligned}dy &= f'(x)dx \\ &= (\operatorname{sen}(x) + x \cos(x)) dx\end{aligned}$$

- (d) Calcule o diferencial de $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Solução: Temos que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

Logo

$$\begin{aligned} dy &= f'(x)dx \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} \right) dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(1 - \frac{1}{x} \right) dx \end{aligned}$$

3.6

- (a) Um pequeno balão esférico é introduzido numa artéria obstruída e inflado à uma taxa de $0,002\pi \text{ mm}^3/\text{min}$. Qual a taxa de aumento do raio do balão quando o raio é $0,005 \text{ mm}$?

Solução: Temos que o volume da esfera é dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Note que $V = V(t)$ e $r = r(t)$. Assim, derivando com relação a t temos:

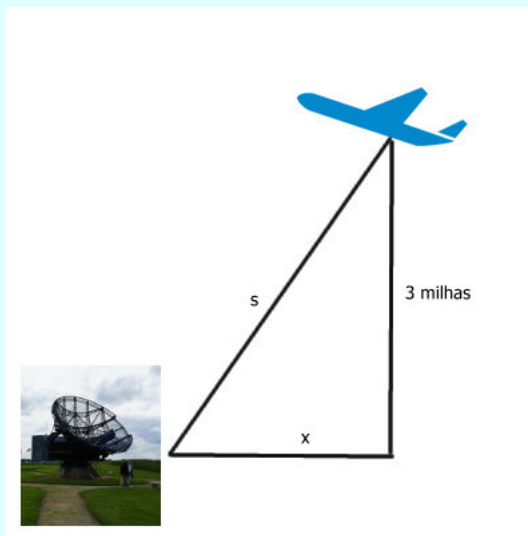
$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

Substituindo $\frac{dV}{dt} = 0,002\pi \text{ mm}^3/\text{min}$ e $r = 0,005 \text{ mm}$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \\ 0,002\pi &= 4\pi(0,005)^2 \frac{dr}{dt} \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{0,002\pi}{4\pi(0,005)^2} = 20. \end{aligned}$$

Logo, o raio está crescendo a uma taxa de 20 mm/min .

- (b) Um avião segue uma rota que passa sobre uma estação de rastreamento por radar, como ilustra a figura abaixo. Sabendo-se que s decresce a uma taxa de $800 \text{ milhas por hora}$ quando s é 5 milhas , qual a velocidade escalar do avião?



Solução: Analisando o triângulo retângulo da figura, temos que:

$$s^2 = x^2 + 9.$$

Note que para $s = 5$ milhas, temos que $x = 4$ milhas.

Além disso, observe que $s = s(t)$ e $x = x(t)$. Assim, derivando com relação a t :

$$2s \frac{ds}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}.$$

A velocidade escalar será dada por $\frac{dx}{dt}$. Logo, substituindo $\frac{ds}{dt} = -800$ mph, $s = 5$ e $x = 4$, temos:

$$\begin{aligned} 2s \frac{ds}{dt} &= 2x \frac{dx}{dt} \\ 2 \cdot 5 \cdot (-800) &= 2 \cdot 4 \cdot \frac{dx}{dt} \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{2 \cdot 5 \cdot (-800)}{2 \cdot 4} = -1000. \end{aligned}$$

Logo, a velocidade escalar do avião é -1000 milhas por hora.

3.7 Calcule a segunda derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = 3 \sec^2(\pi x - 1)$.

Solução: Usando a regra da cadeia duas vezes, calculamos a primeira derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot 2 \cdot \sec(\pi x - 1) \cdot (\sec(\pi x - 1))' \\ &= 3 \cdot 2 \cdot \sec(\pi x - 1) \cdot (\sec(\pi x - 1) \cdot \operatorname{tg}(\pi x - 1) \cdot (\pi x - 1)') \\ &= 6\pi \sec^2(\pi x - 1) \operatorname{tg}(\pi x - 1). \end{aligned}$$

Aplicando a regra da derivada do produto temos:

$$f''(x) = 6\pi [(\sec^2(\pi x - 1))' \cdot \operatorname{tg}(\pi x - 1) + \sec^2(\pi x - 1) \cdot (\operatorname{tg}(\pi x - 1))']. \quad (4)$$

Dos cálculos anteriores temos que

$$(\sec^2(\pi x - 1))' = 2\pi \sec^2(\pi x - 1) \operatorname{tg}(\pi x - 1). \quad (5)$$

Além disso, aplicando a regra da cadeia obtemos

$$(\operatorname{tg}(\pi x - 1))' = \sec^2(\pi x - 1) \cdot (\pi x - 1)' = \pi \sec^2(\pi x - 1) \quad (6)$$

Substituindo, (40) e (41) em (39) obtemos

$$\begin{aligned} f''(x) &= 6\pi [2\pi \sec^2(\pi x - 1) \operatorname{tg}^2(\pi x - 1) + \pi \sec^4(\pi x - 1)] \\ &= 12\pi^2 \sec^2(\pi x - 1) \operatorname{tg}^2(\pi x - 1) + 6\pi^2 \sec^4(\pi x - 1). \end{aligned}$$

(b) $f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt[3]{x}) + \sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}$.

Solução: Inicialmente calculamos a primeira derivada. Para isso, vamos aplicando a regra da derivada da soma, temos

$$f'(x) = (\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x}))' + (\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)})'. \quad (7)$$

Aplicando a regra da cadeia obtemos

$$\begin{aligned} (\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x}))' &= \cos(\sqrt[3]{x}) \cdot (\sqrt[3]{x})' = \left(\cos(\sqrt[3]{x})\right) \frac{1}{3} x^{-2/3}; \\ (\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)})' &= (\operatorname{sen}(x))^{-2/3} \cdot (\operatorname{sen}(x))' = \cos(x) (\operatorname{sen}(x))^{2/3}. \end{aligned} \quad (8)$$

Substituindo (8) em (7) tem-se

$$f'(x) = \frac{1}{3} \left(x^{-2/3} \cos(\sqrt[3]{x}) + \cos(x) (\operatorname{sen}(x))^{2/3} \right).$$

Aplicando novamente a regra da derivada da soma, temos que:

$$f''(x) = \frac{1}{3} \left((x^{-2/3} \cos(\sqrt[3]{x}))' + (\cos(x) (\sin(x))^{-2/3})' \right) \quad (9)$$

Vamos calcular separadamente a derivada de cada parcela. Aplicando a regra da derivada do produto e a regra da cadeia, tem-se

$$\begin{aligned} (x^{-2/3} \cos(\sqrt[3]{x}))' &= (x^{-2/3})' \cdot \cos(\sqrt[3]{x}) + x^{-2/3} \cdot (\cos(\sqrt[3]{x}))' \\ &= -\frac{2}{3} x^{-5/3} \cos(\sqrt[3]{x}) - x^{-2/3} (\sin(\sqrt[3]{x}) \cdot (\sqrt[3]{x})') \\ &= -\frac{2}{3} x^{-5/3} \cos(\sqrt[3]{x}) - x^{-2/3} (\sin(\sqrt[3]{x}) \cdot x^{-2/3}) \\ &= -\frac{2x^{-5/3}}{3} \cos(\sqrt[3]{x}) - x^{-4/3} (\sin(\sqrt[3]{x})). \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (\cos(x) (\sin(x))^{-2/3})' &= (\cos(x))' \cdot (\sin(x))^{-2/3} + \cos(x) \cdot ((\sin(x))^{-2/3})' \\ &= -\sin(x) \cdot (\sin(x))^{-2/3} + \cos(x) \left(-\frac{2}{3} \cdot (\sin(x))^{-5/3} \cdot (\sin(x))' \right) \\ &= -(\sin(x))^{1/3} - \frac{2(\sin(x))^{-5/3} \cos(x)}{3} \end{aligned} \quad (11)$$

Substituindo (10) e (11) em (9), segue que:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{2x^{-5/3} \cos(\sqrt[3]{x})}{9} - \frac{x^{-4/3} \sin(\sqrt[3]{x})}{3} - \frac{(\sin(x))^{1/3}}{9} - \frac{2(\sin(x))^{-5/3} \cos^2(x)}{9} \\ &= -\frac{2 \cos(\sqrt[3]{x})}{9x^{5/3}} - \frac{\sin(\sqrt[3]{x})}{9x^{4/3}} - \frac{\sqrt[3]{\sin(x)}}{3} - \frac{2 \cos^2(x)}{9 (\sin(x))^{5/3}}. \end{aligned}$$

(c) $f(x) = \cos(3x) + \cos^3(x)$.

Solução: Aplicando a regra da derivada da soma e a regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\cos(3x))' + (\cos^3(x))' \\ &= -\sin(3x) (3x)' + 3 \cos^2(x) (\cos(x))' \\ &= -3 \sin(3x) - 3 \cos^2(x) \sin(x). \end{aligned}$$

Aplicando novamente a regra da derivada da soma e a regra da cadeia com a regra da derivada do produto, tem-se

$$\begin{aligned}
f''(x) &= -3 (\sin(3x))' - 3 \left((\cos^2(x))' \cdot \sin(x) + \cos^2(x) \cdot (\sin x)' \right) \\
&= -3 \cos(3x) (3x)' - 3 \left((2 \cos(x) \cdot (\cos(x))') \sin(x) + \cos^2(x) \cos(x) \right) \\
&= -9 \cos(3x) - 3 \left(-2 \sin^2(x) \cos(x) + \cos^3(x) \right) \\
&= -9 \cos(3x) + 6 \sin^2(x) \cos(x) - 3 \cos^3(x).
\end{aligned}$$

(d) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg}(4x)}$.

Solução: Para calcularmos a primeira derivada vamos aplicar a regra da cadeia. Observe que $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg}(4x)} = (\operatorname{tg}(4x))^{1/2}$. Assim,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2} (\operatorname{tg}(4x))^{-1/2} \cdot (\operatorname{tg}(4x))' \\
&= \frac{1}{2} (\operatorname{tg}(4x))^{-1/2} (\operatorname{tg}(4x))' \\
&= \frac{1}{2} (\operatorname{tg}(4x))^{-1/2} (\sec^2(4x) (4x)') \\
&= \frac{2 \sec^2(4x)}{\sqrt{\operatorname{tg}(4x)}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$f'(x) = \frac{2 \sec^2(4x)}{\sqrt{\operatorname{tg}(4x)}}. \quad (12)$$

Para calcularmos a segunda derivada vamos aplicar a regra da derivada do quociente e a regra da cadeia. Assim,

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 2 \left(\frac{\sec^2(4x)}{\sqrt{\operatorname{tg}(4x)}} \right)' \\
&= 2 \left(\frac{(\sec^2(4x))' \sqrt{\operatorname{tg}(4x)} - \sec^2(4x) (\sqrt{\operatorname{tg}(4x)})'}{(\sqrt{\operatorname{tg}(4x)})^2} \right) \\
&= 2 \left(\frac{(\sec^2(4x))' \sqrt{\operatorname{tg}(4x)} - \sec^2(4x) (\sqrt{\operatorname{tg}(4x)})'}{\operatorname{tg}(4x)} \right)
\end{aligned} \quad (13)$$

Calculando a derivada de $\sec^2(4x)$ separadamente, tem-se

$$\begin{aligned}
(\sec^2(4x))' &= 2 \sec(4x) (\sec(4x))' \\
&= 2 \sec(4x) (\sec(4x) \operatorname{tg}(4x) (4x)') \\
&= 8 \sec^2(4x) \operatorname{tg}(4x)
\end{aligned} \quad (14)$$

Substituindo (12) e (37) em (13) obtemos

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \left(\frac{(\sec^2(4x))' \sqrt{\operatorname{tg}(4x)} - \sec^2(4x) (\sqrt{\operatorname{tg}(4x)})'}{\operatorname{tg}(4x)} \right) \\ &= 2 \left(\frac{8 \sec^2(4x) \operatorname{tg}(4x) \sqrt{\operatorname{tg}(4x)} - \sec^2(4x) \frac{2 \sec^2(4x)}{\sqrt{\operatorname{tg}(4x)}}}{\operatorname{tg}(4x)} \right) \\ &= 16 \sec^2(4x) \sqrt{\operatorname{tg}(4x)} - \frac{4 \sec^4(4x)}{\operatorname{tg}^{\frac{3}{2}}(4x)}. \end{aligned}$$

3.8 Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Se for verdadeira, explique. Se for falsa dê um contra-exemplo.

- (a) Se $f''(x) = g''(x)$ então $f(x) = g(x)$.

Solução: Falsa. Considere as seguintes funções:

$$f(x) = x^3 + 3x + C_1 \quad \text{e} \quad g(x) = x^3 + C_2$$

com C_1 e C_2 quaisquer constantes. Então, as derivadas de primeira ordem são:

$$f'(x) = 3x^2 + 3 \quad \text{e} \quad g'(x) = 3x^2.$$

E as derivadas de segunda ordem:

$$f''(x) = 6x \quad \text{e} \quad g''(x) = 6x.$$

Logo $f''(x) = g''(x)$, mas $f(x) \neq g(x)$.

- (b) A terceira derivada representa a taxa de variação da segunda derivada.

Solução: Verdadeira.

O conceito de derivada está intimamente relacionado à taxa de variação instantânea de uma função.

A terceira derivada $f'''(x)$ (ou derivada de terceira ordem) é a derivada da segunda derivada: $f'''(x) = (f''(x))'$. Logo, $f'''(x)$ pode ser interpretada como a taxa de variação $f''(x)$, ou seja,

$$f'''(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0}.$$

- (c) Se a velocidade de um objeto é constante então a sua aceleração é nula.

Solução: Verdadeira.

Sabemos que a velocidade é a taxa de variação da posição em relação ao tempo, ou seja

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

E que a aceleração é a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo, ou seja

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

Se a velocidade de um objeto é constante, então

$$v = c \quad \text{com} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Portanto

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(c) = 0.$$

- (d) $f g'' + f'' g = (f g)''$.

Solução: Falsa. Derivando o produto $f g$ pela primeira vez, temos

$$(f g)' = f' g + f g'.$$

Derivando o produto $f g$ pela segunda vez, temos

$$(f g)'' = (f' g + f g')' = (f' g)' + (f g')' = f'' g + f' g' + f' g' + f g''.$$

Portanto

$$(f g)'' = f'' g + f' g' + f' g' + f g''$$

e conseqüentemente

$$(f g)'' \neq f g'' + f'' g.$$

3.9

- (a) Defina a primitiva de uma função $f(x)$ e descreva a notação.

Solução: Uma função $F(x)$ é chamada uma primitiva da função $f(x)$ em $[a, b]$ se $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

Observe que $F(x)$ não é única, pois $H(x) = F(x) - C$ com $C \in \mathbb{R}$ também são primitivas. De fato, $H'(x) = F'(x) = f(x)$. Denota-se a família de primitivas de f no intervalo $[a, b]$ por

$$F(x) = \int f(x) dx + C.$$

(b) Calcule as primitivas da função $f(x) = x^2$.

Solução: Para calcularmos a primitiva de $f(x) = x^2$ devemos encontrar uma função $F(x)$ tal que sua primeira derivada é a função dada $f(x) = x^2$.

Sabemos que ao derivar a função cúbica x^3 obtemos, pela regra da derivada da potência, a função $3x^2$. Logo, tomando $F(x) = \frac{x^3}{3}$ temos que $F'(x) = x^2 = f(x)$.

Portanto, a família de primitivas de $f(x) = x^2$ é dada por

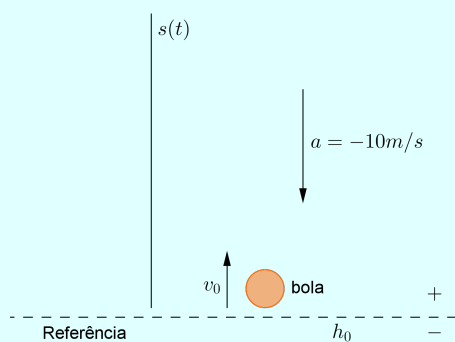
$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C$$

com $C \in \mathbb{R}$.

3.10 Usando o conceito de primitiva e seus conhecimentos de Cálculo, resolva o seguinte problema:

Uma bola é jogada para cima com velocidade inicial v_0 m/s de uma altura inicial h_0 m. Sabendo-se que a aceleração da gravidade é aproximadamente $a = 10 \text{ m/s}^2$, encontre a função posição $s(t)$ que descreve a altura da bola em função do tempo.

Solução: Adotaremos o seguinte referencial:



A aceleração da gravidade é constante e o seu sentido está no sentido contrário do positivo adotado no referencial ($a = -10 \text{ m/s}^2$).

Por outro lado, sabemos que a aceleração é a taxa de variação da velocidade com relação ao tempo, ou seja, a velocidade é a primitiva da aceleração. Portanto,

$$v(t) = \int a \, dt + C_1 = - \int 10 \, dt + C_1 = -10t + C_1$$

Mas, $v(0) = v_0$, o que implica $C_1 = v_0$. Assim, $v(t) = -10t + v_0$.

Além disso, sabemos que a velocidade é a taxa de variação da posição com relação ao tempo, ou seja, a posição é a primitiva da velocidade. Portanto,

$$s(t) = \int v(t) \, dt + C_2 = \int (-10t + v_0) \, dt = -5t^2 + v_0 t + C_2.$$

Mas, $s(0) = h_0$, o que implica $C_2 = h_0$. Portanto, a função posição é dada por

$$s(t) = -5t^2 + v_0 t + h_0.$$

3.11 Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Se for verdadeira, explique.

Se for falsa dê um contra-exemplo.

- (a) Se $F(x)$ e $G(x)$ são primitivas de $f(x)$ então $F(x) = G(x) + C$;

Solução: Verdadeira. Considere $H(x) = F(x) - G(x)$. Então, $H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$, pois F e G são primitivas de f e logo $F'(x) = G'(x) = f(x)$. Mas, se uma função tem derivada nula em seu domínio então ela é constante. Assim, $H(x) = F(x) - G(x) = C$, ou seja $F(x) = G(x) + C$.

- (b) Se $f'(x) = g'(x)$ então $\int g(x) \, dx = f(x) + C$;

Solução: Falsa. Fazendo $g(x) = 2x - 2$ e $f(x) = 2x + 1$ tem-se $f'(x) = g'(x)$. Mas

$$\int g(x) \, dx = \int (2x - 2) \, dx = x^2 - 2x + C \neq f(x).$$

- (c) $\int f(x) g(x) \, dx = \int f(x) \, dx \int g(x) \, dx$;

Solução: Falsa. Fazendo $f(x) = 2x$ e $g(x) = 6x$.

Temos

$$\begin{aligned} \int f(x) g(x) \, dx &= \int (2x \cdot 6x) \, dx \\ &= \int 12x^2 \, dx \\ &= 4x^3 + C; \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\int f(x) dx \int g(x) dx &= \int 2x dx \int 6x dx \\ &= (x^2 + C_1)(3x^2 + C_2) \\ &= 3x^4 + x^2(C_2 + 3C_1) + C_1C_2.\end{aligned}$$

Então,

$$\int f(x) g(x) dx \neq \int f(x) dx \int g(x) dx.$$

- (d) A primitiva de uma função é única.

Solução: Falsa. A primitiva de uma função f , caso exista, não é única.

Explicação 1: Se F é uma primitiva de f em um intervalo I , então $F(x) + C$ também são primitivas de f em I , para qualquer constante $C \in \mathbb{R}$.

Explicação 2: Considere $f(x) = 2$ então $F(x) = 2x$ e $G(x) = 2x + 1$ são primitivas de f . De fato, $F'(x) = 2$ e $G'(x) = 2$.

3.12 Se “ a ” é a aceleração de um objeto, definimos o *impulso* “ j ” por $j = a'(t)$.

- (a) Dê uma interpretação física para “ j ”.

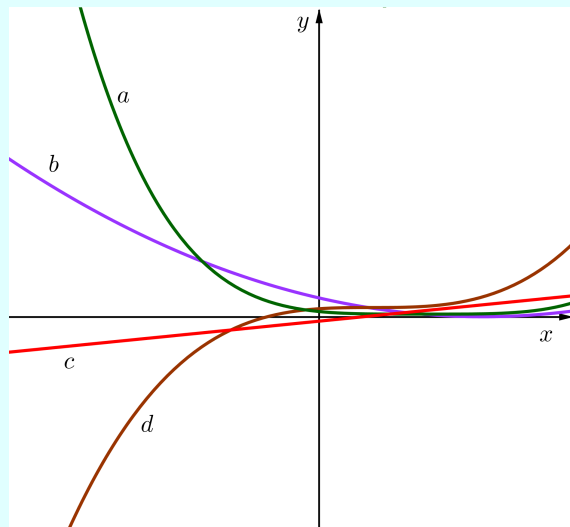
Solução: O impulso j de um objeto é a taxa de variação instantânea da aceleração.

Assim, um *impulso* grande significa uma variação súbita na aceleração. Um exemplo conhecido de *impulso* é a aplicação dos freios em automóveis, o que pode causar um movimento abrupto no veículo. Por exemplo, quando um motorista experiente aplica gradualmente os freios, causa uma desaceleração lenta (pequeno *impulso*). Por outro lado, quando um motorista inexperiente aplica rapidamente os freios, causa um solovanco (grande *impulso*).

- (b) Um veículo se desloca segundo a função posição $s(t) = -8.25t^2 + 66t$. Calcule “ j ” deste veículo;

Solução: Temos que $v(t) = s'(t) = -16,5t + 66$, então $a(t) = s''(t) = -16,5$. Como $a(t) = s''(t) = -16,5$, segue que o impulso do veículo é $j(t) = a'(t) = 0$.

- (c) Na figura abaixo são descritos os gráficos da função posição, da velocidade, da aceleração e do impulso de um objeto. Identifique cada um deles e explique o critério usado para fazer a identificação.



Solução: Supondo que os gráficos correspondam a funções polinomiais. Sabemos que:

$s(t)$	posição
$v(t) = s'(t)$	velocidade
$a(t) = v'(t) = s''(t)$	aceleração
$j(t) = a'(t) = s'''(t)$	impulso.

A mais alta derivada da posição vamos identificar com o gráfico c . Logo, o gráfico do impulso $j = a'(t)$ é uma reta. Suponha que seja a reta $j(t) = mt + n$. Esta reta corta o eixo y no ponto $(0, n)$ e o eixo x no ponto $(0, n/m)$. Pelo gráfico, concluímos que $n < 0$ e $m > 0$.

Mas o impulso é a derivada da aceleração e a derivada de uma parábola é uma reta. Logo, $a(t)$ é uma parábola do tipo $a(t) = \frac{m}{2}t^2 + nt + \alpha$. Como $m > 0$ temos que esta parábola tem concavidade para cima.

Por outro lado, para $t < 0$ tem-se

$$a(t) - a(0) = \frac{m}{2}t^2 + nt > 0 \Rightarrow a(t) > a(0).$$

E para para $0 < t < -\frac{n}{m}$ para $n < 0$ tem-se

$$a(t) - a(n/m) = \frac{m}{2}t^2 + nt - \frac{3n^2}{2m}.$$

Analisando o sinal da parábola $\frac{m}{2}t^2 + nt - \frac{3n^2}{2m}$ verificamos que ela é positiva para $0 < t < -\frac{n}{m}$, o que implica $a(t) > a(n/m)$.

Portanto, a função $a(t)$ é decrescente em $\left(-\infty, -\frac{n}{m}\right)$ com $n < 0$.

Observe que dos gráficos com concavidade para cima, o gráfico b tem essas propriedades. Logo, identificamos o gráfico de $a(t)$ com o gráfico b . Note que, $\alpha > 0$.

Mas a aceleração é a derivada da velocidade e a derivada de uma parábola é uma cúbica. Logo, $v(t)$ é uma cúbica do tipo $v(t) = \frac{m}{6}t^3 + \frac{n}{2}t^2 + \alpha t + \beta$ com $m > 0$, $n < 0$ e $\alpha > 0$.

Assim, para $t < 0$ tem-se

$$\begin{aligned} v(t) - v(0) &= \frac{m}{6}t^3 + \frac{n}{2}t^2 + \alpha t + \beta - \beta \\ &= \frac{m}{6}t^3 + \frac{n}{2}t^2 + \alpha t \\ &= \frac{t}{2} \left(\frac{m}{3}t^2 + nt + \alpha \right) \end{aligned}$$

Observe que a expressão no parentese é positiva e como $t < 0$ tem-se $v(t) - v(0) < 0$, ou seja, $v(t) < v(0)$.

Logo, a função $v(t)$ é crescente em $(\infty, 0)$. Portanto, o gráfico de $v(t)$ é o gráfico d .

Finalmente, por exclusão, o gráfico da posição $s(t)$ é o gráfico a .

3.13 Uma pedra lançada num lago parado produz ondulações na forma de círculos concêntricos. O raio “ r ” do círculo interno aumenta a uma taxa de um pé por segundo (um pé = 30,48 cm). Quando o raio medir 4 pés, qual será a taxa de variação da área A da parte ondulada?

Solução: Temos a área A e raio r estão relacionadas pela expressão:

$$A = \pi r^2.$$

Queremos calcular a taxa de variação instantânea da área A da parte ondulada, em função do tempo, para $r = 4$ ou seja, queremos calcular $\frac{dA}{dt}$ para $r = 4$.

Assim, $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$ e como $\frac{dr}{dt} = 1$, tem-se

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi \cdot 4 \cdot 1 = 8\pi \approx 25,13 \text{ pé}^2/\text{s} = 23349,08 \text{ cm}^2/\text{s}.$$

3.14

(a) Defina a concavidade e ponto de inflexão de uma função f ;

Solução:

Concavidade: Seja f derivável no intervalo aberto I e seja x_0 um ponto de I . A reta tangente em $(x_0, f(x_0))$ ao gráfico de f é o gráfico da função T dada por

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

(i) f tem **concavidade para cima** em I se

$$f(x) > T(x)$$

quaisquer que sejam x e x_0 em I , $x \neq x_0$.

(ii) f tem **concavidade para baixo** em I se

$$f(x) < T(x)$$

quaisquer que sejam x e x_0 em I , $x \neq x_0$.

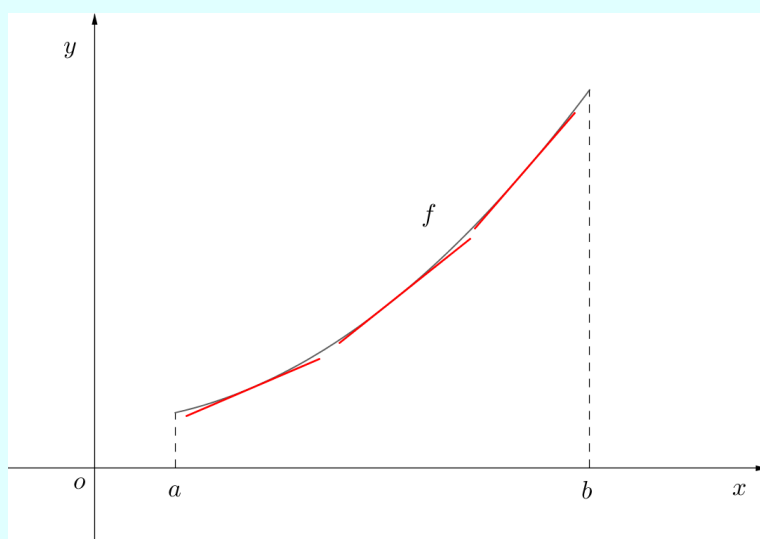
Ponto de inflexão: Um ponto $(x_0, f(x_0))$ do gráfico de uma função f é um ponto de inflexão de f , se existe um intervalo $(a, b) \subset I$ tal que $x_0 \in (a, b)$ e:

(i) f é côncava para cima em (a, x_0) e côncava para baixo em (x_0, b) , ou

(ii) f é côncava para baixo em (a, x_0) e côncava para cima em (x_0, b) .

(b) Faça uma interpretação geométrica da concavidade para cima de f .

Solução: Dizemos que f possui concavidade para cima em um intervalo (a, b) , se o gráfico de f estiver acima de todas as suas tangentes neste intervalo. Graficamente, temos:



3.15 Suponha que a função f representa a venda semanal de um produto. O que podemos afirmar sobre f' e f'' para cada uma das seguintes situações:

- (a) A taxa de variação das vendas é crescente;

Solução: A taxa de variação é dada por $f'(x)$. Então, temos que $f''(x) > 0$ para garantirmos que $f'(x)$ é crescente.

- (b) As vendas estão estabilizadas;

Solução: Vendas estabilizadas significa f atingiu um mínimo ou um máximo e depois ficou constante.

Se o ponto é de mínimo, significa que f decresceu e depois ficou constante, o que implica que $f'(x) < 0$ e $f'(x) = 0$. Além disso, $f''(x) > 0$ para garantir que f tem concavidade para cima.

Se o ponto é de máximo, significa que f cresceu e depois ficou constante, o que implica que $f'(x) > 0$ e $f'(x) = 0$. Além disso, $f''(x) < 0$ para garantir que f tem concavidade para baixo.

- (c) As vendas atingiram o mínimo e começaram a crescer.

Solução: As vendas atingiram o mínimo implica que $f'(x)$ se anula em algum ponto e começam a crescer implica que $f'(x) > 0$. Além disso, $f''(x) > 0$ para garantir que f tem concavidade para cima.

- (d) A taxa de variação das vendas é constante.

Solução: A taxa de variação instantânea é dada por f' . Então, $f'(x) = C$ com C uma constante. Logo, $f''(x) = 0$.

3.16

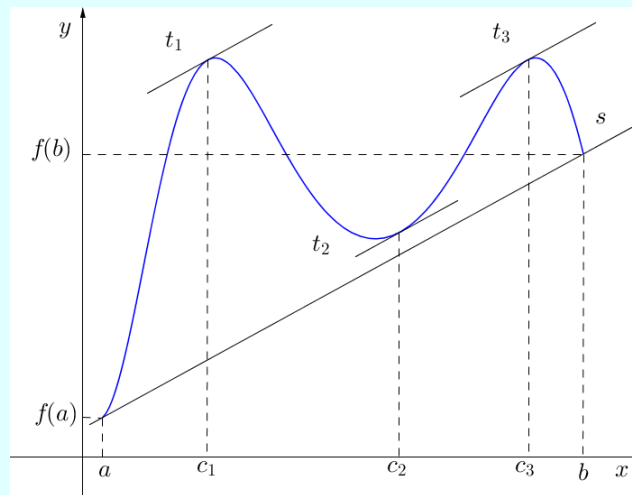
- (a) Enuncie e faça a interpretação geométrica do Teorema do valor médio - TVM.

Solução: Teorema do Valor Médio. Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) , então existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Geometricamente, este teorema diz que se s é uma reta passando pelo pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, então existirá pelo menos um ponto $(c, f(c))$, com $a < c < b$, tal que a reta tangente ao gráfico de f , neste ponto, é paralela à reta s . Como $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ é coeficiente angular de s e $f'(c)$ o da reta tangente t ,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



- (b) Faça a interpretação Física (cinemática) do Teorema do valor médio.

Solução: Suponhamos que uma partícula move-se em uma linha reta com uma função posição $s = f(t)$. Assim, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ será a velocidade média entre os instantes $t = a$ e $t = b$. O TVM nos diz que se f for contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) , então tal velocidade média será igual à velocidade instantânea da partícula em algum instante $t = c$ entre a e b .

- (c) Determine se o Teorema do valor médio pode ser aplicado a função $f(x) = \frac{x+1}{x}$ em $[1, 2]$.

Caso afirmativo, encontre o(s) valor(es) de “c” em $[1, 2]$ que satisfaz(em) o TVM e ache a equação da reta tangente em “c”.

Solução: Reescrevendo f , temos:

$$f(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}.$$

Observe que f , bem como sua derivada $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, não está definida apenas em $x = 0$. Então, no intervalo $[1, 2]$, f é derivável e portanto contínua, logo podemos utilizar o TVM.

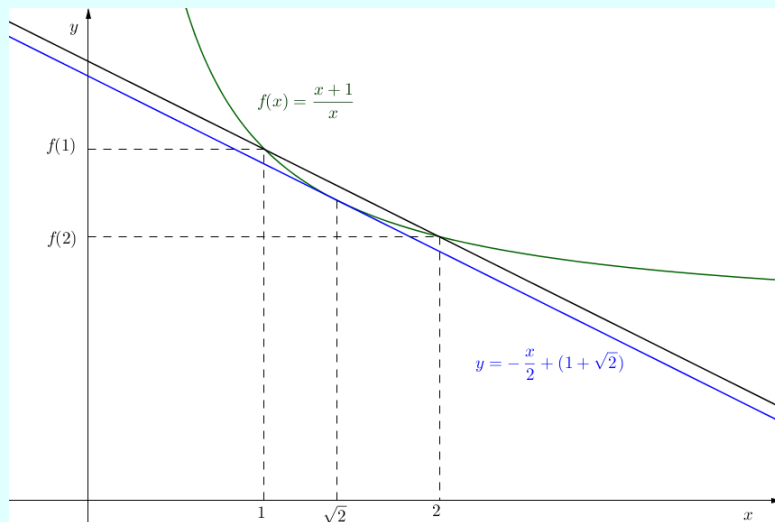
Desta forma,

$$\begin{aligned}
 \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} &= f'(c) \\
 \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(1 + \frac{1}{1}\right) &= -\frac{1}{c^2} \\
 -\frac{1}{2} &= -\frac{1}{c^2} \\
 c^2 &= 2 \\
 c &= \pm\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

Então, $c = \sqrt{2} \in (1, 2)$. Logo, a reta tangente no ponto $(c, f(c)) = (\sqrt{2}, f(\sqrt{2})) = (\sqrt{2}, \frac{2 + \sqrt{2}}{2})$ será dada por:

$$\begin{aligned}
 y - f(c) &= f'(c)(x - c) \\
 y - f(\sqrt{2}) &= f'(\sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \\
 y - \frac{2 + \sqrt{2}}{2} &= -\frac{1}{2}(x - \sqrt{2}) \\
 y &= -\frac{x}{2} + (1 + \sqrt{2}).
 \end{aligned}$$

Graficamente, temos:



- (d) Um ciclista começa uma corrida de 40 Km às 6 horas e termina 4 horas depois. Explique por que existem pelo menos dois instantes durante a corrida que a velocidade do ciclista é de 8 Km/h.

Dica: Aplique o TVM.

Solução: Seja a função posição $s(t)$ contínua no intervalo $[0, 4]$ e derivável no intervalo $(0, 4)$, temos que a velocidade média do ciclista é dada por:

$$\frac{s(4) - s(0)}{4 - 0} = \frac{40 - 0}{4 - 0} = 10.$$

Pelo TVM, existe algum instante $t \in (0, 4)$ tal que $s'(t) = 10$.

Considerando o intervalo $[0, t]$, $0 < t < 4$, tal que

$$\frac{s(t) - s(0)}{t - 0} = 8 \Rightarrow s(t) = 8t.$$

Pelo TVM existirá um instante $t = c$, tal que $s'(c) = 8$.

Analogamente, considerando o intervalo $[t, 4]$, tal que

$$\frac{s(4) - s(t)}{4 - t} = 8 \Rightarrow \frac{40 - s(t)}{4 - t} = 8 \Rightarrow s(t) = 8t + 8.$$

Logo, $s'(c) = 8$.

3.17

- (a) Descreva um procedimento para encontrar extremos relativos da função f usando apenas informações de f' .

dica: estude o teste da primeira derivada.

Solução: Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) , exceto possivelmente num ponto x_0 .

- (i) Se $f'(x) > 0$ para todo $x < x_0$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > x_0$, então x_0 é ponto de máximo de f .
- (ii) Se $f'(x) < 0$ para todo $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > x_0$, então x_0 é ponto de mínimo de f .

Aplique este procedimento as seguintes situações:

- (b) Encontre os extremos relativos de $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$;

Solução: A derivada será dada por:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - x^2(2x)}{(x^2 - 4)^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{8x}{(x^2 - 4)^2}.$$

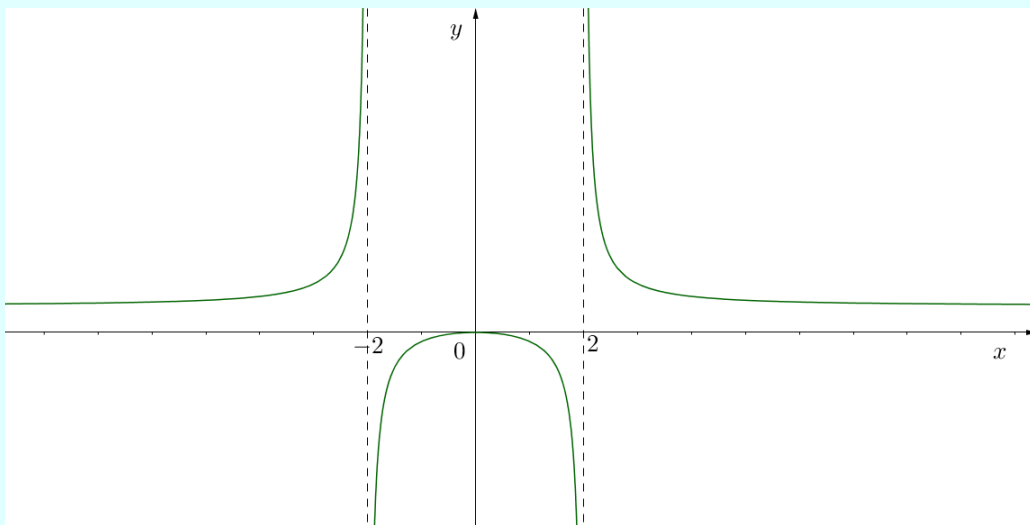
Fazendo $f'(x) = 0$, então:

$$-\frac{8x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Note que o denominador da expressão de f' é sempre positivo. Assim, para estudar o sinal de f' basta analisar seu numerador.

Então, para valores $x < 0$, temos $f'(x) > 0$. Para valores $x > 0$, temos $f'(x) < 0$.

Logo, $x = 0$ é valor de máximo relativo (Veja no gráfico).



(c) Resolva o seguinte problema:

Tossir força a traquéia a se contrair, o que afeta a velocidade “v” do ar que passa por ela. A velocidade do ar durante a tosse é

$$v = k(R - r)r^2 \quad 0 \leq r < R.$$

com k uma constante, R o raio normal da traquéia e r o raio durante a tosse. Qual o raio produzirá a velocidade máxima do ar?

Solução: Temos que:

$$v(r) = kRr^2 - kr^3.$$

Fazendo $v'(r) = 0$, temos:

$$2kRr - 3kr^2 = 0 \Rightarrow kr(2R - 3r) = 0.$$

Cujas soluções são $r = 0$ e $r = \frac{2R}{3}$.

Observe que para valores $0 < r < \frac{2R}{3}$, tem-se que $v' > 0$. Por outro lado, observe que para valores $r > \frac{2R}{3}$, tem-se que $v' < 0$. Logo, $r = \frac{2R}{3}$ é o raio que produzirá a velocidade máxima do ar.

3.18

- (a) Descreva um procedimento para encontrar extremos relativos da função f usando informações de f' e f'' .

dica: estude o teste da segunda derivada.

Solução. Supondo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e pelo menos de classe C^2 no aberto (a, b) . Encontre outros pontos críticos de f , isto é, $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. Outros, porque $\{a, b\}$ já são, devido a não diferenciabilidade de f nesses pontos. Porque a segunda derivada fornece informações sobre a concavidade do gráfico de f , no caso, se $f''(c) > 0$ tem-se *concavidade de f voltada para cima* na vizinhança de c e, se $f''(c) < 0$ tem-se *concavidade de f voltada para baixo* na vizinhança de c . Portanto, teremos um mínimo relativo ou um máximo relativo, para $f''(c) > 0$ ou $f''(c) < 0$ respectivamente.

- (b) Aplique (se possível) este procedimento para encontrar os extremos relativos de $f(x) = \sin(x) + x$ em $[0, 2\pi]$;

Solução. É claro que f é contínua em $[0, 2\pi]$, na verdade, f é de classe C^∞ , ou seja, possui todas as suas derivadas contínuas em $(0, 2\pi)$. Logo, podemos derivá-la pelo menos duas vezes em $(0, 2\pi)$. O ponto crítico é

$$f'(c) = \cos(c) + 1 = 0 \implies c = \pi.$$

Porém,

$$f''(\pi) = -\sin(\pi) = 0.$$

Ou seja, não sabemos dizer se $f(\pi)$ é mínimo ou máximo relativo.

- (c) Existem números de $[0, 2\pi]$ para os quais o procedimento acima não se aplica? Caso afirmativo, sem usar o gráfico de f e usando informações de f' , como você faria para verificar se o número é ou não extremo relativo de f ?

Solução. Sim, pela não derivabilidade de f em 0 e 2π , e pelo item anterior, nos elementos $\{0, \pi, 2\pi\}$ o procedimento não se aplica. Para contornar essa situação usamos que se $f' \geq 0$ temos que f é não-decrescente e se $f' \leq 0$ temos que f será não-crescente. Isto é, como

$$f'(x) = \cos(x) + 1 \geq 0, \quad \forall x \in [0, 2\pi],$$

porque

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \iff 0 = 1 - 1 \leq \cos(x) + 1.$$

Portanto, f é não-decrescente em todo intervalo, isto é, seu mínimo em $[0, 2\pi]$ será

$$0 = f(0) = \sin(0) + 0,$$

e seu máximo em $[0, 2\pi]$ será

$$2\pi = f(2\pi) = \sin(2\pi) + 2\pi.$$

3.19

(a) Defina assíntotas verticais, horizontais e oblíquas;

Solução:

Assíntota vertical: é uma reta, $x = a$, que possui pelo menos uma das propriedades:

1. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$
3. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$
4. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$

Assíntota horizontal: é uma reta, $y = a$, que possui pelo menos uma das propriedades:

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$

Assíntota oblíqua: é uma reta $y = ax + b$, onde $0 < |a| < \infty$. Em outras palavras, a reta $y = ax + b$ com a e b números reais, é assíntota oblíqua do gráfico de f se, e só se for verificada pelo menos uma das propriedades:

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

(b) Determine as assíntotas da função $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$.

Solução: O domínio de f :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 2\}$$

A reta $x = 2$ é um candidata a assíntota vertical de f .

Assíntota verticais:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[x + \frac{4}{x - 2} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[x + \frac{4}{x - 2} \right] = \infty\end{aligned}$$

Logo a reta $x = 2$ é assíntota vertical de f .

Assíntota horizontais:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x + \frac{4}{x - 2} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x + \frac{4}{x - 2} \right] = \infty\end{aligned}$$

A função f não possui assíntotas horizontais.

Assíntota oblíqua:

Partindo das propriedades

$$\begin{aligned}1. \quad & \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \\ 2. \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0\end{aligned}$$

iremos determinar a através de:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

então:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} \right)} = 1$$

de modo análogo

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Agora iremos calcular o valor de b através de:

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$$

então

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 4 - x^2 + 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x - 2} = 0$$

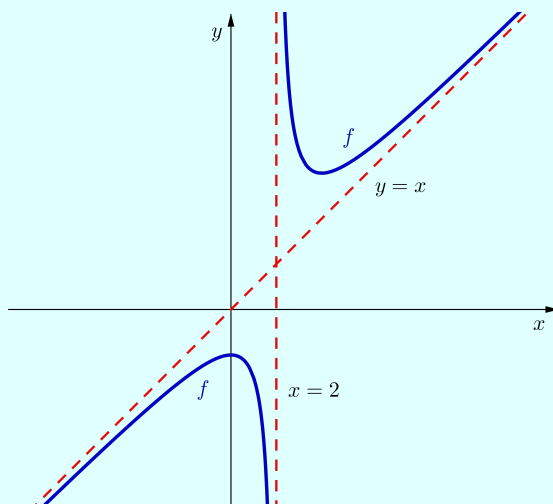
de modo análogo

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = 0.$$

Temos então a assíntota oblíqua

$$y = x.$$

Abaixo temos o gráfico de f , assim como as assíntotas encontradas.



3.20 Ache o comprimento e a largura de um retângulo que tem perímetro de 100 metros e área máxima.

Solução: Temos que o perímetro do retângulo de lados x e y é dado por:

$$2x + 2y = 100 \Rightarrow y = 50 - x.$$

A área $A = x \cdot y$ deverá ser maximizada, assim:

$$A(x) = x(50 - x) \Rightarrow A(x) = 50x - x^2.$$

Fazendo $A' = 0$, temos:

$$A'(x) = 50 - 2x = 0 \Rightarrow x = 25 \Rightarrow y = 25.$$

Logo, como $A'' = -2 < 0$ temos que $x = 25$ fornece ponto de mínimo, isto é, o comprimento e a largura do retângulo deverão medir 25 m cada.

3.21

- (a) Dê exemplo de uma função cujo gráfico tem assíntota vertical em $x = 4$ e assíntota oblíqua em $y = x + 1$.

Solução: Como $x = 4$ é uma assíntota vertical, devemos ter uma função racional $f(x)$, cujo numerador é uma função $g(x)$ e o denominador é o termo $(x - 4)$, isto é,

$$f(x) = \frac{g(x)}{x - 4} \quad (15)$$

tal que:

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{g(x)}{x - 4} = \infty. \quad (16)$$

Como $y = x + 1$ é assíntota oblíqua, devemos ter:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0 \quad (17)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1. \quad (18)$$

Observe que:

$$f(x) - (x + 1) = \frac{g(x)}{x - 4} - (x + 1) = \frac{g(x) - x^2 + 3x - 1}{x - 4}$$

e substituindo este resultado em (17), temos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{g(x) - x^2 + 3x - 1}^{=0}}{x - 4} = 0. \quad (19)$$

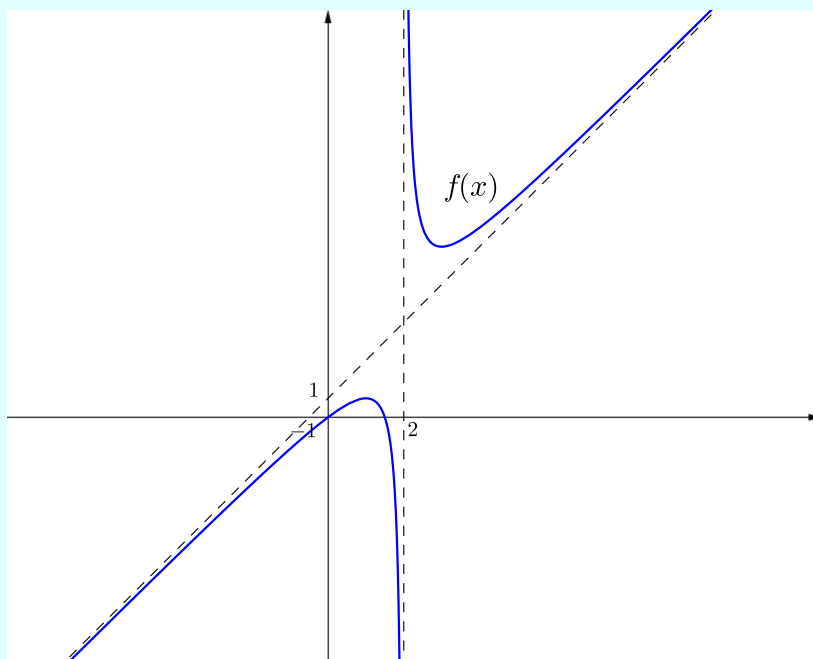
Note que este limite é verdadeiro quando tomamos $g(x) - x^2 + 3x = 0 \Rightarrow g(x) = x^2 - 3x$. E isto satisfaz (16) e (18). De fato, temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{g(x)}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x}{x - 4} \\ &= \infty\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^2 - 4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{3}{x}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x}\right)} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Logo, $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 4}$ é a função procurada, cujo gráfico é



(b) Na resolução do limite abaixo, a regra de L'Hospital foi incorretamente usada. Descreva o erro:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \cos(\pi x)}{1} = \pi.$$

Solução: Note que o limite dado não apresenta indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, logo está incorreto usar a regra de L'Hospital. De fato, calculando os limites laterais, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(\pi x) - 1}{x} = \infty$$

pois, quando x tende a 0 por valores negativos, $\sin(\pi x) - 1$ tende a -1 .

Analogamente, quando x tende a 0 por valores positivos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\pi x) - 1}{x} = -\infty$$

isto é, o limite não existe.

Para as questões **3.22** e **3.23**, considere a seguinte função

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}.$$

3.22 Faça a seguinte análise:

Solução:

- domínio de f :

Observe que a função está definida para $x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$. Logo, $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 2\}$.

- pontos de intersecção como o eixo x :

Temos

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x^3}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Logo, $(0, 0)$ é o ponto de intersecção com o eixo x .

- pontos de intersecção com o eixo y :

Temos

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{0^3}{0^2 - 4} = 0.$$

Logo, $(0, 0)$ é o ponto de intersecção com o eixo y .

- primeira derivada f' :

Calculamos utilizando a regra do quociente e obtemos:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 4) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 4)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2}.$$

- segunda derivada f'' :

Derivando novamente, obtemos:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4x^3 - 24x)(x^2 - 4)^2 - 2(x^2 - 4)2x(x^4 - 12x^2)}{(x^2 - 4)^4} \\ &= \frac{(4x^3 - 24x)(x^2 - 4) - 4x(x^4 - 12x^2)}{(x^2 - 4)^3} \end{aligned}$$

Logo,

$$f''(x) = \frac{8x^3 + 96x}{(x^2 - 4)^3}.$$

- assíntotas verticais:

Por inspeção, os candidatos a assíntotas verticais são $x = -2$ e $x = 2$. De fato, calculando os limites quando x tende a -2 e 2 , pela esquerda e pela direita, obtemos, respectivamente:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty.$$

- assíntotas horizontais:

As assíntotas horizontais serão dadas pelos limites no infinito de f , caso existam. Observe que

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} = \frac{x}{1 - \frac{4}{x^2}}.$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 - \frac{4}{x^2}} = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1 - \frac{4}{x^2}} = -\infty.$$

Como estes limites não existem, f não possui assíntotas horizontais.

- assíntotas oblíquas:

As assíntotas oblíquas serão obtidas utilizando

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0. \quad (20)$$

onde

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Assim, temos

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^3}{x(x^2 - 4)} = \frac{x^2}{x^2 - 4}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Analogamente, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

Assim, $m = 1$ para $x \rightarrow \pm\infty$. Vamos agora determinar n . De (20) temos:

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] \\ n &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3}{x^2 - 4} - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x^2 - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x \left(1 - \frac{4}{x^2} \right)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, para $x \rightarrow \pm\infty$, $y = x$ é assíntota.

• Limites no infinito:

$$(i) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1 - \frac{4}{x^2}} = -\infty.$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 - \frac{4}{x^2}} = +\infty.$$

- pontos críticos:

Temos

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2} = 0 \Rightarrow x^4 - 12x^2 = 0.$$

Fazendo $u = x^2$, segue que

$$u^2 - 12u = 0 \Rightarrow u(u - 12) = 0$$

cujas raízes $u = 0$ e $u = 12$ fornecem $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$.

Logo, os pontos críticos são $(0, f(0)) = (0, 0)$, $(-2\sqrt{3}, f(-2\sqrt{3})) = (-2\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$ e $(2\sqrt{3}, f(2\sqrt{3})) = (2\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$.

- pontos de inflexão:

Temos

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{8x^3 + 96x}{(x^2 - 4)^3} = 0 \Rightarrow 8x^3 + 96x = 0 \Rightarrow x(8x^2 + 96) = 0.$$

Note que a única raiz real que satisfaz esta última equação é $x = 0$. Além disso, para $x < 0$ tem-se $f'' < 0$, e, para $x > 0$ tem-se $f'' > 0$. Logo, $(0, f(0)) = (0, 0)$ é ponto de inflexão.

- intervalos da análise:

Crescimento/Decrescimento:

Note que $f'(x) > 0$ para $x < -2\sqrt{3}$ e para $x > 2\sqrt{3}$. Logo, f é crescente nos intervalos $(-\infty, -2\sqrt{3})$ e $(2\sqrt{3}, +\infty)$.

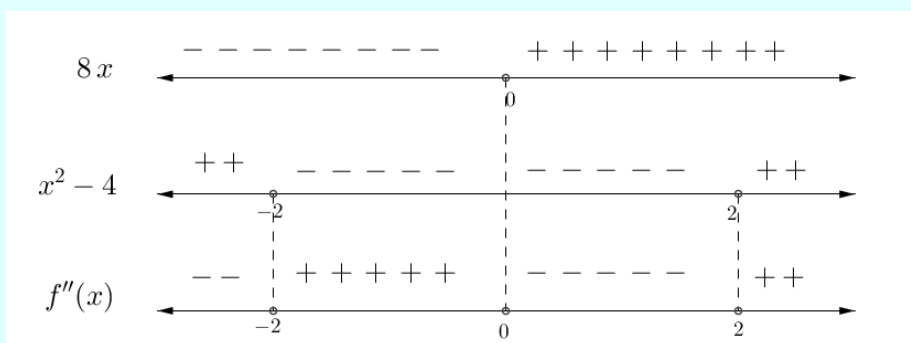
Por outro lado, $f'(x) < 0$ para $-2\sqrt{3} < x < -2$ ou $-2 < x < 2$ ou $2 < x < \sqrt{3}$. Logo, f é decrescente no intervalo $(-2\sqrt{3}, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, 2\sqrt{3})$.

Concavidade:

Estudaremos o sinal da segunda derivada

$$f''(x) = \frac{8x^3 + 96x}{(x^2 - 4)^3} = \frac{8x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}.$$

Observe que os termos $8x$ e $x^2 - 4$ determinam o sinal de f'' , já que o termo $x^2 + 12$ é sempre positivo. Assim, temos



Então, $f''(x) > 0$ para $-2 < x < 0$ e $x > 2$. E $f''(x) < 0$ para $x < -2$ e $0 < x < 2$. Logo, f é côncava para cima nos intervalos $(-2, 0)$ e $(2, \infty)$. Analogamente, f é côncava para baixo nos intervalos $(-\infty, -2)$ e $(0, 2)$.

3.23

- (a) Faça um resumo da análise da questão 2 completando a seguinte tabela:

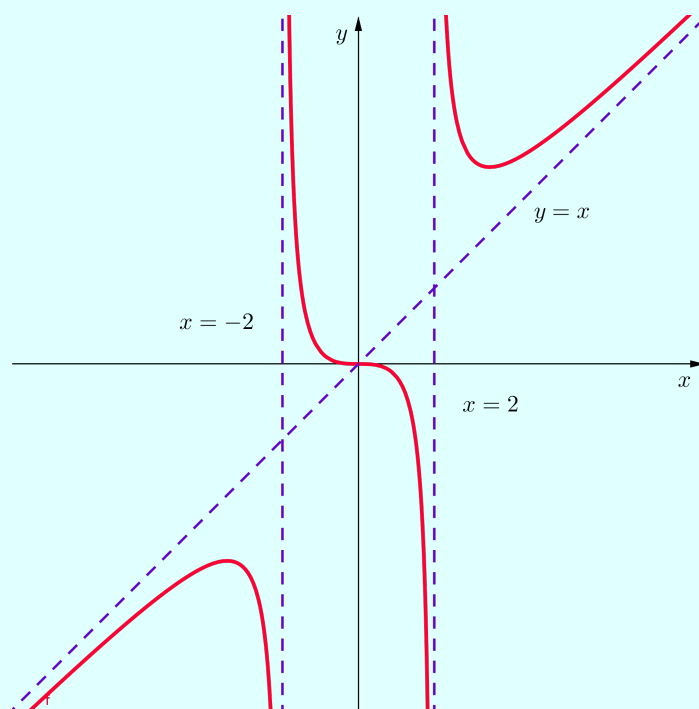
Solução:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	propriedades do gráfico
$(-\infty, -2)$	< 0	> 0	> 0	abaixo do eixo x , crescente e côncava para cima
$(-2, 0] \cup [0, 2)$	> 0 ou < 0	< 0	$> 0, = 0$ ou < 0	acima do eixo x ou abaixo do eixo x , decrescente, côncava para cima ou côncava para baixo
$(2, \infty)$	> 0	> 0	> 0	acima do eixo x , crescente e côncava para cima

- (b) Usando a tabela acima, faça um esboço do gráfico de f .

Solução:

Gráfico de f :



3.24

(a) Para a função $f(x) = x^4 - 12x^3 + 4x^2 - 64x$, faça a seguinte análise:

Solução:

1. domínio de f : Não há restrição no domínio de f , isto é, $D_f = \mathbb{R}$.

2. pontos de intersecção como o eixo x : Se

$$x^4 - 12x^3 + 4x^2 - 64x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ e } x \approx 12,106.$$

3. pontos de intersecção com o eixo y : Note que:

$$f(0) = 0.$$

4. primeira derivada f' : Temos

$$f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 8x - 64.$$

5. segunda derivada f'' : Temos

$$f''(x) = 12x^2 - 72x + 8.$$

6. assíntotas verticais: Funções polinomiais não possuem assíntotas verticais.

7. assíntotas horizontais: A função não é limitada nem inferiormente nem superiormente, logo não possui assíntotas horizontais.

8. assíntotas oblíquas: Note que

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 - \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{64}{x^3} \right) = \infty \cdot 1 = \infty.$$

Disso e da relação

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0,$$

temos que não existe assíntotas oblíquas.

9. Limites no infinito:

$$(a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(1 - \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{64}{x^3} \right) = \infty \cdot 1 = \infty.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(1 - \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{64}{x^3} \right) = \infty \cdot 1 = \infty.$$

10. pontos críticos: Fazendo

$$0 = f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 8x - 64 \Rightarrow x \approx 8,976.$$

Temos o único ponto crítico.

11. pontos de inflexão: Temos

$$0 = f''(x) = 12x^2 - 72x + 8 \Rightarrow x \approx 0,113 \text{ e } x \approx 5,887.$$

Portanto, não existe pontos de inflexão para f .

12. intervalos de teste: Chamando $c = 8,976$

$$(-\infty, c]$$

e,

$$[c, \infty)$$

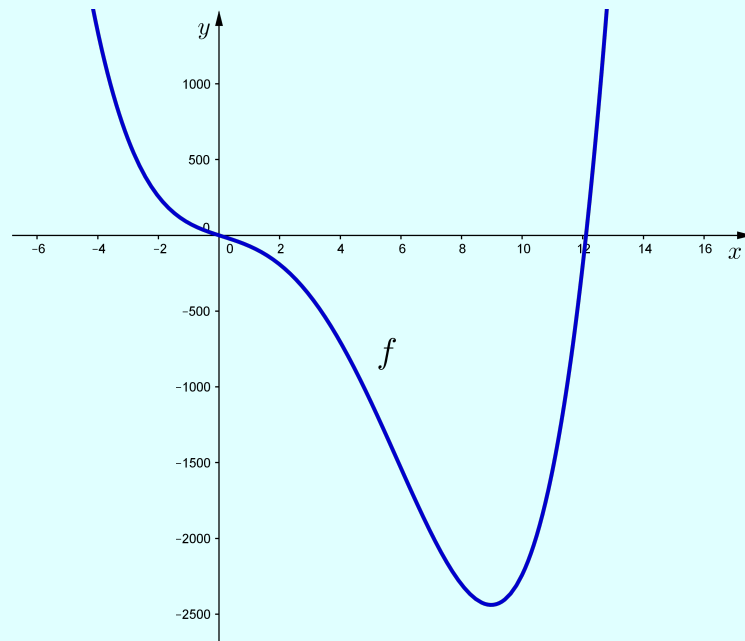
(b) Faça um resumo da análise do item (a) completando a seguinte tabela:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	propriedades do gráfico
$(-\infty, c)$	> 0 ou < 0	< 0	> 0 ou < 0	positiva ou negativa
c	$\approx$	$= 0$	> 0	côncava para cima
(c, ∞)	< 0 ou > 0	> 0	> 0	côncava para cima

(c) Usando a tabela do item (b), faça um esboço do gráfico de f .

Solução:

Gráfico de f :



3.25 Determine a derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = \ln(\sec(x) + \operatorname{tg}(x))$;

Solução: Observe que $f(x) = \ln(u(x))$ com $u(x) = \sec(x) + \operatorname{tg}(x)$, e pela regra da cadeia temos que

$$\frac{d}{dx} \ln(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}. \quad (21)$$

Assim, $u'(x) = \sec(x)\operatorname{tg}(x) + \sec^2(x)$ e

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sec(x)\operatorname{tg}(x) + \sec^2(x)}{\sec(x) + \operatorname{tg}(x)} \\ &= \frac{\sec(x)(\operatorname{tg}(x) + \sec(x))}{\sec(x) + \operatorname{tg}(x)} \\ &= \sec(x). \end{aligned}$$

(b) $f(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x))$;

Solução: Aplicando a derivada do produto, obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x(\sin(x) + \cos(x)) + e^x(\cos(x) - \sin(x)) \\ &= \cancel{e^x \sin(x)} + e^x \cos(x) + e^x \cos(x) - \cancel{e^x \sin(x)} \\ &= 2e^x \cos(x) \end{aligned}$$

$$(c) \ f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right);$$

Solução: Podemos escrever a função f como

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(e^x) - \ln(1+e^x) \\ &= x - \ln(1+e^x) \end{aligned}$$

Aplicando a regra da derivada da soma e a fórmula (21), obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{e^x}{1+e^x} \\ &= \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} \\ &= \frac{1}{1+e^x} \end{aligned}$$

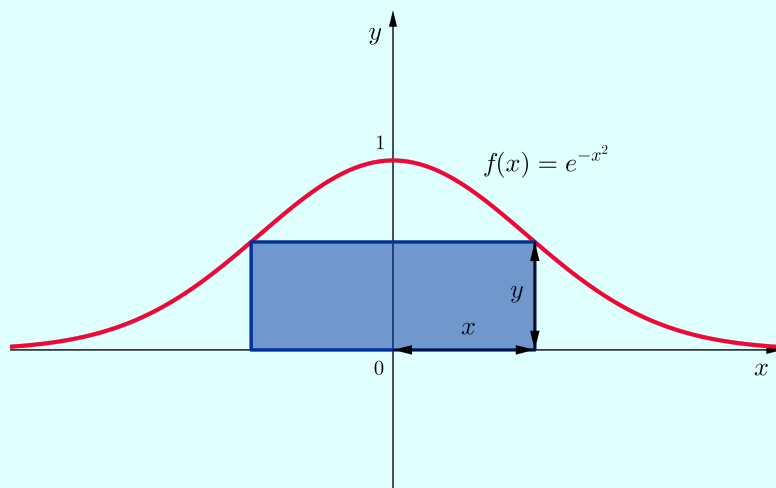
$$(d) \ f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}.$$

Solução: Aplicando a regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} (e^{2x} + e^{-2x})^{-1/2} (e^{2x} + e^{-2x})' \\ &= \frac{2(e^{2x} - e^{-2x})}{2\sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}} \\ &= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}} \end{aligned}$$

3.26 Calcule a área do maior retângulo que pode ser inscrito sob a curva $f(x) = e^{-x^2}$, no primeiro e segundo quadrantes.

Solução: Queremos determinar a área do maior retângulo que pode ser inscrito abaixo da curva f e acima do eixo das abscissas, como indicado na figura abaixo.



O retângulo possui altura $h = y$ e base $b = 2x$, logo sua área é dada por $A = bh$, ou expressa em função de x

$$A(x) = 2xy = 2xe^{-x^2}.$$

Queremos determinar o valor de x tal que $A(x)$ é máxima. Para isso, usaremos o teste da 1ª derivada:

$$A'(x) = 2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}(2 - 4x^2).$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x^2}(2 - 4x^2) = 0.$$

Como a função $f(x) = e^{-x^2}$ é estritamente positiva temos que

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo, os pontos críticos são $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. Vamos analisar o sinal da derivada:

x	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$	$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$
e^{-x^2}	+	+	+
$2 - 4x^2$	-	+	-
$f'(x)$	-	+	-

Portanto, f' muda do sinal positivo para o sinal negativo em $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, logo, esse ponto é ponto de máximo da função $A(x)$. Deste modo, a área máxima é dada por

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \Rightarrow \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}.$$

3.27 Considere a função $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

- (a) Encontre, se possível, os pontos extremos de f ;

Solução: Derivando temos $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Fazendo $f'(x) = 0$, obtemos

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \Rightarrow e^x = e^{-x} \Rightarrow e^{2x} = 1 \Rightarrow e^{2x} = e^0 \Rightarrow x = 0.$$

Portanto, $x = 0$ é ponto crítico de f . Agora, observe que

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(e^x - \frac{1}{e^x} \right)$$

e logo, para $x < 0$ tem-se $f'(x) < 0$ e para $x > 0$ tem-se $f'(x) > 0$. Assim, f' muda do sinal negativo para o sinal positivo em $x = 0$. Aplicando o teste da 1ª derivada concluímos que $x = 0$ é ponto de mínimo. E o valor mínimo é dado por $f(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

- (b) Encontre, se possível, os pontos de inflexão de f ;

Solução: A segunda derivada é dada por

$$f''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left(e^x + \frac{1}{e^x} \right).$$

Note que $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, logo, pelo Teorema da concavidade, f tem concavidade para cima em $\mathbb{R}$, e portanto, não possui pontos de inflexão.

3.28 Considere a função $f(x) = \log_{10} x$.

- (a) Qual o domínio de f ?

Solução: Note que f está definida para $x > 0$, isto é, possui domínio $(0, \infty)$.

- (b) Encontre f^{-1} ;

Solução: A inversa de f é a função g tal que $f \circ g = g \circ f = Id$, com Id a função identidade. Assim, g é a inversa de f se $f(g(x)) = g(f(x)) = x$. Usaremos a notação $g = f^{-1}$.

Pelas propriedades de logaritmo e de exponencial sabemos que

$$\log_{10} 10^x = x \quad \text{e} \quad 10^{\log_{10} x} = x.$$

Logo, $f^{-1}(x) = 10^x$. Note que, temos a seguinte equivalência

$$y = \log_{10} x \Leftrightarrow 10^y = x.$$

- (c) Dados $f(x_1) = 3n$ e $f(x_2) = n$, calcule $\frac{x_1}{x_2}$;

Solução: Temos

$$f(x_1) = 3n \Rightarrow \log_{10} x_1 = 3n \Leftrightarrow x_1 = 10^{3n}$$

$$f(x_2) = n \Rightarrow \log_{10} x_2 = n \Leftrightarrow x_2 = 10^n.$$

Logo,

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{10^{3n}}{10^n} = 10^{2n}.$$

- (d) Encontre o intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que $f(x) < 0, \forall x \in I$.

Solução: Se $y = \log_{10} x < 0$ temos $10^y < 10^0$, pois 10^x é uma função crescente. Assim,

$$10^y < 10^0 \Rightarrow 10^{\log_{10} x} < 1 \Rightarrow x < 1.$$

Logo, para $0 < x < 1$ temos que $y = \log_{10} x < 0$. O intervalo procurado é $(0, 1)$.

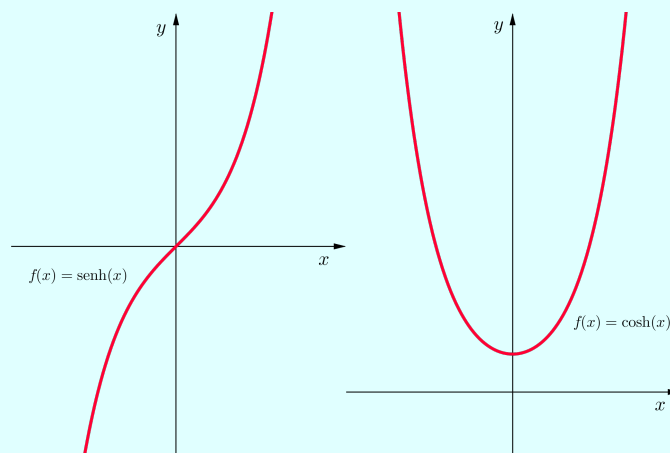
3.29

- (a) Defina as funções $\sinh(x)$ e $\cosh(x)$;

Solução: As funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico, são definidas, respectivamente, por:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Abaixo temos os gráficos das funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico respectivamente.



- (b) Verifique a identidade $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$;

Solução:

$$\begin{aligned}\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\&= \left(\frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4}\right) - \left(\frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4}\right) \\&= \left(\frac{\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}} - \cancel{e^{2x}} + 2 - \cancel{e^{-2x}}}{4}\right) \\&= 1\end{aligned}$$

- (c) Mostre que: $\frac{d}{dx}(\sinh(x)) = \cosh(x)$ e $\frac{d}{dx}(\cosh(x)) = \sinh(x)$;

Solução:

Derivada da função seno hiperbólico

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sinh(x)) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \\&= \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} \\&= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\&= \cosh(x).\end{aligned}$$

Derivada da função cosseno hiperbólico

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\cosh(x)) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \\&= \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} \\&= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\&= \sinh(x).\end{aligned}$$

- (d) Verifique que a função $y = a \sinh(x)$ satisfaz a equação diferencial $y''' - y' = 0$.

Solução: Derivando a função y obtemos

$$y' = a \cosh(x);$$

$$y'' = a \sinh(x);$$

$$y''' = a \cosh(x).$$

Substituindo as derivadas de primeira ordem e terceira ordem na equação diferencial

$$y''' - y' = a \cosh(x) - a \cosh(x) = 0.$$

De fato a função y satisfaz a equação diferencial.

3.30

- (a) Seja $y^x = x^y$. Calcule y' ;

Solução: Temos que

$$\begin{aligned} y^x &= x^y \\ \ln y^x &= \ln x^y \\ x \ln y &= y \ln x. \end{aligned}$$

Derivando implicitamente,

$$\begin{aligned} \ln y + x \frac{1}{y} y' &= y' \ln x + y \frac{1}{x} \\ \left(\frac{x}{y} - \ln x \right) y' &= \frac{y}{x} - \ln y \\ \left(\frac{x - y \ln x}{y} \right) y' &= \frac{y - x \ln y}{x} \\ y' &= \frac{y}{x} \left(\frac{y - x \ln y}{x - y \ln x} \right) \end{aligned}$$

- (b) Encontre o coeficiente angular da reta tangente à curva $y^x = x^y$ nos pontos (a, a) e $(2, 4)$;

Solução: No ponto (a, a) , o coeficiente angular da reta tangente é

$$y'(a) = \frac{a}{a} \left(\frac{a - a \ln a}{a - a \ln a} \right) = 1.$$

Analogamente, no ponto $(2, 4)$,

$$y'(2) = \frac{4}{2} \left(\frac{4 - 2 \ln 4}{2 - 4 \ln 2} \right) \approx -3,18.$$

- (c) Em qual ponto do gráfico de $y^x = x^y$ a reta tangente não existe? Explique.

Solução: A reta tangente do gráfico de $y^x = x^y$ não existe se

$$x^2 - yx \ln x = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2}{x \ln x} = \frac{x}{\ln x}.$$

Logo, a derivada não existe em todos os pontos $\left(x, \frac{x}{\ln x}\right)$.

3.31 Um lago tem 500 peixes e sua população cresce de acordo com a função logística

$$p(t) = \frac{10.000}{1 + 19 e^{-t/5}}$$

com t medido em meses.

(a) Qual o tamanho limite para a população de peixes?

Solução: Para determinarmos a população limite de peixes calcularemos o limite da função logística quando t tende para o infinito, ou seja, $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)$. Assim, aplicando as propriedades de limites obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{10.000}{1 + 19 e^{-t/5}} = \frac{10.000}{1 + 19 \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t/5}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} 10.000 = 10.000.\end{aligned}$$

Logo o tamanho limite para a população de peixes é de 10.000.

(b) A que taxa a população de peixes está variando no final do primeiro mês?

Solução: Para determinarmos a taxa de variação de peixes em função do tempo (em meses) derivamos a função logística em função de t . Assim, aplicando a regra do quociente e a regra da cadeia obtemos

$$\begin{aligned}p'(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{10.000}{1 + 19 e^{-t/5}} \right) \\ &= -\frac{10.000(1 + 19 e^{-t/5})'}{(1 + 19 e^{-t/5})^2} \\ &= -\frac{10.000}{(1 + 19 e^{-t/5})^2} (19 e^{-t/5}) \left(-\frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{38.000 e^{-t/5}}{(1 + 19 e^{-t/5})^2}.\end{aligned}$$

A taxa que a população de peixes está variando no final do primeiro mês, ou seja, $t = 1$ é

$$p'(1) = \frac{38.000 e^{-1/5}}{(1 + 19 e^{-1/5})^2} = \frac{38.000 e^{-0,2}}{(1 + 19 e^{-0,2})^2} \approx 113,51.$$

Portanto no final do primeiro mês a população de peixes está variando a uma taxa de aproximadamente 113 peixes/mês.

(c) A que taxa a população de peixes está variando no final de 10 meses?

Solução: A taxa que a população de peixes está variando no final do décimo mês, ou seja, $t = 10$ é

$$p'(10) = \frac{38.000 e^{-10/5}}{(1 + 19 e^{-10/5})^2} = \frac{38.000 e^{-2}}{(1 + 19 e^{-2})^2} \approx 403,20.$$

Portanto no final do décimo mês a população de peixes está variando a uma taxa de aproximadamente 403 peixes/mês.

(d) Depois de quantos meses a população cresce mais rapidamente?

Solução: Para determinarmos depois de quantos meses a população de peixes cresce mais rapidamente devemos calcular o t para qual $p'(t)$ atinge seu valor máximo. Para isso, devemos calcular $p''(t)$. Assim,

$$\begin{aligned} p''(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{38.000 e^{-t/5}}{(1 + 19 e^{-t/5})^2} \right) \\ &= \frac{38.000 e^{-t/5} \left(-\frac{1}{5}\right) (1 + 19 e^{-t/5})^2 - 38.000 e^{-t/5} \cdot 2(1 + 19 e^{-t/5}) \cdot 19 e^{-t/5} \left(-\frac{1}{5}\right)}{((1 + 19 e^{-t/5})^2)^2} \\ &= \frac{-7.600 e^{-t/5} (1 + 19 e^{-t/5}) [(1 + 19 e^{-t/5}) - 38 e^{-t/5}]}{(1 + 19 e^{-t/5})^4} \\ &= \frac{-7.600 e^{-t/5} (1 - 19 e^{-t/5})}{(1 + 19 e^{-t/5})^3} \\ &= \frac{7.600 e^{-t/5} (19 e^{-t/5} - 1)}{(1 + 19 e^{-t/5})^3} \end{aligned}$$

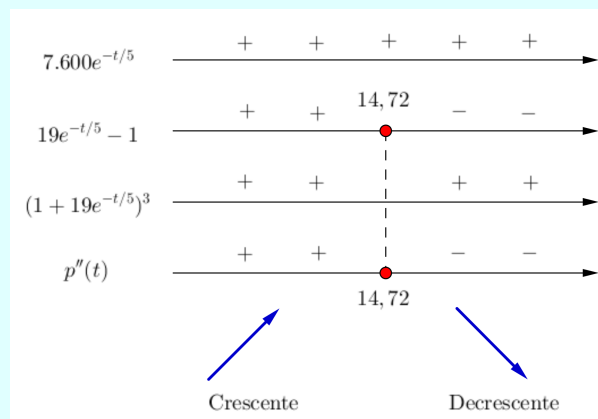
Fazendo $p''(t) = 0$ para encontrarmos os pontos críticos da função derivada $p'(t)$, tem-se

$$0 = \frac{7.600 e^{-t/5} (19 e^{-t/5} - 1)}{(1 + 19 e^{-t/5})^3}$$

O produto $7.600 e^{-t/5} (19 e^{-t/5} - 1)$ é nulo se e somente se uma das parcelas for nula. Logo, $19 e^{-t/5} - 1 = 0$, o que implica

$$\begin{aligned} e^{-t/5} &= \frac{1}{19} \\ \ln(e^{-t/5}) &= \ln\left(\frac{1}{19}\right) \\ -\frac{t}{5} \ln(e) &= -\ln(19) \\ t &= 5 \ln(19) \\ t &\approx 14,72. \end{aligned}$$

Vamos verificar se ponto crítico $t \approx 14,72$ é ponto de máximo de $p'(t)$. Para isso, analisaremos o sinal da segunda derivada:



Portanto, $p''(t)$ muda do sinal positivo para o negativo em $t = 14,72$, logo, esse ponto é o ponto de máximo de $p'(t)$. Então, a população de peixes cresce mais rapidamente em $t = 14,72$, ou seja, após 14 meses.

A taxa máxima será

$$p'(14,72) = \frac{38.000 e^{-14,72/5}}{(1 + 19 e^{-14,72/5})^2} = 4.998,9 \approx 5.000 \text{ peixes.}$$

Integrais

Plano

Tópicos	57
Métodos e Técnicas	58
Enunciados	59
Sugestões	61
Respostas	62

Tópicos abordados nos exercícios

- Mudança de variável na integral;
- Teorema Fundamental do Cálculo;
- Integração por partes;

Conteúdos essenciais para a resolução dos exercícios

- Funções e suas propriedades;
 - Regras de Derivação;
 - Primitivação;
-

Métodos e Técnicas

Mudança de variável

- Nas questões citadas efetua-se a mudança de variável para resolver a integral dada:

Exercícios 4.12 ; 4.14 ; 4.16

Integração por Partes

- Nas questões citadas efetua-se a integração por partes para resolver a integral dada:

Exercícios 4.13 ; 4.15

Teorema Fundamental do Cálculo

- Nas questões citadas utiliza-se o Teorema Fundamental do Cálculo e suas propriedades para o cálculo de integrais definidas:

Exercícios 4.8 ; 4.9 (a) ; 4.10 (c) ; 4.11 (c)

4.17; 4.18 (a) (c); 4.21 (b)

Enunciado dos Exercícios

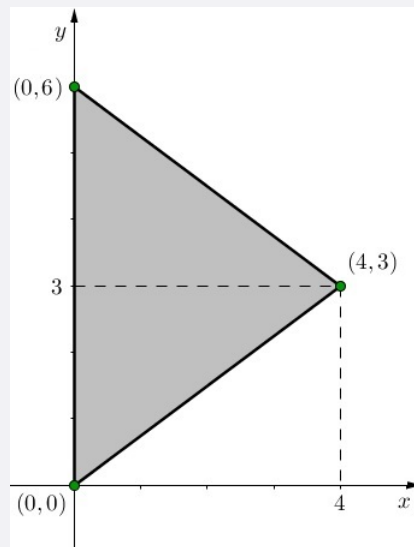
Nos exercícios 4.1 até 4.3, decida (escreva a sua resposta) se o problema pode ser resolvido com seus conhecimentos do ensino médio (vamos chamar de pré-cálculo) ou se são necessários conhecimentos de Cálculo. Se o problema pode ser resolvido com pré-cálculo, resolva-o. Se lhe parece que o problema requer o Cálculo, explique seu raciocínio e use uma abordagem numérica e/ou gráfica para fazer uma boa estimativa da solução.

• • • •

4.1 Um objeto se desloca com velocidade de $v(t) = 10,5t^2$ metros por segundo. Calcule a distância percorrida por este objeto em 4 segundos.

• • • •

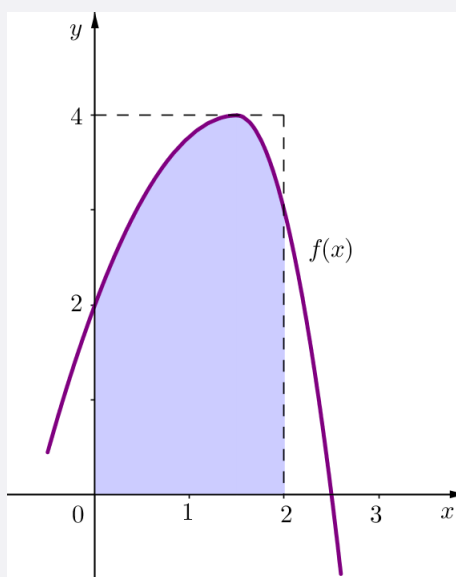
4.2 Encontre a área da região sombreada da figura abaixo:



• • • •

4.3 Encontre a área da região sombreada da figura abaixo:

• • • •



4.4 Considere a região do plano limitada pelo gráfico da função $f(x) = 1 - x^2$ e os eixos x e y , para $0 \leq x \leq 1$.

- (a) Faça um desenho da região.
- (b) Divida o intervalo $[0, 1]$ em n subintervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ de comprimentos iguais $\Delta x = x_i - x_{i-1} = 1/n$. Note que $x_i = i/n$ para $1 \leq i \leq n$. Mostre que a soma de Riemann $S(n) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$ é dada por

$$S(n) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} - \frac{i^2}{n^3} \right).$$

- (c) Completa a tabela abaixo e desenha $S(n)$ para $n = 5$.

n	5	10	50	100
$S(n)$				

(d) Usando os resultados do item (b), mostre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = \frac{2}{3}.$$

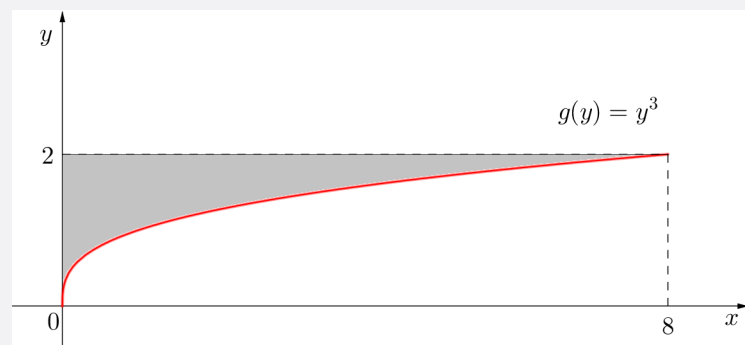
dica: $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

Observe que $\int_0^1 1 - x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S(n)$

• • • •

4.5

(a) Escreva a integral definida que representa a área da região dada abaixo (não calcule a integral):



(b) Esboce a região cuja área é dada pela integral

$$\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx, \quad r > 0.$$

Use uma fórmula conhecida para calcular a área.

• • • •

4.6 Usando a definição de integral definida, verifique que

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

• • • • ○

4.7

- (a) Determine se a função $f(x) = \frac{1}{x-4}$ é integrável no intervalo $[3, 5]$. Explique seu raciocínio.
- (b) Encontre as constantes **a** e **b** que maximizam o valor de $\int_a^b (1 - x^2) dx$. Explique seu raciocínio.

• • • • ○

4.8

- (a) Enuncie as duas formas do Teorema Fundamental do Cálculo. Destaque as hipóteses e os resultados do teorema.
- (b) Explique como o Teorema fundamental do Cálculo (nas duas formas), relaciona os conceitos de derivada e integral.

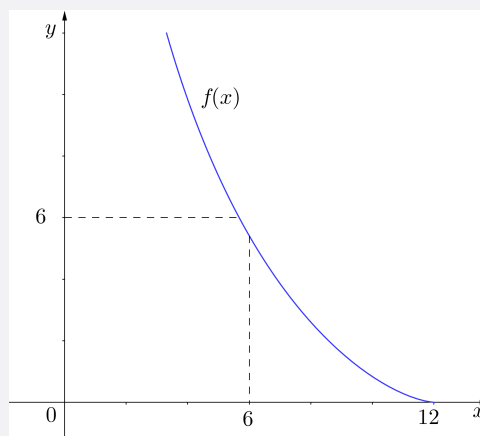
• • • • ○

4.9

- (a) Calcule $F'(x)$ para $F(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{t} dt$.
- (b) Uma pessoa andando ao longo de uma doca, puxa um barco por uma corda de 12 metros. O barco percorre um caminho conhecido como *Tractrix* (veja figura). A equação do caminho é

$$f(x) = 12 \ln \left(\frac{12 + \sqrt{144 - x^2}}{x} \right) - \sqrt{144 - x^2}.$$

Qual a inclinação desse caminho quando $x = 6$?



• • ○ ○

4.10 Dada a função exponencial $f(x) = a^x$.

- (a) Verifique que $f(u + v) = f(u) \cdot f(v)$ e $f(2x) = (f(x))^2$;
- (b) Calcule o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 2)$;
- (c) Calcule a área da região limitada pelo gráfico de f , as retas $x = 0$ e $x = 1$ e o eixo x .

• • ○ ○

4.11

- (a) Verifique $\sinh(u + v) = \sinh(u) \cosh(v) + \cosh(u) \sinh(v)$;
- (b) Encontre o coeficiente angular da reta tangente à curva $y = \ln(\cosh(x))$ no ponto $(1, \ln(\cosh(1)))$;
- (c) Calcule a área da região limitada pelo gráfico de $y = \sinh(2x)$, as retas $x = 0$ e $x = 1$ e o eixo x .

• • ○ ○

4.12

- (a) Em que regra é baseada a técnica de integração por substituição?
- (b) Descreva a técnica de integração por substituição;
- (c) Para calcular $\int_{-1}^1 x^2 dx$ é adequado substituir $u = x^2$, $x = \sqrt{u}$, $dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$ e obter $\frac{1}{2} \int_1^1 \sqrt{u} du = 0$? Explique.

• • ○ ○

4.13

- (a) Em que regra de derivação é baseada a técnica de integração por partes?
- (b) Descreva a técnica de integração por partes;

Diga se você usaria integração por partes para calcular as integrais abaixo. Se for o caso, identifique u e dv e justifique a sua decisão.

(c) $\int x^2 e^{2x} dx$

(d) $\int 2x e^{x^2} dx$

Calcule as integrais abaixo usando:

4.14 Integração por substituição. **4.15** Integração por partes.

(a) $\int \frac{(\ln(x))^2}{x} dx$

(b) $\int 2x^3 \cos(x^2) dx$

(c) $\int x\sqrt{4-x} dx$

(d) $\int e^{\sqrt{2x}} dx$

(e) $\int \cos(\ln(x)) dx$

(f) $\int \ln(x^2 + 1) dx$

4.16 Enuncie a substituição que você faria se fosse usar uma substituição trigonométrica se a integral tivesse no integrando um radical do tipo dado abaixo, com $a > 0$. Explique seu raciocínio.

(a) $\sqrt{a^2 - x^2}$;

(b) $\sqrt{a^2 + x^2}$;

(c) $\sqrt{x^2 - a^2}$.

• • • • ○

4.17 Considere a integral $\int_0^2 2\pi x^2 dx$.

- (a) Esboce a região cuja a área é dada pela integral;
- (b) Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral se o método das cascas for usado;
- (c) Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral se o método dos discos for usado;

Obs: os sólidos não são únicos.

• • • • ○

4.18 Calcule as seguintes integrais:

(a) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(3\theta) \cos(\theta) d\theta$

(b) $\int e^{2x} \sqrt{1 - e^{2x}} dx$

(c) $\int \frac{x^3}{(x^2 - 4)^2} dx$

(d) $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^3} dx$

• • • • •

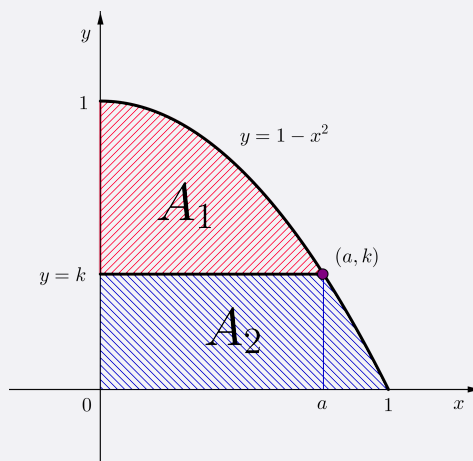
4.19

- (a) Mostre que a área da região limitada pela elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

com $a > 0$ e $b > 0$ é $\pi a b$.

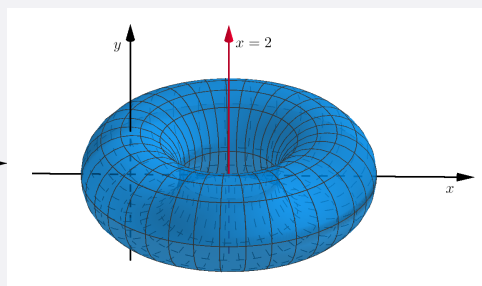
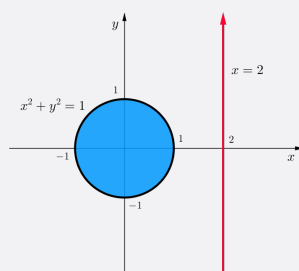
- (b) Considere $y = k$, com $k > 0$, a reta que intercepta o gráfico de $y = 1 - x^2$. Determine k de modo que a área das regiões sombreadas da figura abaixo, sejam iguais.



• • • •

4.20

- (a) Um toro é um sólido formado pela revolução da região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$ ao redor da reta $x = 2$.



Determine o volume deste sólido com formato de “rosqui-
nha”.

- (b) Considere a região do plano limitada pela elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

com $a > 0$ e $b > 0$. Calcule o volume do sólido formado pela revolução da elipse em torno do seu semi-eixo menor. Este sólido é chamado *Elipsóide*.

• • • •

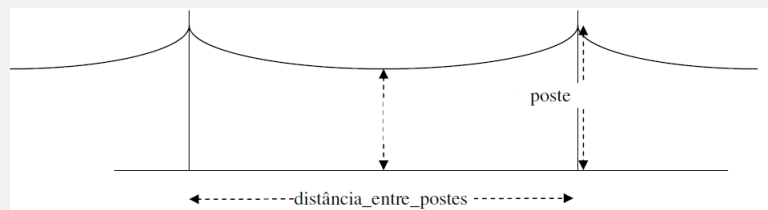
4.21

- (a) Defina curva retificável e faça um breve resumo das principais ideias e dos procedimentos usados para o desenvolvimento e obtenção da fórmula de integração para determinar o comprimento de arco.
- (b) Fios elétricos suspensos entre torres formam uma catenária (figura abaixo) que pode ser modelada pela equação

$$y = 20 \cosh\left(\frac{x}{20}\right),$$

$-20 \leq x \leq 20$, com x e y medidos em metros.

Se a distância entre as torres é de 40 metros, qual deve ser o comprimento do cabo?



• • • •

4.22

- (a) Faça um breve resumo das principais ideias e dos procedimentos usados para o desenvolvimento e obtenção da fórmula de integração para determinar a área de uma superfície de revolução.

- (b) Um galpão tem 100 metros de comprimento por 40 de largura (figura abaixo). Uma seção transversal do seu telhado tem a forma de uma catenária invertida

$$y = 31 - 10(e^{x/20} + e^{-x/20}).$$

Calcule quantos metros quadrados tem o telhado deste galpão.



Sugestões

4.1 Use retângulos de mesma base para “exaurir” a área limitada pelo gráfico e pelo eixo horizontal no intervalo $[0, 4]$, e, assim obter uma boa aproximação.

4.2 Utilize a fórmula da área do triângulo.

4.3 Análoga à questão **4.1**.

4.4 Esboce o gráfico. Use diretamente a definição de soma de Riemann dada.

4.5 Lembre-se que $x^2 + y^2 = r^2$ é a equação do círculo de raio r com centro na origem.

4.6 Use: $\sum_{i=1}^n 1 = n$, $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4.7 Interprete a integral dada como a área da região limitada pelo gráfico de $f(x) = 1 - x^2$ e as retas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$.

4.8 Estude as duas versões do Teorema Fundamental do Cálculo.

4.9 Use o Teorema Fundamental do Cálculo no primeiro item. Para o segundo item, lembre-se que a inclinação do caminho no ponto é obtida calculando a derivada neste ponto.

4.10 Lembre-se das propriedades de potência.

4.11 Comece pelo segundo membro da equação.

4.12 Estude a técnica de integração por substituição.

4.13 Estude a técnica de integração por partes.

4.14 Comece usando integração por substituição.

4.15 Comece usando integração por partes.

4.16 Coloque a^2 em evidência e compare a expressão de dentro da raiz com as identidades trigonométricas:

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2, \quad \sec^2 = 1 + \tan^2 \theta.$$

4.17 Para o volume, use, respectivamente, o método das cascas cilíndricas e o método dos discos.

4.18 Lembre-se que:

$$\sin(A) \cos(B) = \frac{1}{2}[\sin(A - B) + \sin(A + B)].$$

4.19 Isole y em termos de x e calcule a área usando a simetria da elipse.

4.20 Use, respectivamente, o método das cascas cilíndricas e o método dos discos.

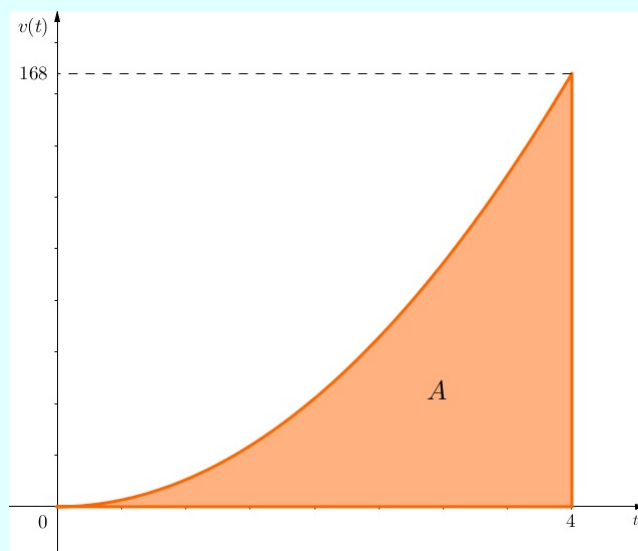
4.21 Estude o comprimento de arco e suas aplicações.

4.22 Estude a área de superfície de revolução.

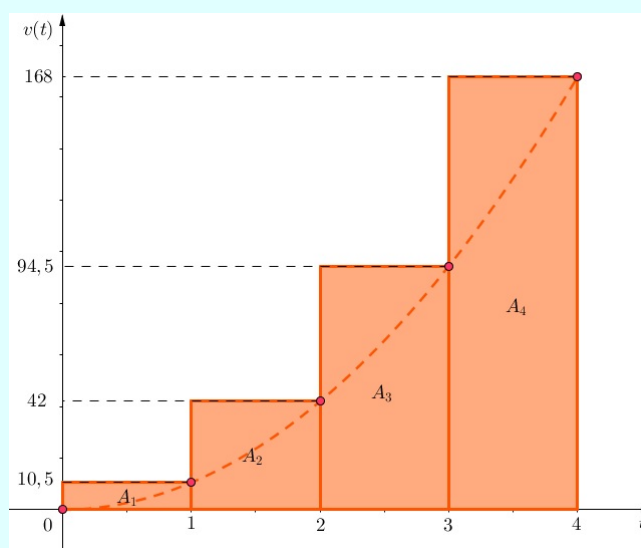
Respostas

4.1 Um objeto se desloca com velocidade de $v(t) = 10,5t^2$ metros por segundo. Calcule a distância percorrida por este objeto em 4 segundos.

Solução: Cálculo, pois a velocidade não é constante. Devemos calcular a área da região limitada pelo gráfico da função $v(t)$, pela reta $x = 4$ e o eixo x , como mostra a figura:

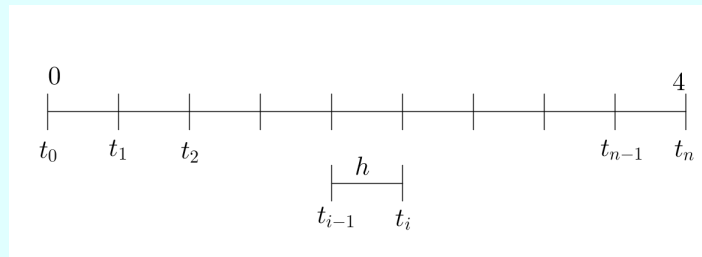


A principal ideia do Cálculo para obtermos a área limitada pelo gráfico de uma função é “exaurir” a região com polígonos que sabemos calcular a área, por exemplo, por retângulos. Veja a figura abaixo:



Agora, vamos calcular uma boa aproximação da área ‘exaurindo’ a região com retângulos do seguinte modo:

a) base dos retângulos: particionar o intervalo $[0, 4]$ em n partes iguais: $h = \frac{4 - 0}{n} = \frac{4}{n}$;



Observe que a base dos retângulos é dada por $t_1 = h = \frac{4}{n}$, $t_2 = 2h = \frac{8}{n}$, $t_3 = 3h = \frac{12}{n}$, ..., $t_i = ih = \frac{4i}{n}$

b) altura dos retângulos: escolhemos a altura de cada retângulo por $v(t_i)$

c) área dos retângulos $R = \text{altura} \times \text{base}$: a área de cada retângulo é dada por $R_1 = v(t_1) \times h = v(t_1) \times \frac{4}{n}$, $R_2 = v(t_2) \times 2h = v(t_2) \times \frac{8}{n}$, ..., $R_i = v(t_i) \times h = v(t_i) \times \frac{4i}{n}$, ..., $R_n = v(t_n) \times h = v(t_n) \times \frac{4n}{n}$.

d) uma boa aproximação do espaço percorrido (área aproximada) é a soma das área dos n retângulos, ou seja,

$$s \cong R_1 + R_2 + \dots + R_i + \dots + R_n$$

$$s \cong v(t_1) \times \frac{4}{n} + v(t_2) \times \frac{8}{n} + \dots + v(t_i) \times \frac{4i}{n} + \dots + v(t_n) \times \frac{4n}{n}$$

$$s \cong 10,5 \left(\frac{4}{n}\right)^2 \frac{4}{n} + 10,5 \left(\frac{8}{n}\right)^2 \frac{8}{n} + \dots + 10,5 \left(\frac{4i}{n}\right)^2 \frac{4i}{n} + \dots + 10,5 \left(\frac{4n}{n}\right)^2 \frac{4n}{n}$$

$$s \cong 10,5 \frac{4^3}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + i^2 + \dots + n^2)$$

Logo,

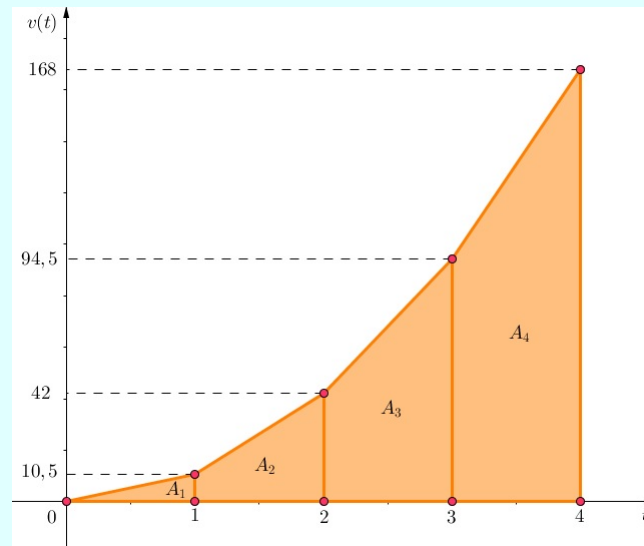
$$s \cong \frac{672}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + i^2 + \dots + n^2) \quad (22)$$

Assim, usando a expressão (22) (e uma calculadora) para vários valores de n obtemos

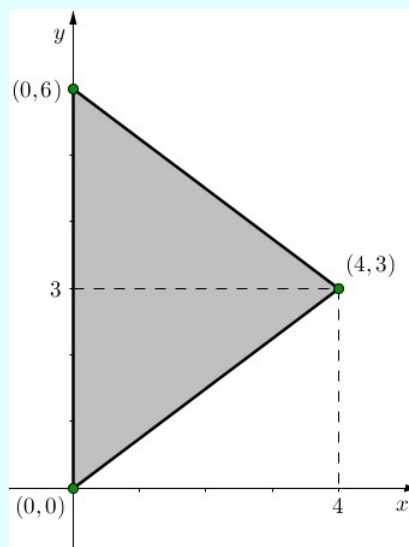
n	s = espaço
50	230,76
100	227,37
500	224,67

Portanto, o espaço percorrido é aproximadamente 224,67.

Também podemos usar outros polígonos, por exemplo, triângulos e trapézios, como mostra a figura abaixo.



4.2 Encontre a área da região sombreada da figura abaixo:



Solução: Pré-cálculo, pois a região é um triângulo.

1ª solução: Podemos considerar que a base do triângulo está sobre o eixo y . Portanto,

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)}{2} \\
 &= \frac{(6 - 0)(4 - 0)}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$

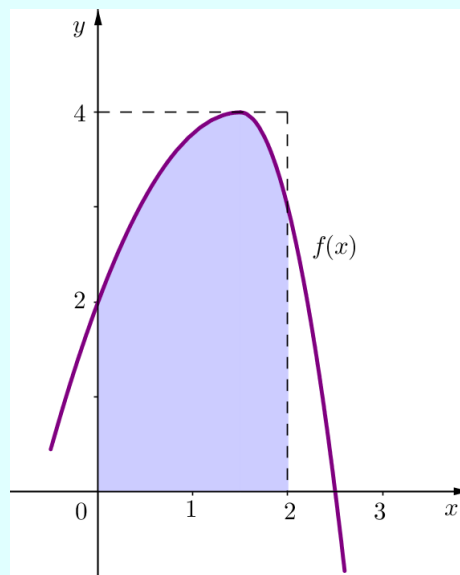
2ª solução: Faça,

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 24.$$

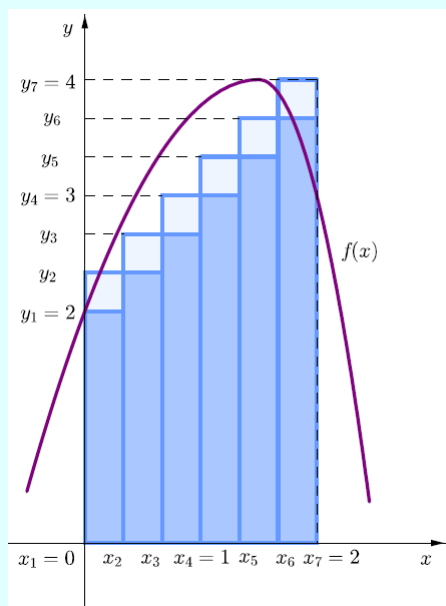
Logo, a área será dada por:

$$A = \frac{D}{2} = 12 \text{ u.a.}$$

4.3 Encontre a área da região sombreada da figura abaixo:



Solução: Cálculo, pois a região é limitada pelo gráfico de uma função. Usaremos a ideia descrita na questão **4.1**, ou seja, vamos “exaurir” a região com retângulos. Porém, neste caso, não temos uma expressão analítica da função, e logo, não podemos escolher a altura dos retângulos como o valor da função nos pontos da partição feita no eixo x . Para resolvermos este problema, vamos também particionar um intervalo $[2, 4]$ do eixo y . Veja a seguinte figura:



Vamos chamar a área sombreada de A . Observe que a área A é menor do que a área do retângulo $R_1 = 2 \times 4 = 8$ e maior do que a área do retângulo $R_2 = 2 \times 2 = 4$, ou seja $4 < A < 8$.

Seguindo o procedimento descrito, temos

a) base dos retângulos: partição do intervalo $[0, 2]$, no eixo x , em n partes iguais: $h_1 = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$.

Observe que a base dos retângulos é dada por $x_i = i h_1 = \frac{2i}{n}$.

b) altura dos retângulos: partição do intervalo $[2, 4]$, no eixo y , em n partes iguais: $h_2 = \frac{4-2}{n} = \frac{2}{n}$.

Observe que a altura dos retângulos é dada por $y_j = 2 + j h_2 = 2 + \frac{2j}{n}$.

c) área dos retângulos $R = \text{altura} \times \text{base}$: a área de cada retângulo é dada por $R_1 = \left(2 + \frac{2}{n}\right) \times h_1 = \left(2 + \frac{2}{n}\right) \frac{2}{n}$, $R_2 = \left(2 + \frac{4}{n}\right) \times h_1 = \left(2 + \frac{4}{n}\right) \frac{2}{n}$, $\dots$, $R_j = \left(2 + \frac{2j}{n}\right) \times h_1 = \left(2 + \frac{2j}{n}\right) \frac{2}{n}$, $\dots$, $R_n = \left(2 + \frac{2n}{n}\right) \times h_1 = \left(2 + \frac{2n}{n}\right) \frac{2}{n}$.

d) uma boa aproximação da área A é a soma das área dos n retângulos, ou seja,

$$\begin{aligned}
 A &\cong R_1 + R_2 + \dots + R_j + \dots + R_n \\
 A &\cong \left(2 + \frac{2}{n}\right) \frac{2}{n} + \left(2 + \frac{4}{n}\right) \frac{2}{n} + \dots + \left(2 + \frac{2j}{n}\right) \frac{2}{n} + \dots + \left(2 + \frac{2n}{n}\right) \frac{2}{n} \\
 A &\cong \frac{4}{n} (\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n\text{-vezes}}) + \frac{4}{n^2} (1 + 2 + \dots + n) \\
 A &\cong 4 + \frac{4}{n^2} (1 + 2 + \dots + n)
 \end{aligned}$$

Logo,

$$A \cong 4 + \frac{4}{n^2} (1 + 2 + \dots + n). \quad (23)$$

Assim, usando a expressão (23) (e uma calculadora) para vários valores de n obtemos

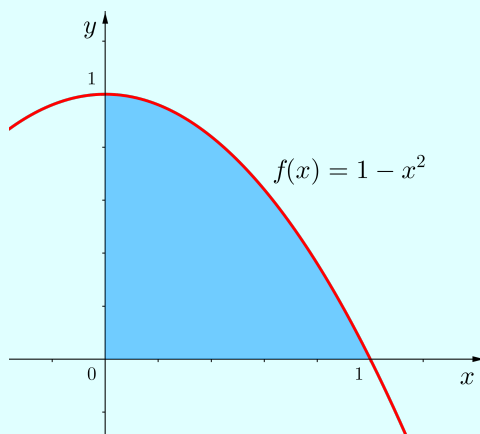
n	A = área
10	6,2
50	6,04
100	6,002

Portanto, a área A é aproximadamente 6,002.

4.4 Considere a região do plano limitada pelo gráfico da função $f(x) = 1 - x^2$ e os eixos x e y , para $0 \leq x \leq 1$.

(a) Faça um desenho da região.

Solução:



(b) Divida o intervalo $[0, 1]$ em n subintervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ de comprimentos iguais $\Delta x = x_i - x_{i-1} = 1/n$. Note que $x_i = i/n$ para $1 \leq i \leq n$. Mostre que a soma de Riemann $S(n) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$ é dada por

$$S(n) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} - \frac{i^2}{n^3} \right).$$

Solução: Das hipótese do exercício, temos:

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \\ &= \sum_{i=1}^n \left(1 - \left(\frac{i}{n} \right)^2 \right) \frac{1}{n} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} - \left(\frac{i}{n} \right)^2 \frac{1}{n} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} - \frac{i^2}{n^3} \right). \end{aligned}$$

(c) Completa a tabela abaixo e desene $S(n)$ para $n = 5$.

Solução:

n	5	10	50	100
$S(n)$	$\frac{14}{25}$	$\frac{123}{200}$	$\frac{3283}{5000}$	$\frac{13233}{20000}$

(d) Usando os resultados do item (b), mostre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = \frac{2}{3}.$$

dica: $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

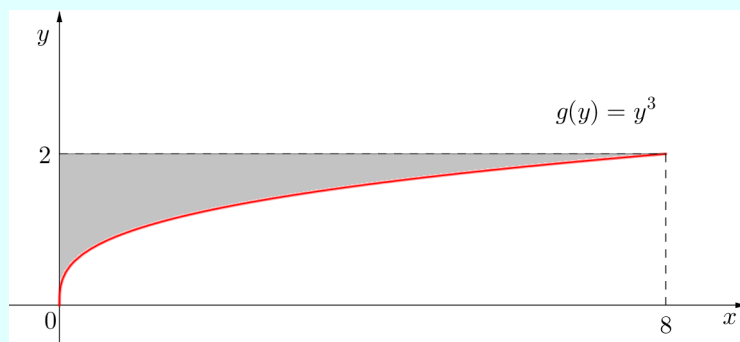
Observe que $\int_0^1 1 - x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S(n).$

Solução: Temos que:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} S(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} - \frac{i^2}{n^3} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} - \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^3} \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 - \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \cdot n - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6n} - \frac{1}{3n} - \frac{1}{6n^2} \right] \\
 &= 1 - \frac{1}{3} \\
 &= \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

4.5

(a) Escreva a integral definida que representa a área da região dada abaixo (não calcule a integral):



Solução: Observe que $x = g(y)$, isto é, x está em função de y . Dessa forma, podemos considerar o intervalo $[0, 2]$ no eixo y e representar a área da região por:

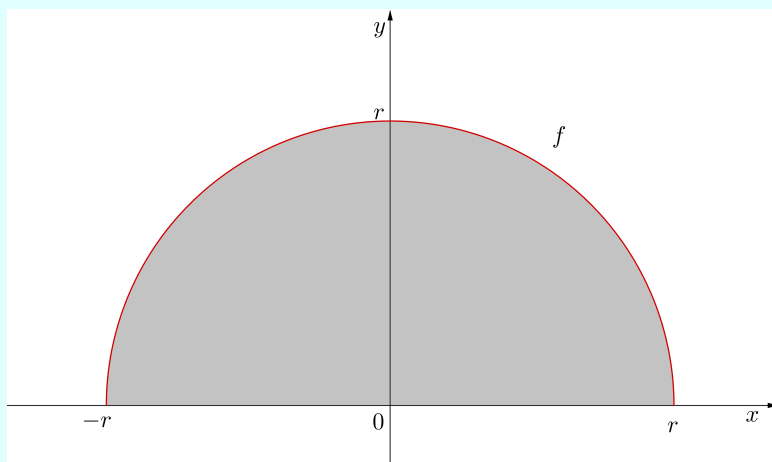
$$\text{Área} = \int_0^2 y^3 dy.$$

(b) Esboce a região cuja área é dada pela integral

$$\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx, \quad r > 0.$$

Use uma fórmula conhecida para calcular a área.

Solução: Seja $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Observe que, f é a fórmula do semicírculo superior de raio r . Logo, a região limitada pelo gráfico de f e o eixo x é dada por:



Para calcular a área da região usaremos a fórmula da área do círculo de raio r . Assim,

$$\text{Área} = \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{\pi r^2}{2}.$$

4.6 Usando a definição de integral definida, verifique que

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Solução: Temos que

$$\int_a^b x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i^2 \Delta x.$$

Substituindo $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e $x_i = a + i\Delta x$, temos:

$$\begin{aligned} \int_a^b x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[a + i \left(\frac{b-a}{n} \right) \right]^2 \left(\frac{b-a}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[a^2 + 2ai \left(\frac{b-a}{n} \right) + \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 i^2 \right] \left(\frac{b-a}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[a^2 \left(\frac{b-a}{n} \right) + 2a \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 i + \left(\frac{b-a}{n} \right)^3 i^2 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[a^2 \left(\frac{b-a}{n} \right) \sum_{i=1}^n 1 + 2a \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 \sum_{i=1}^n i + \left(\frac{b-a}{n} \right)^3 \sum_{i=1}^n i^2 \right]. \end{aligned}$$

Como $\sum_{i=1}^n 1 = n$, $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, segue:

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[a^2 \left(\frac{b-a}{n} \right) n + 2a \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 \frac{n(n+1)}{2} + \left(\frac{b-a}{n} \right)^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[a^2(b-a) + \frac{a(b-a)^2(n+1)}{n} + \frac{(b-a)^3(n+1)(2n+1)}{6n^2} \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \frac{a(b-a)^2}{n} + \frac{(b-a)^3}{3} + \frac{(b-a)^3}{2n} + \frac{(b-a)^3}{6n^2} \right] \\
 &= a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{3} \\
 &= \frac{3a^2(b-a) + 3a(b-a)^2 + (b-a)^3}{3} \\
 &= \frac{3ba^2 - 3a^3 + 3a(b^2 - 2ba + a^2) + b^3 - 3b^2a + 3ba^2 - a^3}{3} \\
 &= \frac{3ba^2 - 3a^3 + 3b^2a - 6ba^2 + 3a^3 + b^3 - 3b^2a + 3ba^2 - a^3}{3} \\
 &= \frac{b^3 - a^3}{3}
 \end{aligned}$$

como queríamos.

4.7

- (a) Determine se a função $f(x) = \frac{1}{x-4}$ é integrável no intervalo $[3, 5]$. Explique seu raciocínio.

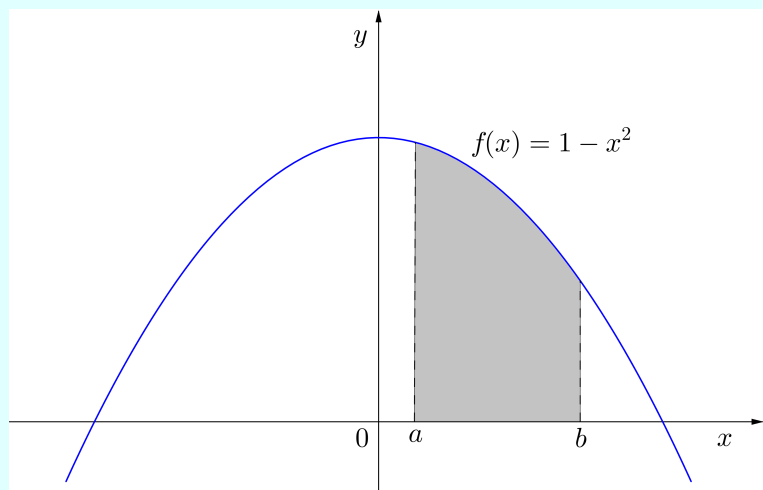
Solução: Note que f é descontínua em $4 \in [3, 5]$. Como esta descontinuidade não é do tipo salto e f não é limitada, temos que f não é integrável no intervalo $[3, 5]$.

- (b) Encontre as constantes **a** e **b** que maximizam o valor de $\int_a^b (1-x^2) dx$. Explique seu raciocínio.

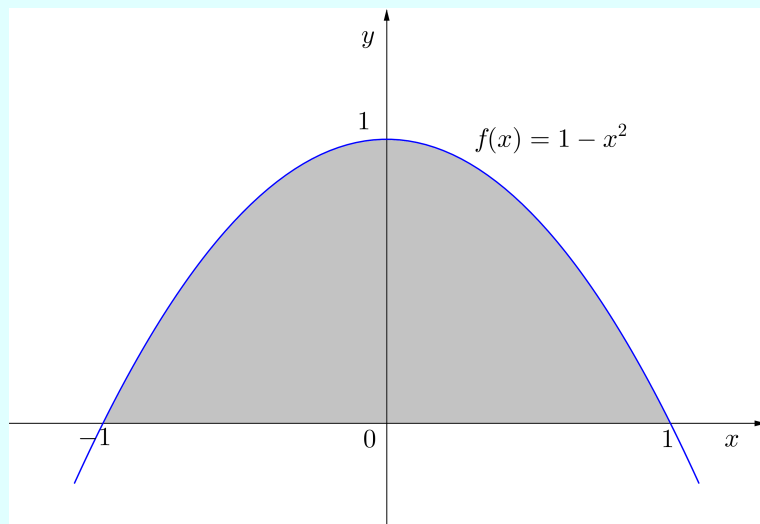
Solução: Podemos interpretar

$$\int_a^b (1-x^2) dx$$

como a área da região limitada pelas retas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pelo gráfico de $f(x) = 1 - x^2$ (Veja o gráfico abaixo).



Observe que, nessas condições, a maior área será obtida quando $a = -1$ e $b = 1$, conforme ilustrado abaixo:



4.8

- (a) Enuncie as duas formas do Teorema Fundamental do Cálculo. Destaque as hipóteses e os resultados do teorema.

Solução: 1º Teorema Fundamental do Cálculo. Se f for integrável em $[a, b]$ e se F for uma primitiva de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Hipóteses: f integrável em $[a, b]$, F uma primitiva de f , ou seja, $F'(x) = f(x)$ em $[a, b]$.

Resultado: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = F(b) - F(a).$

2º Teorema Fundamental do Cálculo. Se f for uma função contínua em $[a, b]$, então a função

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad a < x < b$$

é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e satisfaz

$$g'(x) = f(x).$$

Hipóteses: f contínua em $[a, b]$, ou seja, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \forall x_0 \in [a, b]$.

Resultados: A função $g(x)$ dada pela integral indefinida de f é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) . Além disso, derivada da integral indefinida de f é a própria f .

- (b) Explique como o Teorema fundamental do Cálculo (nas duas formas), relaciona os conceitos de derivada e integral.

Solução: Sabemos que a derivada é dada pelo seguinte limite:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (24)$$

cuja interpretação geométrica é a inclinação da reta tangente e a interpretação cinemática é a velocidade instantânea. Agora, a integral é dada pelo limite

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (25)$$

cuja interpretação geométrica é a área da região limitada pelo gráfico de f , as retas $x = a$ e $x = b$ e o eixo x . Portanto, são conceitos diferentes com definições e interpretações diferentes.

O Teorema Fundamental do Cálculo relaciona estes dois conceitos do seguinte modo:

- (i) a primeira forma do teorema diz que para calcularmos o limite (25) (que, em geral, é complicado) basta resolver $F'(x) = f(x)$, uma equação diferencial (ou seja, calcular uma primitiva). Portanto, uma maneira de calcular uma integral é calcular uma primitiva.
- (ii) a segunda forma do teorema diz que a integral indefnida de uma função contínua é uma primitiva. Portanto, uma maneira de calcular uma primitiva de uma função contínua e calcular uma integral indefinida.

- (a) Calcule $F'(x)$ para $F(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{t} dt$.

Solução: Sabemos que $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$. Logo,

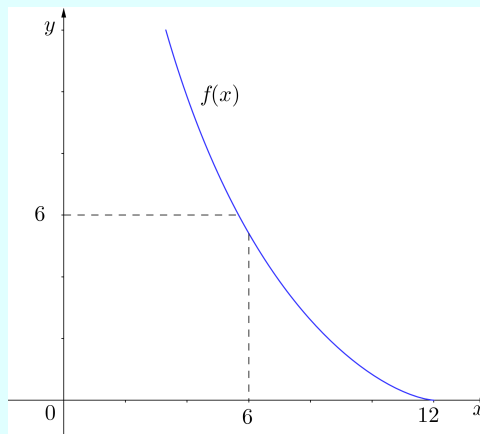
$$F(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{t} dt = \ln x^2.$$

Assim, $F'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$.

- (b) Uma pessoa andando ao longo de uma doca, puxa um barco por uma corda de 12 metros. O barco percorre um caminho conhecido como *Tractrix* (veja figura). A equação do caminho é

$$f(x) = 12 \ln \left(\frac{12 + \sqrt{144 - x^2}}{x} \right) - \sqrt{144 - x^2}.$$

Qual a inclinação desse caminho quando $x = 6$?



Solução: A inclinação do caminho quando $x = 6$ será dada pela derivada de f neste ponto, isto é, $f'(6)$. Assim, temos

$$f'(x) = \frac{12x}{12 + \sqrt{144 - x^2}} \left(\frac{12 + \sqrt{144 - x^2}}{x} \right)' + \frac{x}{\sqrt{144 - x^2}}. \quad (26)$$

Calculamos separadamente

$$\begin{aligned} \left(\frac{12 + \sqrt{144 - x^2}}{x} \right)' &= \frac{\frac{-x^2}{\sqrt{144 - x^2}} - (12 + \sqrt{144 - x^2})}{x^2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{144 - x^2}} - \frac{12 + \sqrt{144 - x^2}}{x^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

Substituindo (27) em (26)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{12x}{12 + \sqrt{144 - x^2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{144 - x^2}} - \frac{12 + \sqrt{144 - x^2}}{x^2} \right) + \frac{x}{\sqrt{144 - x^2}} \\
 &= -\frac{12x}{(12 + \sqrt{144 - x^2})\sqrt{144 - x^2}} - \frac{12}{x} + \frac{x}{\sqrt{144 - x^2}} \\
 &= \frac{-12x\sqrt{144 - x^2} + x(12 + \sqrt{144 - x^2})\sqrt{144 - x^2}}{(12 + \sqrt{144 - x^2})(144 - x^2)} - \frac{12}{x} \\
 &= \frac{-12x\sqrt{144 - x^2} + 12x\sqrt{144 - x^2} + x(144 - x^2)}{(12 + \sqrt{144 - x^2})(144 - x^2)} - \frac{12}{x} \\
 &= \frac{x}{12 + \sqrt{144 - x^2}} - \frac{12}{x} \\
 &= \frac{x^2 - 12(12 + \sqrt{144 - x^2})}{x(12 + \sqrt{144 - x^2})}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } f'(6) = \frac{6^2 - 12(12 + \sqrt{144 - 6^2})}{6(12 + \sqrt{144 - 6^2})} \approx -1,73.$$

4.10 Dada a função exponencial $f(x) = a^x$.

- (a) Verifique que $f(u + v) = f(u) \cdot f(v)$ e $f(2x) = (f(x))^2$;

Solução: De fato, sendo $f(u) = a^u$ e $f(v) = a^v$,

$$f(u + v) = a^{u+v} = a^u \cdot a^v = f(u) \cdot f(v).$$

Analogamente,

$$f(2x) = a^{2x} = (a^x)^2 = (f(x))^2.$$

- (b) Calcule o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 2)$;

Solução: Derivando, temos

$$f'(x) = a^x \ln a.$$

O coeficiente angular será dado por

$$f'(1) = a \ln a \tag{28}$$

Como o ponto $(1, 2)$ pertence ao gráfico de f , temos

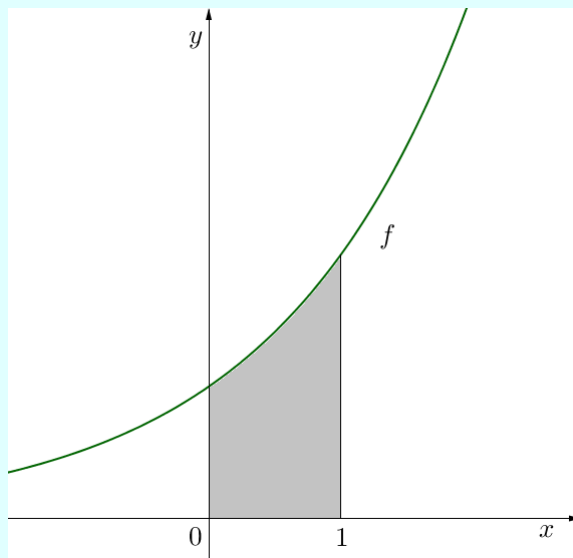
$$f(1) = a^1 = 2 \Leftrightarrow a = 2.$$

Logo, segue que (28) fica

$$f'(1) = 2 \ln 2 \approx 1,39.$$

- (c) Calcule a área da região limitada pelo gráfico de f , as retas $x = 0$ e $x = 1$ e o eixo x .

Solução: Do item (b), temos que $f(x) = 2^x$, cuja o gráfico abaixo indica a região que devemos obter a área.



Logo, a área será dada por

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \int_0^1 2^x dx \\ &= \left[\frac{2^x}{\ln 2} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \\ &= \frac{1}{\ln 2} \approx 1,44.\end{aligned}$$

4.11

- (a) Verifique que $\sinh(u + v) = \sinh(u) \cosh(v) + \cosh(u) \sinh(v)$;

Solução: Tomando o segundo membro da equação, segue que:

$$\begin{aligned}&\sinh(u) \cosh(v) + \cosh(u) \sinh(v) = \\ &= \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2} \right) \left(\frac{e^v + e^{-v}}{2} \right) + \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2} \right) \left(\frac{e^v - e^{-v}}{2} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{u+v} + \cancel{e^{u+v}} - \cancel{e^{-u+v}} - e^{-(u+v)} + e^{u+v} - \cancel{e^{u+v}} + \cancel{e^{-u+v}} - e^{-(u+v)}}{4} \\
&= \frac{2e^{u+v} - 2e^{-(u+v)}}{4} \\
&= \frac{e^{u+v} - e^{-(u+v)}}{2} \\
&= \sinh(u+v).
\end{aligned}$$

- (b) Encontre o coeficiente angular da reta tangente à curva $y = \ln(\cosh(x))$ no ponto $(1, \ln(\cosh(1)))$;

Solução: Derivando, temos:

$$y' = \frac{1}{\cosh x} \sinh x = \tanh x.$$

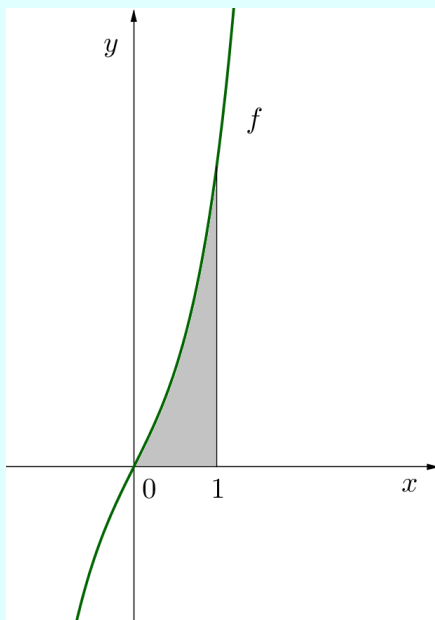
Substituindo o ponto $(1, \ln(\cosh(1)))$, segue que:

$$y'(1) = \tanh(1) = \frac{e^1 - e^{-1}}{e^1 + e^{-1}} = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}$$

é o coeficiente angular procurado.

- (c) Calcule a área da região limitada pelo gráfico de $y = \sinh(2x)$, as retas $x = 0$ e $x = 1$ e o eixo x .

Solução: Considere o gráfico abaixo:



A área será dada por:

$$\text{Área} = \int_0^1 \sinh 2x \, dx.$$

Fazendo a substituição $u = 2x$, $du = 2 dx$, temos que $x = 0 \Rightarrow u = 0$ e $x = 1 \Rightarrow u = 2$.

Logo, reescrevendo a integral, obtemos:

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \int_0^2 \frac{\sinh u}{2} du \\ &= \left[\frac{\cosh u}{2} \right]_0^2 \\ &= \frac{\cosh 2 - \cosh 0}{2} \\ &= \frac{\cosh 2 - 1}{2} \\ &\approx 1,38.\end{aligned}$$

4.12

- (a) Em que regra é baseada a técnica de integração por substituição?

Solução: A técnica de substituição é baseada na regra da cadeia, pois se F é uma primitiva de f e g é uma função diferenciável que podemos compor com f e F então, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

- (b) Descreva a técnica de integração por substituição;

Solução:

Técnica de integração por substituição ou Regra da substituição. Pela regra da cadeia temos que $F(g(x)) + C$ são as primitivas da função $f(g(x))g'(x)$, ou seja,

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C. \quad (29)$$

Deste modo, podemos fazer a seguinte substituição: $u = g(x)$ e obter $du = g'(x) dx$. Portanto, (29) torna-se

$$\int f(u) du = F(u) + C. \quad (30)$$

Assim, na variável u , basta calcularmos a primitiva F de f para resolvermos a integral (30). Depois, usamos $u = g(x)$ para obter a solução de (29).

- (c) Para calcular $\int_{-1}^1 x^2 dx$ é adequado substituir $u = x^2$, $x = \sqrt{u}$, $dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$ e obter $\frac{1}{2} \int_1^1 \sqrt{u} du = 0$? Explique.

Solução:

Não é adequado. Para aplicarmos a técnica da substituição devemos ter um integrando do tipo $f(g(x))g'(x)$.

Note que o integrando de $\int_{-1}^1 x^2 dx$ não é desta forma. Logo, não é adequado usarmos essa técnica, pois estaremos cometendo um erro. De fato, sabemos que

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \neq 0 (!)$$

4.13

- (a) Em que regra de derivação é baseada a técnica de integração por partes?

Solução: É baseada na regra do produto

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

- (b) Descreva a técnica de integração por partes;

Solução: Supondo que f e g são definidas e deriváveis no mesmo intervalo I , então pela fórmula da regra do produto temos que

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]' - f'(x)g(x).$$

Observe que, uma primitiva de $[f(x)g(x)]'$ é $f(x)g(x)$ temos que, se $f'(x)g(x)$ tem uma primitiva em I então $f(x)g'(x)$ também terá e será dada por

$$\int f'(x)g(x) dx = \int [f(x)g(x)]' - f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx. \quad (31)$$

Fazendo $u = f(x)$ e $v = g(x)$ teremos $du = f'(x) dx$ e $dv = g'(x) dx$ podemos escrever (31) do seguinte modo:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Diga se você usaria integração por partes para calcular as integrais abaixo. Se for o caso, identifique u e dv e justifique a sua decisão.

- (c) $\int x^2 e^{2x} dx$;

Solução:

USARIA a técnica de integração por partes com $u = x^2$ e $dv = e^{2x}$ pois a integral $\int v du$ da regra de integração por partes será mais simples de calcular. De fato,

$$\int u \, dv = u \, v - \int v \, du$$

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{2x} \, dx &= x^2 \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} 2x \, dx \\ &= \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \int x e^{2x} \, dx. \end{aligned}$$

Usando novamente a técnica de integração por partes, agora com $u = x$ e $dv = e^{2x}$

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{2x} \, dx &= \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \int x e^{2x} \, dx \\ &= \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \left[x \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} \, dx \right] \\ &= \frac{x^2 e^{2x}}{2} - x \frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} + C \\ &= \frac{e^{2x}}{4} (2x^2 - 2x + 1) + C. \end{aligned}$$

Para a escolha $u = e^{2x}$ e $dv = x^2$ teríamos

$$\int v \, du = \frac{2}{3} \int x^3 e^{2x} \, dx.$$

(d) $\int 2x e^{x^2} \, dx.$

Solução:

NÃO USARIA a técnica de integração por partes, pois o integrando é da forma $f(g(x))g'(x)$ para $u = g(x) = x^2$ e $f(u) = e^u$. Logo, a técnica mais adequada é a regra da substituição com $u = x^2$ e $du = 2x \, dx$.

$$\begin{aligned} \int 2x e^{x^2} \, dx &= \int e^{x^2} 2x \, dx \\ &= \int e^u \, du \\ &= e^u \\ &= e^{x^2}. \end{aligned}$$

4.14 Integração por substituição.

(a) $\int \frac{(\ln(x))^2}{x} dx.$

Solução: Fazendo a substituição $u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$, temos:

$$\int \frac{(\ln(x))^2}{x} dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C.$$

Voltando para a variável original, segue que

$$\int \frac{(\ln(x))^2}{x} dx = \frac{\ln^3(x)}{3} + C.$$

(b) $\int 2x^3 \cos(x^2) dx.$

Solução: Fazemos a substituição $w = x^2 \Rightarrow dw = 2x dx$ temos

$$\int 2x^3 \cos(x^2) dx = \int x^2 \cos(x^2) 2x dx = \int w \cos(w) dw.$$

Agora, por integração por partes temos

$$u = w; \quad du = dw \quad \text{e} \quad dv = \cos(w)dw; \quad v = \sin(w).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int w \cos(w) dw &= w \sin w - \int \sin(w) dw. \\ &= w \sin(w) + \cos(w) + C. \end{aligned}$$

Voltando para a variável original, segue que

$$\int 2x^3 \cos(x^2) dx = x^2 \sin(x^2) + \cos(x^2) + C.$$

(c) $\int x\sqrt{4-x} dx.$

Solução: Fazendo a substituição $u = 4 - x \Rightarrow du = -dx$, temos:

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{4-x} dx &= - \int (4-u)\sqrt{u} du \\ &= \int (u^{3/2} - 4u^{1/2}) du \\ &= \frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{8}{3}u^{3/2}.C \end{aligned}$$

Voltando para a variável original, segue que

$$\int x\sqrt{4-x} dx = \frac{2}{5}(4-x)^{5/2} - \frac{8}{3}(4-x)^{3/2} + C.$$

(d) $\int e^{\sqrt{2x}} dx.$

Solução: Fazemos a substituição $w = \sqrt{2x} \Rightarrow dw = \frac{1}{\sqrt{2x}} dx \Rightarrow dx = \sqrt{2x} dw = w dw$ temos

$$\int e^{\sqrt{2x}} dx = \int w e^w dw.$$

Agora, por integração por partes obtemos

$$u = w; \quad du = dw \quad \text{e} \quad dv = e^w dw; \quad v = e^w.$$

Assim,

$$\int w e^w dw = w e^w - \int e^w dw + C = w e^w - e^w dw.$$

Voltando para a variável original, segue que

$$\int e^{\sqrt{2x}} dx = \sqrt{2x} e^{\sqrt{2x}} - e^{\sqrt{2x}} + C.$$

(e) $\int \cos(\ln(x)) dx.$

Solução: Fazemos a substituição $w = \ln(x) \Rightarrow dw = \frac{1}{x} dx \Rightarrow dx = x dw = e^w dw$ temos

$$\int \cos(\ln(x)) dx = \int e^w \cos w dw \quad (32)$$

Agora, por integração por partes temos

$$u = e^w; \quad du = e^w dw \quad \text{e} \quad dv = \cos w dw; \quad v = \sin w.$$

Assim,

$$\int e^w \cos w dw = e^w \sin w - \int e^w \sin w dw. \quad (33)$$

Resolvendo a integral do segundo membro separadamente, por integração por partes, temos

$$u = e^w; \quad du = e^w dw \quad \text{e} \quad dv = \sin w dw; \quad v = -\cos w.$$

Assim,

$$\int e^w \sin w dw = -e^w \cos w + \int e^w \cos w dw. \quad (34)$$

Substituindo (34) em (33)

$$\begin{aligned} \int e^w \cos w dw &= e^w \sin w + e^w \cos w - \int e^w \cos w dw \\ 2 \int e^w \cos w dw &= e^w \sin w + e^w \cos w \\ \int e^w \cos w dw &= \frac{e^w \sin w + e^w \cos w}{2}. \end{aligned}$$

Voltando para a variável original, segue de (32) que

$$\begin{aligned}\int \cos(\ln(x)) dx &= \frac{e^{\ln(x)} \sin(\ln(x)) + e^{\ln(x)} \cos(\ln(x))}{2} + C \\ &= \frac{x[\sin(\ln(x)) + \cos(\ln(x))]}{2} + C.\end{aligned}$$

(f) $\int \ln(x^2 + 1) dx.$

Solução: Fazemos a substituição $w = x^2 \Rightarrow dw = 2x dx$ temos

$$\int \ln(x^2 + 1) dx = \frac{1}{2} \int \frac{\ln(u + 1)}{\sqrt{u}} du.$$

Por integração por partes, temos

$$u = \ln(u + 1); \quad du = \frac{1}{u + 1} dx \quad \text{e} \quad dv = \frac{du}{\sqrt{u}}; \quad v = 2\sqrt{u}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int \frac{\ln(u + 1)}{\sqrt{u}} du &= \frac{1}{2} \left[2\sqrt{u} \ln(u + 1) - 2 \int \frac{\sqrt{u}}{u + 1} du \right] \\ &= \sqrt{u} \ln(u + 1) - \int \frac{\sqrt{u}}{u + 1} du\end{aligned} \quad (35)$$

Vamos calcular separadamente a integral do segundo membro. Fazendo a substituição $z = \sqrt{u} \Rightarrow du = 2z dz$ tem-se

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{u}}{u + 1} du &= 2 \int \frac{z^2}{z^2 + 1} dz \\ &= 2(z - \arctg z) \\ &= 2(\sqrt{u} - \arctg \sqrt{u})\end{aligned} \quad (36)$$

Substituindo (36) em (35), segue que

$$\frac{1}{2} \int \frac{\ln(u + 1)}{\sqrt{u}} du = \sqrt{u} \ln(u + 1) - 2(\sqrt{u} - \arctg \sqrt{u}).$$

Voltando para a variável original tem-se

$$\int \ln(x^2 + 1) dx = x \ln(x^2 + 1) - 2(x - \arctg x) + C.$$

4.15 Integração por partes.

(a) $\int \frac{(\ln(x))^2}{x} dx.$

Solução: Por integração por partes temos

$$u = (\ln(x))^2; \quad du = 2 \ln(x) \frac{dx}{x} \quad \text{e} \quad dv = \frac{dx}{x}; \quad v = \ln(x).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{(\ln(x))^2}{x} dx &= (\ln(x))^3 - 2 \int \frac{(\ln(x))^2}{x} dx \\ &\Downarrow \\ 3 \int \frac{(\ln(x))^2}{x} dx &= (\ln(x))^3 \\ &\Downarrow \\ \int \frac{(\ln(x))^2}{x} dx &= \frac{(\ln(x))^3}{3} + C. \end{aligned}$$

(b) $\int 2x^3 \cos(x^2) dx.$

Por integração por partes temos

$$u = \cos(x^2); \quad du = -\sin(x^2) 2x dx \quad \text{e} \quad dv = 2x^3; \quad v = \frac{x^4}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int 2x^3 \cos(x^2) dx &= \frac{x^4}{2} \cos(x^2) + \int \frac{x^4}{2} \sin(x^2) 2x dx \\ \int 2x^3 \cos(x^2) dx &= \frac{x^4}{2} \cos(x^2) + \int x^5 \cos(x^2) dx. \end{aligned} \tag{37}$$

Vamos calcular separadamente a integral do segundo membro. Fazendo $w = x^2$ podemos escrever

$$\int x^5 \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int w^2 \sin(w) dw.$$

Por integração por partes novamente

$$u = w^2; \quad du = 2w dw \quad \text{e} \quad dv = \sin(w); \quad v = -\cos(w).$$

tem-se

$$\frac{1}{2} \int w^2 \sin(w) dw = -\frac{w^2}{2} \cos(w) + \int w \cos(w) dw.$$

Por integração por partes novamente

$$u = w; \quad du = dw \quad \text{e} \quad dv = \cos(w); \quad v = \sin(w).$$

tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int w^2 \sin(w) dw &= -\frac{w^2}{2} \cos(w) + w \sin(w) - \int \sin(w) dw \\ &= -\frac{w^2}{2} \cos(w) + w \sin(w) + \cos(w). \end{aligned}$$

Voltando para variável original tem-se

$$\int x^5 \cos(x^2) dx = -\frac{x^4}{2} \cos(x^2) + x^2 \sin(x^2) + \cos(x^2). \quad (38)$$

Substituindo (38) em (37) obtemos

$$\int 2x^3 \cos(x^2) dx = x^2 \sin(x^2) + \cos(x^2) + C.$$

(c) $\int x\sqrt{4-x} dx.$

Solução: Por integração por partes temos

$$u = x; \quad du = dx \quad \text{e} \quad dv = \sqrt{4-x} dx; \quad v = -\frac{2}{3}(4-x)^{3/2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{4-x} dx &= -\frac{2}{3}x(4-x)^{3/2} + \frac{2}{3} \int (4-x)^{3/2} dx + C \\ \int x\sqrt{4-x} dx &= -\frac{2}{3}x(4-x)^{3/2} - \frac{4}{15}(4-x)^{5/2} + C \\ \int x\sqrt{4-x} dx &= -\frac{2}{15}(4-x)^{3/2}(8+3x) + C. \end{aligned}$$

(d) $\int e^{\sqrt{2x}} dx.$

Solução: Por integração por partes temos

$$u = e^{\sqrt{2x}}; \quad du = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\sqrt{2x}} x^{-1/2} dx \quad \text{e} \quad dv = dx; \quad v = x.$$

Assim,

$$\int e^{\sqrt{2x}} dx = x e^{\sqrt{2x}} - \frac{1}{2} \int e^{\sqrt{2x}} \sqrt{2x} dx.$$

Fazendo $w = \sqrt{2x}$; $dx = \sqrt{2x} dw$ e podemos escrever

$$\int e^{\sqrt{2x}} dx = x e^{\sqrt{2x}} - \int w^2 e^w dw.$$

Por integração por partes novamente

$$u = w^2; \quad du = 2w \, dw \quad \text{e} \quad dv = e^w \, dw; \quad v = e^w.$$

tem-se

$$\begin{aligned} \int e^{\sqrt{2x}} \, dx &= x e^{\sqrt{2x}} - \frac{1}{2} \left[w^2 e^w - \int 2w e^w \, dw \right] + C \\ \int e^{\sqrt{2x}} \, dx &= x e^{\sqrt{2x}} - \frac{2x}{2} e^{\sqrt{2x}} - \int w e^w \, dw + C \\ \int e^{\sqrt{2x}} \, dx &= x e^{\sqrt{2x}} - x e^{\sqrt{2x}} + e^{\sqrt{2x}} (\sqrt{2x} - 1) + C. \end{aligned}$$

(e) $\int \cos(\ln(x)) \, dx.$

Solução: Por integração por partes temos

$$u = \cos(\ln(x)); \quad du = -\frac{\sin(\ln(x))}{x} \, dx \quad \text{e} \quad dv = dx; \quad v = x.$$

Assim,

$$\int \cos(\ln(x)) \, dx = x \cos(\ln(x)) + \int \sin(\ln(x)) \, dx.$$

Por integração por partes novamente

$$u = \sin(\ln(x)); \quad du = \frac{\cos(\ln(x))}{x} \, dx \quad \text{e} \quad dv = dx; \quad v = x.$$

tem-se

$$\begin{aligned} \int \cos(\ln(x)) \, dx &= x \cos(\ln(x)) + x \sin(\ln(x)) - \int \cos(\ln(x)) \, dx + C \\ &\Downarrow \\ 2 \int \cos(\ln(x)) \, dx &= x \cos(\ln(x)) + x \sin(\ln(x)) + C \\ &\Downarrow \\ \int \cos(\ln(x)) \, dx &= \frac{x}{2} [\cos(\ln(x)) + \sin(\ln(x))] + C. \end{aligned}$$

(f) $\int \ln(x^2 + 1) \, dx.$

Solução: Por integração por partes temos

$$u = \ln(x^2 + 1); \quad du = \frac{2x}{x^2 + 1} \, dx \quad \text{e} \quad dv = dx; \quad v = x.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int \ln(x^2 + 1) \, dx &= x \ln(x^2 + 1) - 2 \int \frac{x^2}{1 + x^2} \, dx + C \\ \int \ln(x^2 + 1) \, dx &= x \ln(x^2 + 1) - 2(x - \arctg(x)) + C. \end{aligned}$$

4.16 Enuncie a substituição que você faria se fosse usar uma substituição trigonométrica e a integral tivesse no integrando um radical do tipo dado abaixo, com $a > 0$. Explique seu raciocínio.

(a) $\sqrt{a^2 - x^2}$.

Solução: Note que, para $a > 0$, podemos escrever

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = a\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

Assim, comparando a expressão de dentro da raiz com a identidade trigonométrica $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$, observamos que podemos fazer a seguinte substituição:

$$\frac{x}{a} = \sin \theta \Leftrightarrow x = a \sin \theta. \quad (39)$$

Para garantirmos que (39) define uma função injetora devemos tomar θ no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Observe que $dx = a \cos \theta d\theta$.

Portanto, neste caso, a integral torna-se

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} (a \cos \theta) d\theta \\ &= a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cos \theta d\theta \\ &= a^2 \int \cos^2 \theta d\theta. \end{aligned}$$

(b) $\sqrt{a^2 + x^2}$.

Solução: Note que, para $a > 0$, podemos escrever

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)} = a\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

Assim, comparando a expressão de dentro da raiz com a identidade trigonométrica $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$, observamos que podemos fazer a substituição

$$\frac{x}{a} = \tan \theta \Leftrightarrow x = a \tan \theta. \quad (40)$$

Para a substituição (40) definir uma função injetora tomamos θ no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Observe que $dx = a \sec^2 \theta d\theta$.

Portanto, neste caso, a integral torna-se

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 + x^2} dx &= \int \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 \theta} (a \sec^2 \theta) d\theta \\ &= a^2 \int \sqrt{1 + \tan^2 \theta} \sec^2 \theta d\theta \\ &= a^2 \int \sec^3 \theta d\theta. \end{aligned}$$

(c) $\sqrt{x^2 - a^2}$.

Solução: Note que, para $a > 0$, podemos escrever

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)} = a \sqrt{\left(\frac{x}{a} \right)^2 - 1}.$$

Assim, comparando a expressão de dentro da raiz com a identidade trigonométrica $\operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$, observamos que podemos fazer a substituição

$$\frac{x}{a} = \sec \theta \Leftrightarrow x = a \sec \theta. \quad (41)$$

Para a substituição (41) definir uma função injetora tomamos θ no intervalo $[0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$. Observe que, $dx = a \sec \theta \operatorname{tg} \theta d\theta$.

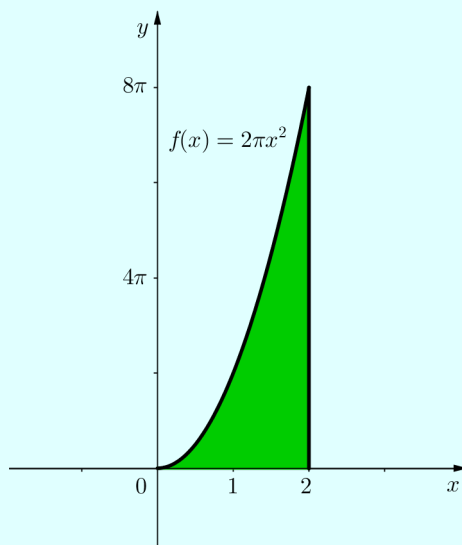
Portanto, a integral, neste caso, torna-se

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - a^2} dx &= \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2} (a \sec \theta \operatorname{tg} \theta) d\theta \\ &= a^2 \int \sqrt{\sec^2 \theta - 1} \sec \theta \operatorname{tg} \theta d\theta \\ &= a^2 \int \sec \theta \operatorname{tg}^2 \theta d\theta. \end{aligned}$$

4.17 Considere a integral $\int_0^2 2\pi x^2 dx$.

(a) Esboce a região cuja a área é dada pela integral;

Solução: A área dada pela integral é a área abaixo do gráfico da função $f(x) = 2\pi x^2$ com x variando de 0 a 2, como mostra a figura abaixo.



- (b) Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral se o método das cascas for usado;

Solução: O volume do sólido obtido pela revolução em torno do eixo y da região sob a curva $y = f(x)$ de a até b , utilizando o método das cascas é dado por

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

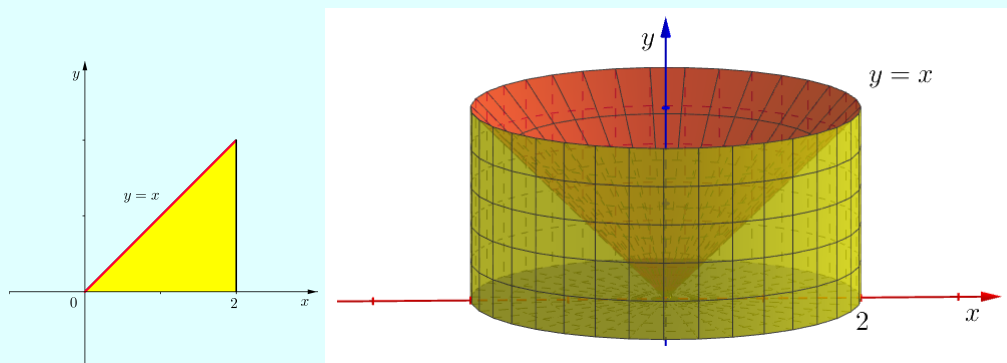
Então, o volume do sólido dado pela integral

$$V = 2\pi \int_0^2 x^2 dx,$$

utilizando o método das cascas, é o volume do sólido de revolução obtido pela rotação de $y = x$ em torno do eixo y com $x \in [0, 2]$.

Este volume é o limite do somatório dos volumes das cascas cilíndricas de raio médio $r(x_i) = x_i$, altura $h(x_i) = x_i$ e espessura $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ com $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ subintervalos de $[0, 2]$.

Abaixo, ilustramos a região rotacionada e um sólido de revolução.



- (c) Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral se o método dos discos for usado;

Solução: O volume do sólido obtido pela revolução em torno do eixo x da região sob a curva $y = f(x)$ de a até b , utilizando o método dos discos, é dado por

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

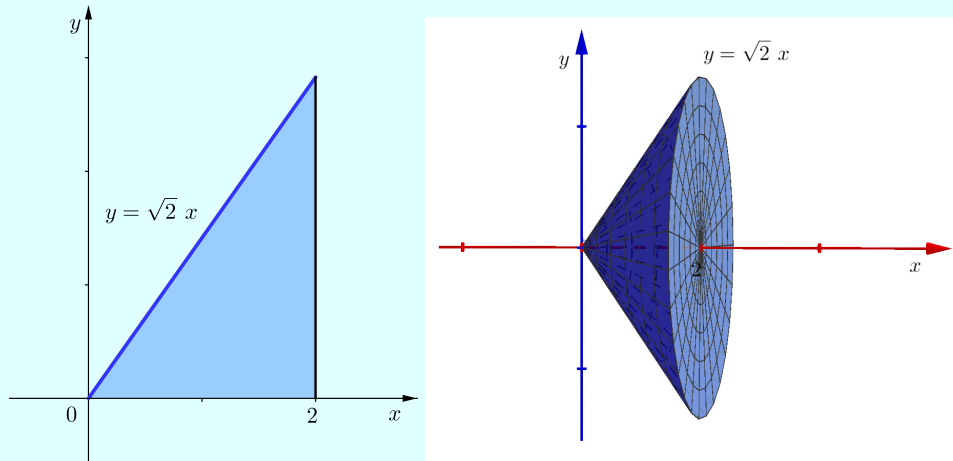
O volume do sólido dado pela integral

$$V = \pi \int_0^2 2x^2 dx$$

utilizando o método dos discos, é o volume do sólido de revolução obtido pela rotação de $y = \sqrt{2}x$ em torno do eixo x com $x \in [0, 2]$.

Este volume é o limite do somatório dos volumes dos discos de raio $R(x_i) = \sqrt{2} x_i$ e espessura $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ com $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ subintervalos de $[0, 2]$.

Abaixo ilustramos região rotacionada e um sólido de revolução.



4.18 Calcule as seguintes integrais:

(a) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(3\theta) \cos(\theta) d\theta;$

Solução: Temos que

$$\sin(3\theta) \cos(\theta) = \frac{1}{2} [\sin(3\theta - \theta) + \sin(3\theta + \theta)] = \frac{1}{2} [\sin(2\theta) + \sin(4\theta)].$$

Então, escrevemos

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(3\theta) \cos(\theta) d\theta &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(2\theta) + \sin(4\theta)] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2\theta) d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} \sin(4\theta) d\theta \right] \end{aligned} \quad (42)$$

Agora, vamos calcular cada integral desta última igualdade separadamente. Para a primeira integral fazemos $u = 2\theta \Rightarrow d\theta = \frac{du}{2}$, com $\theta = -\pi \Rightarrow u = -2\pi$ e $\theta = \pi \Rightarrow u = 2\pi$. Assim,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-2\pi}^{2\pi} \sin(u) du = - \left[\frac{\cos(u)}{2} \right]_{-2\pi}^{2\pi} = \frac{-\cos(2\pi)}{2} + \frac{\cos(-2\pi)}{2} = 0.$$

Analogamente, para a segunda integral, fazendo $u = 4\theta \Rightarrow d\theta = \frac{du}{4}$, com $\theta = -\pi \Rightarrow u = -4\pi$ e $\theta = \pi \Rightarrow u = 4\pi$, temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(4\theta) d\theta = \frac{1}{4} \int_{-4\pi}^{4\pi} \sin(u) du = 0.$$

Logo, substituindo estes resultados em (42), segue que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(3\theta) \cos(\theta) d\theta = \frac{1}{2}(0 + 0) = 0.$$

Observe que para uma função ímpar f , isto é $f(-x) = -f(x)$, vale que $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

Logo, sendo $f(x) = \sin(3\theta) \cos(\theta)$ uma função ímpar, temos que $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(3\theta) \cos(\theta) d\theta = 0$.

(b) $\int e^{2x} \sqrt{1 - e^{2x}} dx;$

Solução: Fazendo a substituição $u = 1 - e^{2x} \Rightarrow du = -2e^{2x} dx \Rightarrow -\frac{du}{2} = e^{2x} dx$, temos que:

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \sqrt{1 - e^{2x}} dx &= - \int \frac{\sqrt{u}}{2} du \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C \\ &= -\frac{1}{3} u^{3/2} + C \end{aligned}$$

Voltando para a variável original, segue que:

$$\int e^{2x} \sqrt{1 - e^{2x}} dx = -\frac{1}{3} (1 - e^{2x})^{3/2} + C.$$

(c) $\int \frac{x^3}{(x^2 - 4)^2} dx;$

Solução: Fazendo a substituição $u = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 = u + 4$ e $du = 2x dx \Rightarrow \frac{du}{2} = x dx$, temos que:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{(x^2 - 4)^2} dx &= \int \frac{x^2 \cdot x}{(x^2 - 4)^2} dx \\ &= \int \frac{u + 4}{u^2} du \\ &= \int \frac{du}{2u} + \int \frac{2}{u^2} du \\ &= \frac{1}{2} \ln(u) - \frac{2}{u} + C. \end{aligned}$$

Voltando para a variável original, segue que:

$$\int \frac{x^3}{(x^2 - 4)^2} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 4| - \frac{2}{x^2 - 4} + C.$$

$$(d) \int_3^6 \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^3} dx.$$

Solução: Faremos a substituição $x = 3 \sec \theta \Rightarrow dx = 3 \sec \theta \operatorname{tg} \theta d\theta$. Assim, temos que os limites de integração serão $x = 3 \Rightarrow 3 \sec \theta = 3 \Rightarrow \sec \theta = 1 \Rightarrow \cos \theta = 1 \Rightarrow \theta = 0$ e $x = 6 \Rightarrow 6 \sec \theta = 3 \Rightarrow \sec \theta = 2 \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$.

Então, temos que:

$$\begin{aligned} \int_3^6 \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^3} dx &= \int_0^{\pi/3} \frac{\sqrt{9 \sec^2 \theta - 9}}{27 \sec^3 \theta} 3 \sec \theta \operatorname{tg} \theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi/3} \frac{3 (3 \operatorname{tg} \theta) \sec \theta \operatorname{tg} \theta}{27 \sec^3 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{\sec^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

Como $\operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$, segue que a igualdade acima fica

$$\begin{aligned} \int_3^6 \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^3} dx &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/3} \frac{\sec^2 \theta - 1}{\sec^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{3} \left(\int_0^{\pi/3} d\theta - \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\sec^2 \theta} d\theta \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{3} - \int_0^{\pi/3} \cos^2 \theta d\theta \right) \end{aligned} \quad (43)$$

Para calcularmos a integral do último membro, consideramos $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} \cos^2 \theta d\theta &= \int_0^{\pi/3} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/3} \frac{d\theta}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \cos(2\theta) d\theta \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} \right]_0^{\pi/3} \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned} \quad (44)$$

Logo, substituindo (44) em (43) segue que:

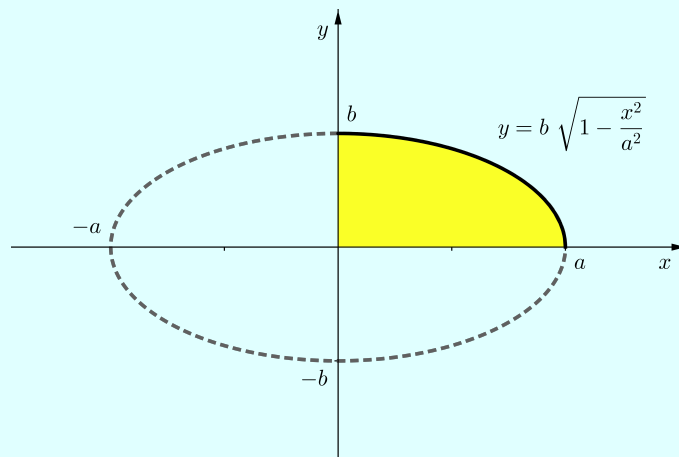
$$\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^3} dx = \frac{1}{3} \left[\frac{\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) \right] = \frac{\pi}{18} - \frac{\sqrt{3}}{24}.$$

(a) Mostre que a área da região limitada pela elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

com $a > 0$ e $b > 0$ é $\pi a b$.

Solução: Para determinarmos a área da região limitada pela elipse calcularemos apenas a área que está no primeiro quadrante e em seguida multiplicar por 4, pois a elipse é simétrica com relação aos eixos, conforme a figura abaixo.



Isolando y e trabalhando apenas com a parte acima do eixo das abscissas teremos

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Sabendo que a área da elipse é

$$A = 4 \int_0^a y \, dx$$

então

$$A = 4 \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \, dx.$$

Aplicando a seguinte substituição trigonométrica

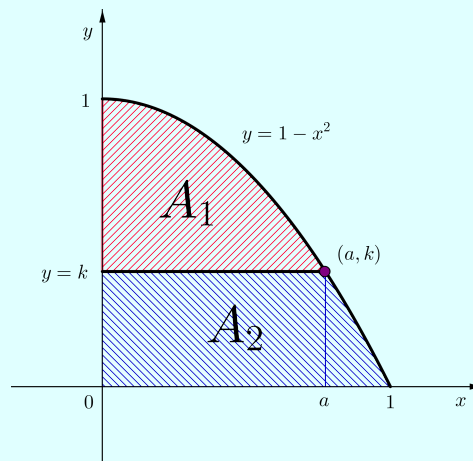
$$x = a \cos(\theta)$$

$$dx = -a \sin(\theta) \, d\theta$$

teremos

$$\begin{aligned}
A &= 4b \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1 - \frac{a^2 \cos^2(\theta)}{a^2}} (-a \sin(\theta)) d\theta \\
&= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta) \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} d\theta \\
&= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta) d\theta \\
&= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta \\
&= 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(2\theta)) d\theta \\
&= 2ab \left[\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2ab \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\pi)}{2} - 0 \right] \\
&= \pi ab
\end{aligned}$$

- (b) Considere $y = k$, com $k > 0$, a reta que intercepta o gráfico de $y = 1 - x^2$, ambos no primeiro quadrante. Determine k de modo que a área das regiões sombreadas da figura abaixo, sejam iguais.



Solução: Temos as áreas A_1 e A_2 ;

$$A_1 = \int_0^a (1 - x^2) - k dx;$$

$$A_2 = \int_0^a k dx + \int_a^1 (1 - x^2) dx.$$

As áreas devem ser iguais ($A_1 = A_2$), então

$$\begin{aligned}\int_0^a (1 - x^2) dx - k &= \int_0^a k dx + \int_a^1 (1 - x^2) dx \\ \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a - kx\Big|_0^a &= kx\Big|_0^a + \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_a^1 \\ \left(a - \frac{a^3}{3}\right) - ka &= ka + \left[1 - \frac{1}{3} - \left(a - \frac{a^3}{3}\right)\right] \\ \frac{3a - a^3 - 3ka}{3} &= ka + \frac{2}{3} - \left(a - \frac{a^3}{3}\right) \\ \frac{3a - a^3 - 3ka}{3} &= \frac{3ka + 2 - 3a + a^3}{3}\end{aligned}$$

$$3a - a^3 - 3ka - 1 = 0.$$

Pela interseção da reta $y = k$ com a parábola $y = 1 - x^2$, temos $k = 1 - a^2$, então

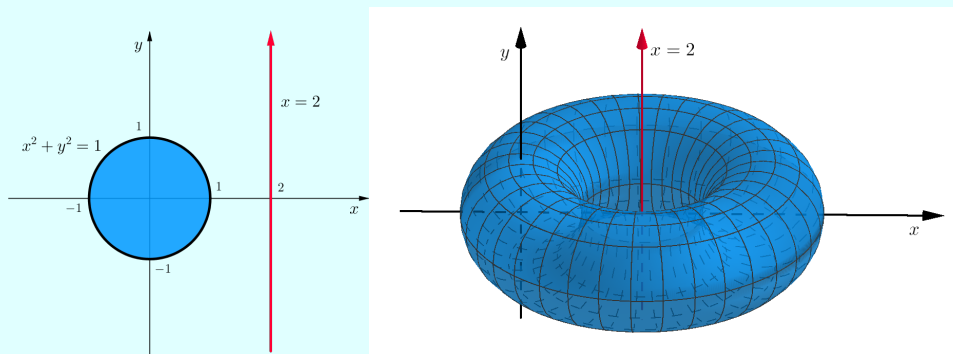
$$\begin{aligned}3a - a^3 - 3a(1 - a^2) - 1 &= 0 \\ 3a - a^3 - 3a + 3a^3 - 1 &= 0 \\ 2a^3 &= 1 \\ a &= \frac{\sqrt[3]{4}}{2}.\end{aligned}$$

Logo o valor de k será

$$\begin{aligned}k &= 1 - a^2 \\ &= 1 - \left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{\sqrt[3]{16}}{4} \\ &= 1 - \frac{\sqrt[3]{2}}{2}.\end{aligned}$$

4.20

- (a) Um toro é um sólido formado pela revolução da região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$ ao redor da reta $x = 2$.



Determine o volume deste sólido com formato de “rosquinha”.

Solução: Determinaremos o volume deste sólido pelo Método das Cascas Cilíndricas

$$V = \int_a^b 2\pi r y \, dx.$$

O sólido é formado pela rotação em torno do eixo $x = 2$, portanto a casca possui raio $r = 2 - x$, logo

$$V = \int_a^b 2\pi(2 - x)y \, dx.$$

Calcularemos o volume do sólido a partir a rotação da área do semicírculo $y = \sqrt{1 - x^2}$, que está acima do eixo x e em seguida multiplicaremos por 2 para obter o volume do toro, ou seja,

$$V = 2 \int_{-1}^1 2\pi(2 - x)\sqrt{1 - x^2} \, dx.$$

Aplicando a seguinte substituição trigonométrica

$$x = \cos(\theta)$$

$$dx = -\sin(\theta) \, d\theta$$

teremos

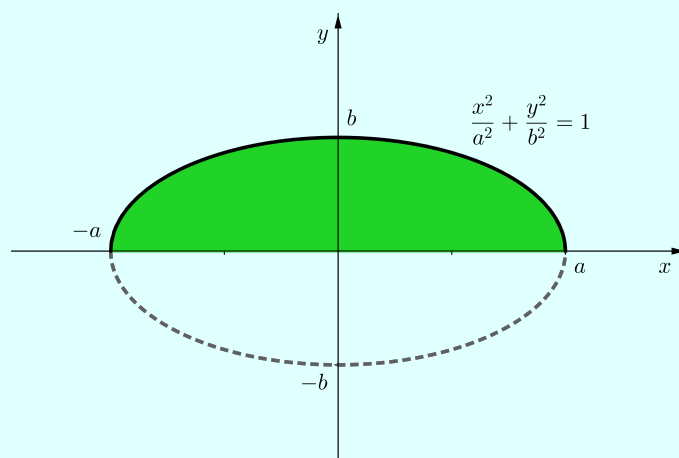
$$\begin{aligned}
V &= 4\pi \int_{\pi}^0 (2 - \cos(\theta)) \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} (-\sin(\theta)) d\theta \\
&= 4\pi \int_0^{\pi} (2 - \cos(\theta)) \sin^2(\theta) d\theta \\
&= 4\pi \left[\int_0^{\pi} 2 \sin^2(\theta) d\theta - \int_0^{\pi} \sin^2(\theta) \cos(\theta) d\theta \right] \\
&= 4\pi \left[2 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta - \int_0^0 u^2 du \right] \\
&= 4\pi \int_0^{\pi} (1 - \cos(2\theta)) d\theta \\
&= 4\pi \left[\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^{\pi} \\
&= 4\pi \left(\pi - \frac{\sin(2\pi)}{2} - 0 \right) \\
&= 4\pi^2
\end{aligned}$$

(b) Considere a região do plano limitada pela elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

com $a > 0$ e $b > 0$. Calcule o volume do sólido formado pela revolução da elipse em torno do seu semi-eixo menor. Este sólido é chamado *Elipsóide*.

Solução: Para determinar o volume deste elipsóide iremos considerar apenas a parte da elipse no primeiro quadrante e rotacioná-la em torno do eixo y . Abaixo temos a região acima do eixo x (uma seção do elipsóide).



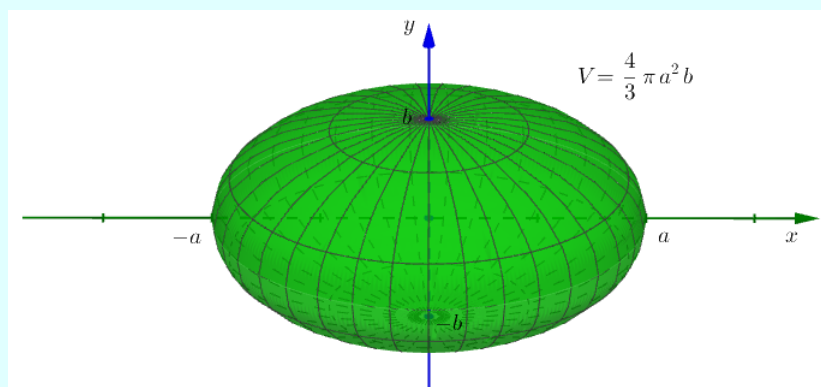
Adotaremos o Método dos Discos para determinar o volume desse sólido e em seguida multiplicaremos por 2 para obter o volume do elipsóide, ou seja,

$$V = 2 \int_{y_1}^{y_2} \pi x^2 dy.$$

Assim, $x = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$ e

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^b \left(a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \right)^2 dy \\ &= 2\pi a^2 \int_0^b \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) dy \\ &= 2\pi a^2 \left(y - \frac{y^3}{3b^2} \right) \Big|_0^b \\ &= 2\pi a^2 \left(b - \frac{b^3}{3b^2} - 0 \right) \\ &= 2\pi a^2 \left(\frac{2b}{3} \right) \\ &= \frac{4}{3}\pi a^2 b \end{aligned}$$

Abaixo temos a representação do elipsóide.



4.21

- (a) Defina curva retificável e faça um breve resumo das principais ideias e dos procedimentos usados para o desenvolvimento e obtenção da fórmula de integração para determinar o comprimento de arco.

Solução: Dizemos que uma curva é retificável se pode ser representada parametricamente por um caminho retificável, isto é, por um conjunto finito de comprimentos de linhas poligonais nela inscrita.

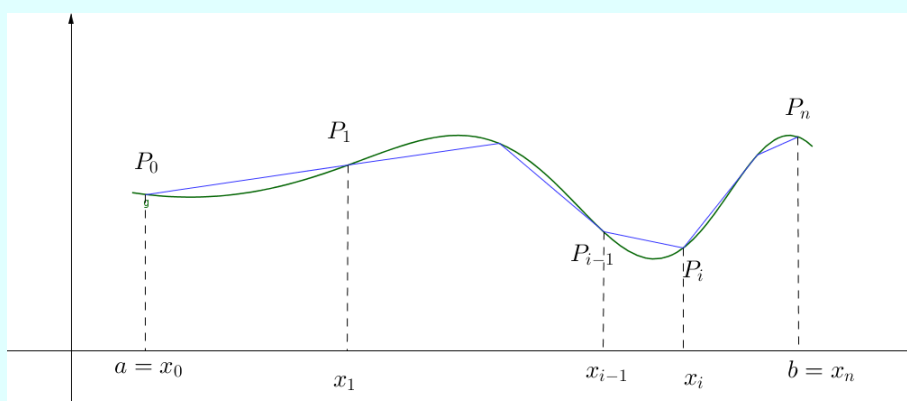
Suponhamos que uma curva C seja dada pela equação $y = f(x)$, onde f é derivável em $a \leq x \leq b$.

A porção AB do gráfico de f , compreendida entre os pontos: $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$ é chamado arco.

Se a curva é uma reta, para calcular o comprimento de arco s da reta, compreendida entre os pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, pela fórmula da distância entre dois pontos obtemos:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (f(x_2) - f(x_1))^2}. \quad (45)$$

Generalizando esta ideia para o gráfico da função contínua f , fazemos uma partição $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ do intervalo $[a, b]$; denotamos os pontos no gráfico de f por $P_i = (x_i, f(x_i))$, $1 \leq i \leq n$.



Ligando cada par de pontos P_{i-1} a P_i por um segmento de reta, obtemos uma linha poligonal formada pela reunião destes segmentos de reta.

Como o comprimento de cada segmento de reta é dado por (45) temos que o comprimento da poligonal, para esta partição, é dado por

$$L_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}. \quad (46)$$

Observe que (46) é uma aproximação do comprimento do arco da curva.

Agora, aplicando o Teorema do Valor Médio em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, temos que existe $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}),$$

para cada $1 \leq i \leq n$. Logo,

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(c_i)(x_i - x_{i-1}))^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \Delta x_i \end{aligned}$$

onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Intuitivamente, temos que se o limite $L_{AB} = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n$ existe, podemos considerar L_{AB} uma aproximação do comprimento do arco. Note que, esse limite existe, pois para f' contínua tem-se que a função $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ também é contínua, e logo, integrável. Assim,

$$L_{AB} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

e temos seguinte definição::

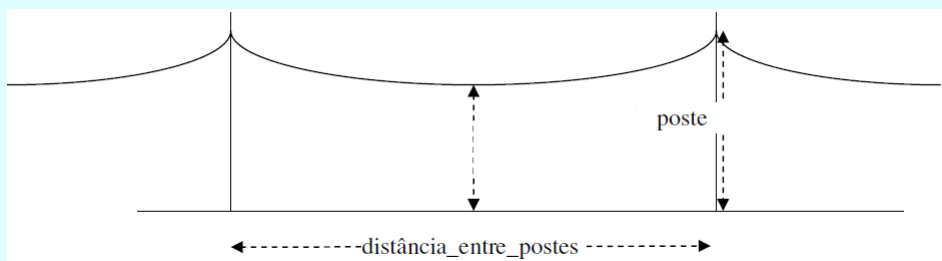
Definição 1 Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivada contínua em $[a, b]$. O comprimento de arco de f entre “a” e “b” é definido por

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

- (b) Fios elétricos suspensos entre torres formam uma catenária (figura abaixo) que pode ser modelada pela equação

$$y = 20 \cosh\left(\frac{x}{20}\right),$$

$-20 \leq x \leq 20$, com x e y medidos em metros. Se a distância entre as torres é de 40 metros, qual deve ser o comprimento do cabo?



Solução: Seja $y = f(x) = 20 \cosh\left(\frac{x}{20}\right)$, $-20 \leq x \leq 20$, a curva que modela o fio elétrico suspenso entre duas torres que distam 40 metros uma da outra.

O comprimento do fio será dado por:

$$s = \int_{-20}^{20} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Como

$$f'(x) = 20 \sinh\left(\frac{x}{20}\right) \cdot \frac{1}{20} = \sinh\left(\frac{x}{20}\right)$$

e considerando a identidade

$$\cosh^2\left(\frac{x}{20}\right) = 1 + \sinh^2\left(\frac{x}{20}\right)$$

segue que

$$\begin{aligned} s &= \int_{-20}^{20} \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{20}\right)} dx \\ &= \int_{-20}^{20} \cosh\left(\frac{x}{20}\right) dx. \end{aligned}$$

Fazendo $u = \frac{x}{20} \Rightarrow dx = 20 du$, com $x = -20 \Rightarrow u = -1$ e com $x = 20 \Rightarrow u = 1$, temos que

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{20} \int_{-1}^1 \cosh(u) du \\ &= 20 \sinh\left(\frac{x}{20}\right) \Big|_{-1}^1 \\ &= 20[\sinh(1) - \sinh(-1)] \\ &\approx 47. \end{aligned}$$

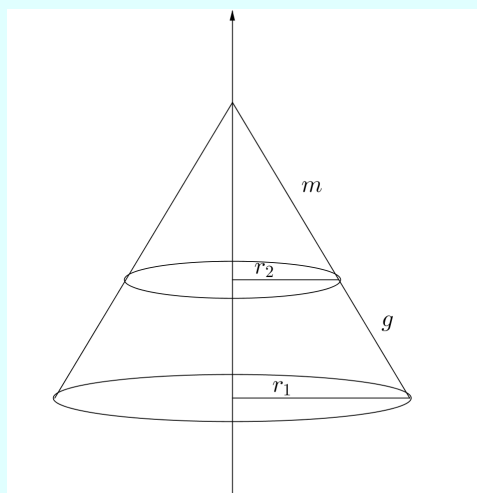
Logo, o cabo deverá medir aproximadamente 47 metros.

4.22

- (a) Faça um breve resumo das principais ideias e dos procedimentos usados para o desenvolvimento e obtenção da fórmula de integração para determinar a área de uma superfície de revolução.

Solução: Uma superfície de revolução é formada quando uma curva é girada ao redor de uma reta.

Vamos deduzir a fórmula da área de uma superfície de revolução usando a área da superfície de um tronco de cone circular reto, de geratriz g , raio da base maior r_1 e raio da base menor r_2 . Esta é a superfície de revolução obtida pela revolução de um segmento em torno de um eixo.



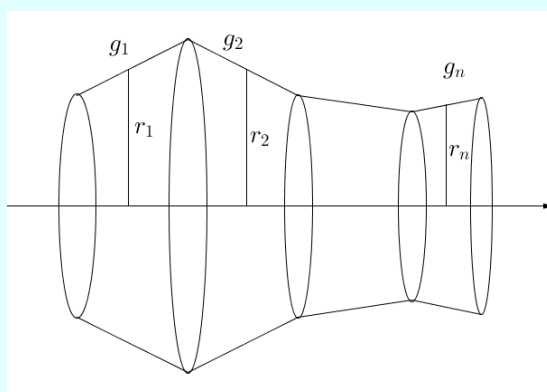
A área lateral, A_T , do tronco de cone é dada por

$$A_T = \pi(r_1 + r_2)g = 2\pi rg,$$

com $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$.

Podemos então calcular a área de uma superfície gerada pela revolução de uma poligonal plana em torno de um eixo deste plano, pois a área desta superfície é a soma das áreas laterais de troncos de cones, isto é,

$$A = 2\pi r_1 g_1 + 2\pi r_2 g_2 + \cdots + 2\pi r_n g_n.$$



Para deduzirmos a área lateral de um sólido de revolução qualquer em torno do eixo x , fazemos uma aproximação da soma das áreas laterais de vários troncos de cone.

Consideremos f definida e positiva em $[a, b]$ com derivada contínua em (a, b) . Seja $P = \{a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$. Consideremos a poligonal com vértices $(x_i, f(x_i))$ e girando-a ao redor do eixo x obtemos uma aproximação para a superfície.

Note que o segmento de reta de comprimento

$$\Delta L_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

gera um tronco de cone. Seja r_i o raio médio deste cone. Pelo Teorema do valor intermediário existe $w_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que $r_i = f(w_i)$. Assim, a área lateral do tronco de cone é dada por

$$\begin{aligned} A_i &= 2\pi r_i \Delta L_i \\ &= 2\pi r_i \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \\ &= 2\pi f(w_i) \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \\ &= 2\pi f(w_i) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right)^2} (x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

Pelo Teorema do valor médio, existe $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$f'(c_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}},$$

logo,

$$A_i = 2\pi f(w_i) \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} (x_i - x_{i-1}).$$

Portanto, a área da superfície de revolução pode ser aproximada por

$$A \approx \sum_{i=1}^n 2\pi f(w_i) \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \Delta x_i.$$

com $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Podemos mostrar que

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi f(w_i) \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Assim, temos a seguinte definição:

Definição 2 *Seja $y = f(x)$ uma função com derivada contínua em $[a, b]$. A área A da superfície de revolução obtida girando o gráfico de f em torno de um dos eixos é dada por*

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

- (b) Um galpão tem 100 metros de comprimento por 40 de largura (figura abaixo). Uma seção transversal do seu telhado tem a forma de uma catenária invertida

$$y = 31 - 10(e^{x/20} + e^{-x/20}).$$

Calcule quantos metros quadrados tem o telhado deste galpão.



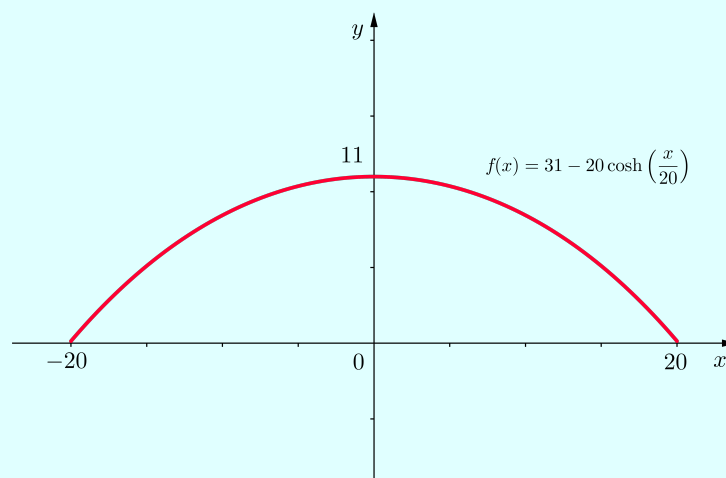
Solução: A função $y = 31 - 10(e^{x/20} + e^{-x/20})$ pode ser escrita como

$$y = 31 - 20 \cosh\left(\frac{x}{20}\right).$$

A área do telhado deste galpão é

$$A = c L$$

com c é o comprimento do galpão (100 metros) e L é o comprimento de curva da catenária invertida com x variando de -20 até 20 (ou com x variando de 0 até 20 e o resultado multiplicado por 2 para obter o comprimento total). Abaixo temos a catenária invertida e queremos determinar seu comprimento de curva.



O comprimento de curva da catenária ivertida é dado por

$$\begin{aligned} L &= 2 \int_0^{20} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= 2 \int_0^{20} \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{20}\right)} dx \\ &= 2 \int_0^{20} \sqrt{\cosh^2\left(\frac{x}{20}\right)} dx \\ &= 2 \int_0^{20} \cosh\left(\frac{x}{20}\right) dx \\ &= 2 \left[20 \sinh\left(\frac{x}{20}\right) \right]_0^{20} \\ &= 40 (\sinh(1) - \sinh(0)) \\ &= 40 \sinh(1) \\ &\approx 47 \text{ m.} \end{aligned}$$

A área do telhado será

$$A = c L$$

$$A = 100 \cdot 47$$

$$A = 4700 \text{ m}^2.$$